Numerické řešení Obyčejných Diferenciálních Rovnic (ODR)

ODR = rovnice, kde se vyskytuje 1 nebo více derivací neznámých fcí

Řešení ODR je určitá fce, která vyhovuje rovnici

- pokaždé: čas $t(x)$ je nezávislá proměnná

  y je závislá proměnná

- Exaktní řešení → obecné řešení (spojitá fce, obsahuje konstanty)
- Numerické řešení → množina hodnot $\{t_0; t_1; \dots t_n\} \rightarrow \{y_0; y_1; \dots y_n\}$
- budeme se zabývat případy, kdy je dána ODR a specifické počáteční podmínky

  ⇒ počáteční problém pro ODR $y' = f(t;y)$; $y(t_0) = y_0$

  → y je fcí t ⇒ $\frac{dy}{dt} = y' = f(t; y(t))$

N. řešení ODR a Integrace

ODR: $\frac{dy}{dt} = y' = f(t;y)$; $y(t_0) = y_0$

Integrace od t do $t+h$:

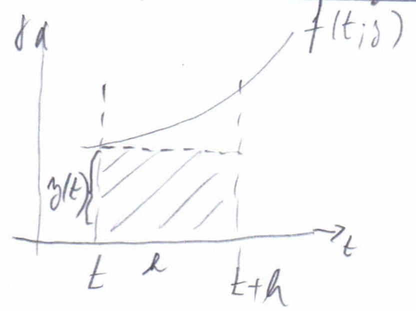
$$\int_t^{t+h} 1\, dy = \int_t^{t+h} f(t; y(t))\, dt$$

$$[y]_t^{t+h} = \int_t^{t+h} f(t; y(t))\, dt$$

$$y(t+h) - y(t) = \int_t^{t+h} f(t; y(t))\, dt$$

$$\Rightarrow y(t+h) = y(t) + \int_t^{t+h} f(t; y(t))\, dt$$

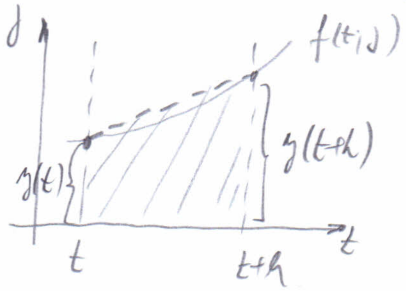
Obdélníkové pravidlo integrace:



$$\int_t^{t+h} f(t; y(t))\, dt \approx h \cdot f(t; y(t))$$

Lichoběžníkové pravidlo integrace:

$$\int_t^{t+h} f(t; y(t))\, dt \approx \frac{h}{2}\left[f(t; y(t)) + f(t+h; y(t+h))\right]$$



Lipschicova podmínka Existence a Jedinosti řešení ODR

Jestliže fce $y=f(x)$ a její derivace $y'=f'(x)$ jsou spojité v obdélníku $|x-x_0|<\alpha$ a $|y-y_0|<\beta$, potom počáteční problém $y'=f(x;y)$; $y(x_0)=y_0$ má jediné spojité řešení v každém intervalu $|x-x_0|<\varepsilon$

→ Numerické metody vycházejí z Taylorovy řady

$$y(t+h) = y(t) + h\cdot y'(t) + \frac{1}{2!}h^2 y''(t) + \frac{1}{3!}h^3 y'''(t) + \ldots + \frac{1}{m!}h^m y^{(m)}(t) + \ldots$$

$m \triangleq$ řádu Numerické Metody

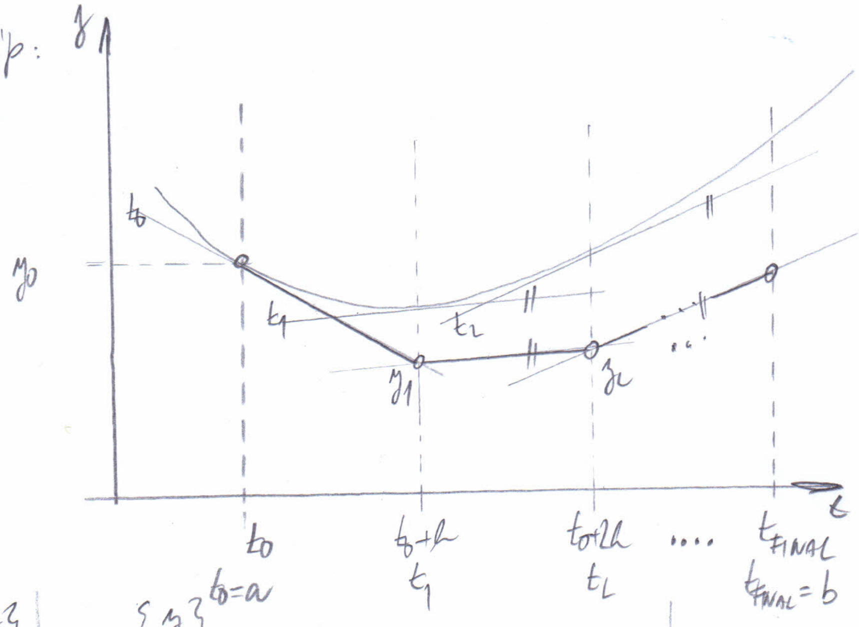
→ pro $m=1$ (vyšší řády derivací zanedbáváme)

EULEROVA METODA hledáme přibližné hodnoty partikulárního řešení

$$\frac{dy}{dt} = y' = f(t; y(t)) \; ; \; y(t_0) = y_0 \quad \Rightarrow IV: \quad y(t+h) = y(t) + h\, f(t; y(t))$$

$$t_0 < t < t_{FINAL} \quad ; \quad h = \frac{b-a}{n}$$

princip:



neznámou spojitou křivku $y(t)$ nahradíme lomenou čárou

$\{t\}$	$\{y\}$
t_0	y_0 Počáteční podmínky
t_1	$y_1 = y_0 + h\cdot f(t_0; y_0)$
t_2	$y_2 = y_1 + h\cdot f(t_1; y_1)$
$\vdots$	$\vdots$
t_{FINAL}	$y_{FINAL} = y_{FINAL-1} + h\, f(t_{FINAL-1}; y_{FINAL-1})$

$$IV: y_{i+1} = y_i + h\, f(t_i; y_i)$$

Př: Eulerovou metodou řešte počáteční problém pro ODR $y' = \cos x - y$; $y(0)=1$ na intervalu $x \in \langle 0;1 \rangle$ pro $n=4$.

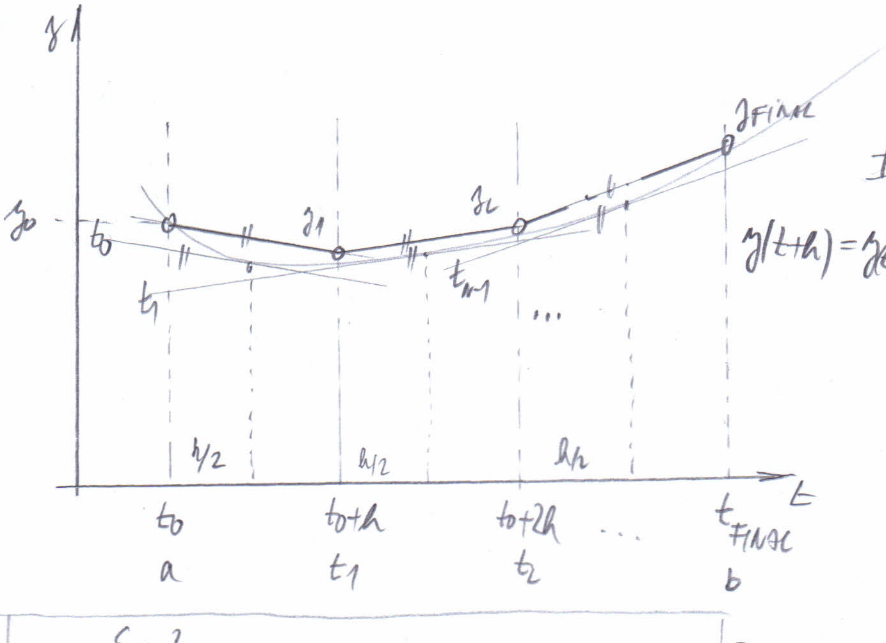
1. počet kroků $n=4 \Rightarrow h = \frac{1-0}{4} = 0{,}25 \Rightarrow \{x\} = \{0; 0{,}25; 0{,}5; 0{,}75; 1\}$
2. IV: $y_{i+1} = y_i + h \cdot f(t_i; y_i)$

   $y_{i+1} = y_i + 0{,}25(\cos x_i - y_i)$; $i = 0;1;2;3;4$
3. tabulka hodnot $y_{i+1} = B + 0{,}25(\cos A - B)$ Paměti

	i	x_i	y_i	EXAKTNÍ ŘEŠENÍ KONTROLA $y = \frac{1}{2}(\sin x + \cos x + e^{-x})$
poč. podm.	0	0_A	1_B	1
	1	$0{,}25_A$	1_B	0,997 558 582
	2	$0{,}5_A$	$0{,}992\,228\,105_B$	0,981 769 380
	3	$0{,}75_A$	$0{,}963\,566\,720_B$	0,942 847 091
	4	1	0,905 597 257	0,876 826 366

MODIFIKOVANÁ EULEROVA METODA (krok uprostřed intervalu)

princip



IV: $y(t+h) = y(t) + h \cdot f\left[t + \frac{h}{2}; y(t) + \frac{h}{2} f(t; y(t))\right]$

$\{t\}$	$\{y\}$
t_0	y_0 PP
t_1	$y_1 = y_0 + h f\left[t_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{h}{2} f(t_0; y_0)\right]$
t_2	$y_2 = y_1 + h f\left[t_1 + \frac{h}{2}; y_1 + \frac{h}{2} f(t_1; y_1)\right]$
$\vdots$	$\vdots$
t_{FINAL}	$y_{FINAL} = y_{FINAL-1} + h f\left[t_{FINAL-1} + \frac{h}{2}; y_{FINAL-1} + \frac{h}{2} f(t_{FINAL-1}; y_{FINAL-1})\right]$

IV: $y_{I+1} = y_I + h f\left[t_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(t_i; y_i)\right]$

Př: Modifikovanou Eulerovou metodou řešte počáteční problém pro ODR $y' = \cos x - y$; $y(0) = 1$ na intervalu $x \in \langle 0;1 \rangle$ pro $n = 4$. (6DM)

1. Počet kroků $n = 4$ $\rightarrow h = \frac{1-0}{4} = 0{,}25$; $\frac{h}{2} = 0{,}125 \Rightarrow \{x\} = \{0; 0{,}25; 0{,}5; 0{,}75; 1\}$

2. IV: $y_{i+1} = y_i + h \cdot f\left[x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i; y_i)\right]$

$$y_{i+1} = y_i + 0{,}25 \cdot \left\{\cos(x_i + 0{,}125) - \left(y_i + 0{,}125 \cdot [\cos x_i - y_i]\right)\right\}$$

3. Tabulka hodnot

x_i	y_i	$f(x_i;y_i)$ $\cos A - B$	$y_i + \frac{h}{2} f(x_i;y_i)$ $B + 0{,}125 \cdot C$	$x_i + \frac{h}{2}$ $A + 0{,}125$	$f[x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} f(x_i;y_i)]$ $\cos E - D$	y_{i+1} B
0 A	1 B	0 C	1 D	0,125 E	-0,007802 F	0,998049 B
0,25 A	0,998049 B	-0,029137 C	0,994407 D	0,375 E	-0,063900 F	0,982074 B
0,5 A	0,982074 B	-0,104492 C	0,969013 D	0,625 E	-0,158050 F	0,942562 B
0,75 A	0,942562 B	-0,210873 C	0,916203 D	0,875 E	-0,275206 F	0,873761 B
1	0,873761					

→ pro $m = 2$ METODA RUNGE-KUTTA 2. řádu

$$y(t+h) = y(t) + \frac{h}{2} f(t; y(t)) + \frac{h}{2} f(t+h; y + h f(t;y))$$

$$y(t+h) = y(t) + \frac{1}{2}(k_1 + k_2) \quad ; \text{ kde } \quad k_1 = h \cdot f(t;y)$$
$$k_2 = h f(t+h; y + k_1)$$

→ pro $m = 4$ METODA RUNGE-KUTTA 4. řádu

$$y(t+h) = y(t) + \frac{1}{6}(k_1 + 2k_2 + 2k_3 + k_4) \quad ; \text{ kde } \quad k_1 = h f(t;y)$$
$$k_2 = h f\left(t + \frac{h}{2}; y + \frac{1}{2} k_1\right)$$
$$k_3 = h f\left(t + \frac{h}{2}; y + \frac{1}{2} k_2\right)$$
$$k_3 = h \cdot f(t + h; x + k_3)$$