PM2DP – Vektorový prostor – První týden

Příklad 1:

Určete aritmetický vektor $\vec{x}$, pro který platí:

a) $\vec{x} = 3\vec{a} + 5\vec{b} - \vec{c}$,

je-li $\vec{a} = (4; 1; 3; -2)$, $\vec{b} = (1; 2; -3;\ 2)$, $\vec{c} = (16; 9; 1; -3)$

b) $\vec{x} = -\vec{a} + 4\vec{b} - \overrightarrow{6c} + 2\vec{d}$,

je-li $\vec{a} = (1; 1; -1; -1)$, $\vec{b} = (0; 0; 0; 0)$, $\vec{c} = (1/2; 0; 1; 4)$, $\vec{d} = (-1; -1; 1; 1)$

c) $\vec{x} = \vec{a} + 2(\vec{b} - 3\vec{c}) - 3(\vec{c} - 5\vec{a})$,

je-li $\vec{a} = (2; 0; 1)$, $\vec{b} = (3; 2; 1)$, $\vec{c} = (0; 0; 1)$

d) $\vec{a} + 2\vec{b} + 3\vec{c} - 4\vec{x} = 0$,

je-li $\vec{a} = (5; -8; -3; 2)$, $\vec{b} = (2; -1; 4; -3)$, $\vec{c} = (-3; 2; -5; 4)$

e) $\vec{a} - \vec{x} + 1/3 \cdot (\vec{b} + \vec{x}) - 1/4 \cdot (2\vec{a} - \overrightarrow{b}) = 0$,

je-li $\vec{a} = (1; 1; -1)$, $\vec{b} = (2; 0; 2)$

f) $5\vec{u} - 4\vec{x} - 3\vec{v} + \vec{x} + 2\vec{w} = \vec{u} + 2\vec{x}$,

je-li $\vec{u} = (1; -1; 1; 1)$, $\vec{v} = (0; 2; 2; 2)$, $\vec{w} = (3; -3; 3; -3)$

Příklad 2:

Najděte všechny hodnoty t, pro které je možno vektor $\vec{u}$ vyjádřit jako lineární kombinace vektorů $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$:

a) $\vec{u} = (5; 3; \mathrm{t})$, $\vec{a} = (1; 0; 2)$, $\vec{b} = (0; 1; 1)$, $\vec{c} = (4; 1; 9)$

b) $\vec{u} = (4; 3; \mathrm{t})$, $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (2; -1; 1)$, $\vec{c} = (1; 7; 8)$

c) $\vec{u} = (\mathrm{t}; 6; 7)$, $\vec{a} = (1; 4; 5)$, $\vec{b} = (3; 8; 10)$, $\vec{c} = (0; -4; -5)$

d) $\vec{u} = (1; 3; 5)$, $\vec{a} = (1; 3; 4)$, $\vec{b} = (2; 8; -2)$, $\vec{c} = (3; 11; \mathrm{t})$

Příklad 3:

Zjistěte, zda jsou dané vektory lineárně závislé a v kladném případě vyjádřete jeden z nich jako lineární kombinaci ostatních:

a) $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (3; 6; 7)$
b) $\vec{a} = (4; -2; 6)$, $\vec{b} = (6; -3; 9)$
c) $\vec{a} = (5; 4; 3)$, $\vec{b} = (3; 3; 2)$, $\vec{c} = (8; 1; 3)$
d) $\vec{a} = (0; 1; 0; 3)$, $\vec{b} = (3; 0; 1; 0)$, $\vec{c} = (0; 3; 0; 1)$

Příklad 4:

Určete číslo t tak, aby vektory $\vec{u}$, $\vec{v}$, $\vec{w}$ byly lineárně závislé:

a) $\vec{u} = (2; 1; 3)$, $\vec{v} = (1; 2; -5)$, $\vec{w} = (3; 0; \mathrm{t})$
b) $\vec{u} = (1; 2; 2)$, $\vec{v} = (2; \mathrm{t}; 3)$, $\vec{w} = (2; 5; 4)$
c) $\vec{u} = (-1; \mathrm{t}; 2)$, $\vec{v} = (1; 1; 2)$, $\vec{w} = (3; 0; \mathrm{t})$
d) $\vec{u} = (4; 5; 2)$, $\vec{v} = (2; 2\mathrm{t}; \mathrm{t})$, $\vec{w} = (2; 10 - 6\mathrm{t}; 4 - 3\mathrm{t})$

Příklad 5:
Mezi danými vektory najděte maximální počet lineárně nezávislých a ostatní vyjádřete jako jejich lineární kombinaci:

a) $\vec{a} = (1; 2; 0; 0)$, $\vec{b} = (1; 2; 2; 4)$, $\vec{c} = (3; 6; 0; 0)$
b) $\vec{a} = (1; 2; 3)$, $\vec{b} = (2; 3; 4)$, $\vec{c} = (3; 2; 3)$, $\vec{d} = (4; 3; 4)$, $\vec{e} = (1; 1; 1)$
c) $\vec{u} = (1; 1; 0; 1)$, $\vec{v} = (2; 1; 1; -1)$, $\vec{w} = (1; -1; 0; -1)$, $\vec{x} = (1; 0; -1; 2)$

Příklad 6:
Zjistěte, zda dané vektory tvoří bázi vektorového prostoru R^3. V kladném případě vyjádřete vektor $\vec{a} = (1; 1; 2)$, jako jejich lineární kombinaci a stanovte souřadnice vektoru $\vec{a}$ v dané bázi:

a) $\vec{u}_1 = (1; 1; 1)$, $\vec{u}_2 = (1; 1; 0)$, $\vec{u}_3 = (2; 0; 0)$
b) $\vec{u}_1 = (0; 1; -1)$, $\vec{u}_2 = (0; 2; -2)$, $\vec{u}_3 = (1; 1; 3)$
c) $\vec{u}_1 = (1; 2; 1)$, $\vec{u}_2 = (0; 1; 1)$, $\vec{u}_3 = (0; 0; 3)$

Příklad 7:
Z daných vektorů vyberte maximální počet lineárně nezávislých a doplňte je vhodně na bázi příslušného vektorového prostoru R^n:

a) $\vec{a}_1 = (2; 1; -1; 4)$, $\vec{a}_2 = (-1; 3; 0; -1)$, $\vec{a}_3 = (-1; -4; 1; -3)$, $\vec{a}_4 = (3; -2; -1; 5)$
b) $\vec{b}_1 = (4; -1; 5; 3; 1)$, $\vec{b}_2 = (3; -2; 1; 4; 0)$, $\vec{b}_3 = (1; 0; -2; 4; -3)$

Výsledky úloh:

1. a) (1; 4; -7; 7), **b)** (-6; -3; -3; -21), **c)** (38; 4;9), **d)** (0; -1; −5/2; 2), **e**) (5/2;3/4;1), **f)** (2, −16/5;4/5;-8/5)

2. a) t = 13, **b)** t = 7, **c)** pro žádné t, **d)** t ≠ 2.

3. a) nezávislé, **b)** závislé, b = 3/2a, **c)** závislé, c = 7a - 9b, **d)** nezávislé.

4. a) t = 11, **b)** neexistuje, **c)** $t_1 = 2$, $t_2 = 3$, **d)** t libovolné.

5. a) a, b; c = 3a + 0b nebo b, c; a = 0b +1/3c, **b)** mimo trojic a, b, e; c, d, e jsou libovolné tři trojice lineárně nezávislé. Např. a, b, c; d = - a + b + c, e = - a + b + 0c, **c)** např. u, v, w; x = 2u - v + w.

6. a) ano, a = $2u_1 - u_2$, a má souřadnice (2; -1; 0), **b)** ne, **c)** ano, a = $u_1 - u_2 + 2/3 \cdot u_3$, a má souřadnice (1;-1;2/3).

7. a) např. a_1, a_2, a_3 = (0;0;1;0), a_4 = (0;0;0;1), b) b_1, b_2, b_3, b_4 = (0;0;0;1;0), b_5= (0, 0, 0, 0, 1).

Kontrolní test:

1) Určete aritmetický vektor $\vec{x}$, pro který platí $\vec{a} - \frac{1}{2} \cdot \vec{x} + 2\vec{b} = \vec{c}$, je-li $\vec{a} = (1; 0; 0)$, $\vec{b} = (0; 1; 0)$, $\vec{c} = (0; 0; 1)$.
2) Nalezněte všechny hodnoty t, pro které je možno vektor $\vec{u} = (1; 0; t)$ vyjádřit jako lineární kombinaci vektorů $\vec{a} = (1; 1; 1)$, $\vec{b} = (1; 0; 0)$, $\vec{c} = (0; 0; 1)$.
3) Zjistěte, zda jsou vektory $\vec{a} = (1; -1; 1)$, $\vec{b} = (1; 1; 0)$, $\vec{c} = (0; 1; 1)$ lineárně závislé, v kladném případě vyjádřete vektor $\vec{a}$ jako lineární kombinaci vektorů $\vec{b}$ a $\vec{c}$.
4) Určete číslo t tak, aby vektory $\vec{a} = (1; 0; 0)$, $\vec{b} = (0; 1; 0)$, $\vec{c} = (0; 0; t)$ byly lineárně závislé.
5) Zjistěte, zda vektory $\vec{a} = (1; 1; 0)$, $\vec{b} = (1; 0; 1)$, $\vec{c} = (0; 1; 1)$ tvoří bázi aritmetického vektorového prostoru R^3 a v kladném případě vyjádřete vektor $\vec{u} = (0; 0; 1)$ jako jejich lineární kombinaci.

Výsledky:

1) $\vec{x} = (2; 4; -2)$ 2) pro všechna t 3) jsou LN 4) t=0 5) $\vec{u} = -\frac{1}{2} \cdot \vec{a} + \frac{1}{2} \cdot \vec{b} + \frac{1}{2} \cdot \vec{c}$