PAMAK, PAMAP předmatika a cvičení

SOUSTAVA NELINEÁRNÍCH ROVNIC (SNR) N rovnic N neznámých

→ stejný alg. jako NMT

$$\begin{rcases} f_1(x_1; x_2; \dots; x_n) = 0 \\ f_2(x_1; x_2; \dots; x_n) = 0 \\ \dots \\ f_n(x_1; x_2; \dots; x_n) = 0 \end{rcases}$$

maticový zápis $\mathbb{F}(\mathbb{X}) = 0$ kde $\mathbb{F} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_n \end{pmatrix}$ a $\mathbb{X} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

→ Iterační vztah $\underline{\mathbb{X}^{k+1} = \mathbb{X}^k - [F'(X^k)]^{-1} \cdot F(X^k)}$ (stejný jako NMT, jen maticově)

kde $\mathbb{F}'(X^k)$ je Jacobián $\left[\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(X^k)\right]_{N \times N}$

→ abychom nemuseli počítat inverzní matici $[F'(X^k)]^{-1}$ lze vyřešit soustavu: $[F'(X^k)] \cdot \mathbb{H}^k = -F(X^k)$

a pak $\mathbb{X}^{k+1} = X^k + \mathbb{H}^k$

→ My pouze SNR 2 rc 2 N

- $\mathbb{F}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$; dána počáteční aproximace $\mathbb{P}_0 = \begin{pmatrix} p_0 \\ q_0 \end{pmatrix}$
- budeme generovat posloupnost $\{\mathbb{P}_k\}$, která konverguje k řešení $P\begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} = \mathbb{P}$
- $\mathbb{P}_{k+1}$ konstruujeme pomocí $\mathbb{P}_k$

1. Vypočítáme $\mathbb{F}(\mathbb{P}_k) = \begin{pmatrix} f_1(p_k; q_k) \\ f_2(p_k; q_k) \end{pmatrix}$

2. Vypočítáme Jacobián $J(\mathbb{P}_k) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(p_k; q_k) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(p_k; q_k) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(p_k; q_k) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(p_k; q_k) \end{pmatrix}$

3. Řešíme systém $J(\mathbb{P}_k) \cdot \Delta\mathbb{P} = -\mathbb{F}(\mathbb{P}_k)$ pro $\Delta\mathbb{P} = \begin{pmatrix} \Delta p_k \\ \Delta q_k \end{pmatrix}$

4. Vypočítáme další aproximaci $\underline{\mathbb{P}_{k+1} = \mathbb{P}_k + \Delta\mathbb{P}}$

$$\begin{pmatrix} p_{k+1} \\ q_{k+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_k \\ q_k \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Delta p_k \\ \Delta q_k \end{pmatrix}$$

Příklad: Užitím Newtonovy metody řešte systém

$$\begin{aligned} 1-4x+2x^2-2y^3&=0\\ -4+x^4+4y+4y^4&=0 \end{aligned}$$

počáteční aproximace $P_0=\begin{pmatrix}0{,}1\\0{,}7\end{pmatrix}$

přesnost $\varepsilon=0{,}01$

pro $k=0$: 1. $F(P_0)=F\begin{pmatrix}0{,}1\\0{,}7\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0{,}666\\-0{,}2395\end{pmatrix}$

2. $J(P)=\begin{pmatrix}-4+4x & -6y^2\\ 4x^3 & 4+16y^3\end{pmatrix}\rightarrow J(P_0)=\begin{pmatrix}-3{,}6 & -2{,}94\\ 0{,}004 & 9{,}488\end{pmatrix}$

3. řešíme soustavu

$$\begin{pmatrix}-3{,}6 & -2{,}94\\ 0{,}004 & 9{,}488\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta p\\ \Delta q\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}066\\0{,}2395\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}\Delta p_0\\ \Delta q_0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0{,}038961\\0{,}025259\end{pmatrix}$$

4. $P_1=P_0+\Delta P_0=\begin{pmatrix}0{,}1\\0{,}7\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-0{,}038961\\0{,}025259\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}061039\\0{,}725259\end{pmatrix}\begin{matrix}A\\B\end{matrix}$

pro $k=1$: 1. $F(P_1)=\begin{pmatrix}0{,}000324\\0{,}007755\end{pmatrix}\begin{matrix}C\\D\end{matrix}$

2. $J(P_1)=\begin{pmatrix}-3{,}755846 & -3{,}156002\\ 0{,}00091 & 10{,}103783\end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix}D & F\\ G & H\end{pmatrix}$

3. $\begin{pmatrix}-3{,}755846 & -3{,}156002\\ 0{,}00091 & 10{,}103783\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\Delta p_1\\ \Delta q_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-0{,}000324\\-0{,}007755\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}\Delta p_1\\ \Delta q_1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}000731\\-0{,}000768\end{pmatrix}\quad\begin{pmatrix}I\\J\end{pmatrix}$$

4. $P_2=P_1+\Delta P_1=\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}I\\J\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0{,}060307\\0{,}726026\end{pmatrix}\begin{matrix}K\\L\end{matrix}$

přesnost: $\|P_2-P_1\|=\left\|\begin{pmatrix}A\\B\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}K\\L\end{pmatrix}\right\|=\left\|\begin{pmatrix}A-K\\B-L\end{pmatrix}\right\|=\sqrt{(A-K)^2+(B-L)^2}=0{,}001062$ ✓

$\begin{pmatrix}<0{,}01\\ \text{STOP}\end{pmatrix}$

Výpočet determinantu pomocí GEM:

- prohození řádků → změna znaménka determinantu
- snažíme se dostat horní △ matici $\begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & \cdots \\ 0 & a_{22} & \cdots \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} \Rightarrow \det A = \prod_{i=1}^{n} a_{ii}$
- pouze násobím hl. řádek (ne lin. kombinace)
- na hl. diagonále netvořím 1, ale jen 0 pod hl. diag.!

Př: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \sim -1 \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & -1 & -3 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

!⊖!

$\det(A) = \ominus\, 1 \cdot (-1) \cdot (-1) = \underline{\underline{-1}}$

Př: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 3 & -1 & -1 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \sim^{\frac{1}{4}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -7 & -11 \\ 0 & 1 & -5 & -7 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -7 & -11 \\ 0 & 0 & -27/4 & -39/4 \\ 0 & 0 & -3/4 & -27/4 \end{pmatrix} \sim (\cdot -\tfrac{1}{9})$

$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & -4 & -7 & -1 \\ 0 & 0 & -27/4 & -39/4 \\ 0 & 0 & 0 & -17/3 \end{pmatrix} \Rightarrow \det(A) = 1 \cdot (-4) \cdot \left(-\frac{27}{4}\right) \cdot \left(-\frac{17}{3}\right) = \underline{\underline{-153}}$

INVERZNÍ MATICE POMOCÍ GEM

Př.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\qquad A \cdot A^{-1} = E$

$$\begin{array}{c} -2 \\ -3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 6 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -3 & -3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \begin{array}{c} \\ \\ -3 \\ +3 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & -3 & -5 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 3 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & 3 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & -1 & 0 \end{array}\right)$$

MŮŽU PŘEHAZOVAT ŘÁDKY!

Zk.: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

INVERZNÍ MATICE POMOCÍ SUBDETERMINANTŮ

Př.: $A \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{pmatrix}$ $\qquad Det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} = -1 \neq 0$ je regulární

$\tilde{A} = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad$ o změna znamének $(-1)^{m+n}$

$(\tilde{A})^T = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -2 \\ 3 & -3 & 1 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ $\qquad A^{-1} = \frac{1}{det(A)} \cdot (\tilde{A})^T = \begin{pmatrix} 1 & -3 & 2 \\ -3 & 3 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$

Př.: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1{,}01 \\ 1 & 0{,}99 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ urči A^{-1} $\qquad$ tím hlídáte $A \cdot A^{-1} = E$ i $A^{-1} \cdot A = E$

V.: Determinant inverzní matice je roven převrácené hodnotě determinantu původní matice

$$det(A^{-1}) = \frac{1}{det(A)}$$

V. Matice transponovaná k inverzní matici je rovna matici inverzní k matici transponované

VÝPOČET VLASTNÍCH ČÍSEL MATIC

Hledáme λ, které je řešením maticové rce:

$$A \cdot X = \lambda X$$

A ... čtvercová, řádu n

λ ... vl. číslo matice A

X ... vl. vektor matice A

SPEKTRUM MATICE A ... množina všech VL. ČÍSEL

$$Ax - \lambda x = 0$$

$$(A - \lambda E)x = 0$$

E jednotková matice

$\Rightarrow$ homogenní soustava rovnic $\Rightarrow$ determinant $|A - \lambda E| = 0$

$\rightarrow$ řešením tohoto determinantu dostaneme polynom $p(\lambda)$ stupně n

↳ CHARAKTERISTICKÝ POLYNOM

$\rightarrow$ CHARAKTERISTICKÁ RCE $p(\lambda) = 0 \rightarrow$ kořeny λ ... vlastní čísla A

Př: $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$

CHAR. RCE: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 & 1 \\ 1 & -2-\lambda & 1 \\ 1 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

SARRUSOVO PRAVIDLO: $(2-\lambda)(-2-\lambda)(2-\lambda) - 3 - 3 - (-2-\lambda) + 3(2-\lambda) + 3(2-\lambda) = 0$

$$(-4 \cancel{-2\lambda} \cancel{+2\lambda} + \lambda^2)(2-\lambda) - 6 + 2 + \lambda + 6(2-\lambda) = 0$$

$$-8 + 4\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 - 6 + 2 + \lambda + 12 - 6\lambda = 0$$

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = 0 \quad / : (-1)$$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda(\lambda - 1)^2 = 0 \rightarrow \lambda_1 = 0 \quad \lambda_{23} = 1 \qquad \text{Spektrum } \{0; 1\}$$

Vlastní vektor příslušný vl. číslu $\lambda_1 = 0$

$$\begin{pmatrix} 2-0 & -3 & 1 \\ 1 & -2-0 & 1 \\ 1 & -3 & 2-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 3 & -3 & 0 \end{array}\right) \sim$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

vol. $x_3 = t$

$x_2 - t = 0$

$x_2 = t$

$2x_1 - 3t + t = 0$

$x_1 = t$

vektor: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, vlastní vektor pro $\lambda_1 = 0$

Vl. vektor příslušný vl. číslu $\lambda_{2,3} = 1$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2-1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -2-1 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 2-1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -3 & 1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

volba: $x_3 = s$

$x_2 = t$

$x_1 = 3t - s$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t-s \\ t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s$$

volba $t = s = 1$ $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ vl. vektor pro $\lambda_{23} = 1$

NUMERICKÉ ŘEŠENÍ SOUSTAV LIN. ROVNIC

- nejdůležitější typ kapitola → diskretizace → linearizace

$$Ax = b \qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & & \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

Řešit(ost) → Frobeniova věta: $h(A) = n$ regulární matice $\exists!$ řešení
$h(A) < n$ ∞ řešení, parametrické
$h(A) \neq h(A|b)$ 0 řešení

→ 2 hlavní sk.: Přímé metody (pro plné matice) → transformace matice soustavy na Δ matici
→ LU rozklad, GEM, GEM-JORDANOVA MODIFIKACE
Iterační metody (řídké matice) → limita posloupnosti vektorů
→ Jacobiho metoda, Gauss-Seidelova, ...
(největšího spádu, gradientní, relaxační ...)

→ Cramerovo pravidlo → $x = \left(\frac{D_{x_1}}{D}; \dots ; \frac{D_{x_n}}{D} \right)$ → pro velké soustavy výpočetně náročné
→ špatně podmíněné

PŘÍMÉ METODY

METODA L-U ROZKLADU

princip: rozklad matice A na součin dvou Δ matic $A = L \cdot U$

matice L - všechny prvky čtvercové matice leží nad hl. diag $= 0$ $\begin{pmatrix} l_{ij} & 0 \\ & \end{pmatrix}$
U - pod hl. diag $= 0$ $\begin{pmatrix} & u_{ij} \\ 0 & \end{pmatrix}$

$Ax = b \qquad A = L \cdot U$
$LUx = b \qquad$ Nejdříve řešíme systém: $Ly = b \qquad y$ ... pomocný vektor nezn.
$Ux = y \qquad$ Poté $U \cdot x = y$

- uplatnění výhoda, řešíme-li více systémů se stejnou maticí A

→ Post. podmínky pro LUR
→ pro každou $\square$ matici A, která má hlavní subdeterminanty různé od 0
$\exists$ matice L a U tak, že platí $A = L \cdot U$
→ LU rozklad je dán jednoznačně → ① diag. prvky matice L jsou 1 (Doolittlův rozklad)
→ ② diag. prvky matice U jsou 1 (Croutův rozklad)

Př:
$$2x_1 + x_2 = 3$$
$$6x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 5$$
$$4x_1 + 14x_2 - 7x_3 = -5$$

MATICOVĚ: $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & -2 \\ 4 & 14 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & -2 \\ 4 & 14 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

a) DOOLITTLE $\quad l_{11} = l_{22} = l_{33} = 1$

b) CROUT $\quad u_{11} = u_{22} = u_{33} = 1$

aplikujeme Doolittla

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & -2 \\ 4 & 14 & -7 \end{pmatrix} = \overset{L}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}} \cdot \overset{U}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = \overset{L}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix}} \overset{U}{\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}$$

$2 = u_{11} \quad 6 = 2l_{21} \Rightarrow l_{21} = 3 \quad 4 = 2l_{31} \Rightarrow l_{31} = 2$

$1 = u_{12} \quad 6 = 3 + u_{22} \Rightarrow u_{22} = 3 \quad 14 = 2 + 3l_{32} \Rightarrow l_{32} = 4$

$0 = u_{13} \quad -2 = 0 + u_{23} \Rightarrow u_{23} = -2 \quad -7 = 0 - 8 + u_{33} \Rightarrow u_{33} = 1$

$L \cdot y = b \qquad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\left.\begin{array}{l} y_1 = 3 \\ 3 \cdot 3 + y_2 = 5 \quad y_2 = -4 \\ 2 \cdot 3 + 4 \cdot (-4) + y_3 = -5 \quad y_3 = 5 \end{array}\right\} \text{přímá substituce}$$

$U \cdot x = y \qquad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$

$x_3 = 5$

$3x_2 - 2 \cdot 5 = -4 \quad x_2 = 2$

$2x_1 + 2 + 0 = 3 \quad x_1 = 1/2$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

Př: Nakreslete vlastní čísla a vlastní vektory matice $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$

CHR $\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 \\ -2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$(1-\lambda)(4-\lambda) + 2 = 0$

$\lambda^2 - 5\lambda + 6 = 0$

$(\lambda-2)(\lambda-3) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 2 \vee \lambda_2 = 3$ spektrum $A = \{2; 3\}$ $r_A = 3$

1. $\lambda_1 = 2$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$-h_1 + h_2 = 0$ volím: $h_2 = t \Rightarrow h_1 = t$ $\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} t$; $t \in R$

↳ vl. vektor k λ_1

2. $\lambda_2 = 3$ $\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$-2h_1 + h_2 = 0$ volím $h_1 = t \Rightarrow h_2 = 2t$ $\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} t$; $t \in R$

↳ vl. vektor k λ_2

Př: NMT nakreslete řešení rce $x^3 - \ln x + \cos 2x - 1 = 0$ v $\langle 1; 2 \rangle$; $\varepsilon = 0{,}001$

$f(x) = x^3 - \ln x + \cos 2x - 1$

$f'(x) = 3x^2 - \frac{1}{x} - 2\sin 2x$

$f''(x) = 6x + \frac{1}{x^2} - 4\cos 2x$

$\}$ $\underset{+}{f'(x)}$ $\underset{+}{f''(x)}$ v $\langle 1; 2 \rangle > 0 \Rightarrow x_0 = 2$

k	x_k	$\varepsilon \mid \overset{B}{x_k} - \overset{A}{x_{k-1}} \mid$
0	2 $\quad \overset{A}{A \to B}$	/
1	1,565 592 378 $\quad \overset{A}{A \to B}$	0,43441 ✗
2	1,358 056 348 $\quad \overset{A}{A \to B}$	0,20754 ✗
3	1,285 584 731 $\quad \overset{A}{A \to B}$	0,07247 ✗
4	1,275 316 276 $\quad \overset{A}{A \to B}$	0,01027 ✗ → 4PČ
5	1,275 110 176 $\quad \overset{A}{A \to B}$	0,00021 ✓

IV: $x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k^3 - \ln x_k + \cos 2x_k - 1}{3x_k^2 - \frac{1}{x_k} - 2\sin 2x_k}$

$\left(x_{k+1} = A - \dfrac{A^3 - \ln A + \cos 2A - 1}{3A^2 - \frac{1}{A} - 2\sin 2A} \right)$

$\bar{x} = 1{,}275$ $\quad x \in (1{,}274; 1{,}276)$

Př LUR řešte (DOOLITTLE)

$$\begin{aligned} x_1+3x_2-2x_3+x_4&=0\\ 2x_1+5x_2-3x_3+3x_4&=0\\ x_1+2x_3-2x_4&=9\\ 2x_1-x_2+4x_3+9x_4&=3 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix}1&3&-2&1\\2&5&-3&3\\1&0&2&-2\\2&-1&4&9\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\1&3&1&0\\2&7&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&3&-2&1\\0&-1&1&1\\0&0&1&-6\\0&0&0&6\end{pmatrix}$$

$1=u_{11}$ $\quad 2=l_{21}$ $\quad 1=l_{31}$ $\quad 2=l_{41}$

$3=u_{12}$ $\quad 5=6+u_{22}$ $\quad 0=1-l_{32}$ $\quad -1=6-l_{42}$

$-2=u_{13}$ $\quad -3=-4+u_{23}$ $\quad 2=-2+3+u_{33}$ $\quad 4=-2+7+l_{43}$

$1=u_{14}$ $\quad 3=2+u_{24}$ $\quad -2=1+3+u_{34}$ $\quad 9=2+7-6+l_{44}$

$Ax=b$

$L\underbrace{Ux}_{y}=b$

$Ly=b$

$$\begin{pmatrix}1&0&0&0\\2&1&0&0\\1&3&1&0\\2&7&1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\\y_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\9\\3\end{pmatrix}$$

PS

$y_1=0$

$0+y_2=0\Rightarrow y_2=0$

$0+0+y_3=9\Rightarrow y_3=9$

$0+0+9+y_4=3\Rightarrow y_4=-6$

$$y=\begin{pmatrix}0\\0\\9\\-6\end{pmatrix}$$

$U\cdot x=y$

$$\begin{pmatrix}1&3&-2&1\\0&-1&1&1\\0&0&1&-6\\0&0&0&6\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\9\\-6\end{pmatrix}$$

ZS

$x_4=-1$

$x_3+6=9\Rightarrow x_3=3$

$-x_2+3-1=0\Rightarrow x_2=2$

$x_1+6-6-1=0\Rightarrow x_1=1$

$$x=\begin{pmatrix}1\\2\\3\\-1\end{pmatrix}$$

Př: Metodou sečen řešte $x^3-x-1=0$ $\quad x\in\langle 1;2\rangle$ $\quad \varepsilon=0{,}01$

IV: $$x_{k+1}=x_k-f(x_k)\,\frac{x_k-x_{k-1}}{f(x_k)-f(x_{k-1})}$$

$A-C\,\frac{A-B}{C-D}$ $\qquad A^3-A-1$ $\qquad B^3-B-1$ $\qquad E-A$

x_{k+1}	x_k	x_{k-1}	$f(x_k)$	$f(x_{k-1})$	ε
$1{,}1\overline{6}$ E	1 A	2 B	−1 C	5 D	$0{,}1\overline{6}$ ✗
1,395604396 E	$1{,}1\overline{6}$ A	1 B	−0,5882 C	−1 D	0,23 ✗
1,313656661 E	1,395604396 A	$1{,}1\overline{6}$ B	0,32 C	−0,58 D	0,082 ✗
1,324016115 E	1,313656661 A	1,395604396 B	−0,05 C	0,32 D	0,0104 ✗
1,32472521 E	1,324016115 A	1,313656661 B	−0,002 C	−0,05 D	0,00071 ✓

$\bar{x}=1{,}32\pm 0{,}01$

Řešení soustav rovnic metodou LU rozkladu

$$Ax = b$$

$$\underbrace{LU \cdot x}_{y} = b \Rightarrow \quad \alpha)\ L \cdot y = b \quad \text{přímý chod}$$

$$\beta)\ U \cdot x = y \quad \text{zpětný chod}$$

Př.:
$$2x_1 + 4x_2 - x_3 = -5$$
$$x_1 + x_2 - 3x_3 = -9$$
$$4x_1 + x_2 + 2x_3 = 9$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

(Doolittle $\rightarrow l_{11} = l_{22} = l_{33} = 1$) (Crout $\rightarrow u_{11} = u_{22} = u_{33} = 1$)

apl. Crouta

$$\begin{pmatrix} 2 & 4 & -1 \\ 1 & 1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -7 & 43/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

post. násobení:
$$2 = l_{11}$$
$$4 = l_{11} \cdot u_{12} \Rightarrow u_{12} = 2$$
$$-1 = l_{11} \cdot u_{13} \Rightarrow u_{13} = -1/2$$
$$1 = l_{21}$$
$$1 = l_{21} \cdot u_{12} + l_{22} \Rightarrow l_{22} = 1 - 1 \cdot 2 = -1$$
$$-3 = l_{21} \cdot u_{13} + l_{22} \cdot u_{23} \Rightarrow u_{23} = (-3 - 1 \cdot (-1/2)) : (-1) = 5/2$$
$$4 = l_{31}$$
$$1 = l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \Rightarrow l_{32} = 1 - 4 \cdot 2 = -7$$
$$2 = l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + l_{33} \Rightarrow l_{33} = 2 - 4(-1/2) - (-7) \cdot 5/2 = 43/2$$

$$L \cdot y = b$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 4 & -7 & 43/2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -9 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$2y_1 = -5 \Rightarrow y_1 = -5/2$$
$$y_1 - y_2 = -9 \Rightarrow y_2 = 13/2$$
$$4y_1 - 7y_2 + 43/2\, y_3 = 9 \Rightarrow y_3 = 3$$

$$U \cdot x = y$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -1/2 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/2 \\ 13/2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = 3$$
$$x_2 + 5/2\, x_3 = 13/2 \Rightarrow x_2 = -1$$
$$x_1 + 2x_2 - 1/2\, x_3 = 3 \Rightarrow x_1 = 1$$

$$\underline{x = (1; -1; 3)^T}$$

Hledání inverzní matice pomocí LU rozkladu

Př: Pomocí LU rozkladu nalezněte A^{-1} k matici $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} = \overset{L}{\begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix}} \overset{U}{\begin{pmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = \overset{L}{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 1/2 \end{pmatrix}} \cdot \overset{U}{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$$

aplikujeme Crouta

$l_{11} \cdot 1 = 1 \quad l_{11} = 1$

$l_{11} \cdot u_{12} = 1 \quad u_{12} = 1$

$l_{11} \cdot u_{13} = 1 \quad u_{13} = 1$

$l_{21} \cdot 1 = 2 \quad l_{21} = 2$

$l_{21} \cdot u_{12} + l_{22} = 4$

$2 \cdot 1 + l_{22} = 4 \quad l_{22} = 2$

$l_{21} \cdot u_{13} + l_{22} \cdot u_{23} = 5$

$2 \cdot 1 + 2 \cdot u_{23} = 5$

$u_{23} = \frac{3}{2}$

$l_{31} \cdot 1 = 6 \quad l_{31} = 6$

$l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} = 7$

$6 \cdot 1 + l_{32} = 7 \quad l_{32} = 1$

$l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + l_{33} = 8$

$6 \cdot 1 + 1 \cdot 3/2 + l_{33} = 8$

$l_{33} = 8 - 6 - \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$

Zk: $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 \\ 6 & 1 & 1/2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix}$

L^{-1} GEM: -2, -6

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 6 & 1 & 1/2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

-2

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1/2 & -6 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & +1 & -10 & -1 & +2 \end{array}\right)$$

$$L^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ -10 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

U^{-1} GEM

(-1) $-3/2$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3/2 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

-1

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$!\ A^{-1} = U^{-1} \cdot L^{-1}\ ! = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1/2 \\ 0 & 1 & -3/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1/2 & 0 \\ -10 & -1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 14 & 2 & -3 \\ -10 & -1 & +2 \end{pmatrix}$$

Zk $A \cdot A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 4 & 5 \\ 6 & 7 & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & -1 & 1 \\ 14 & 2 & -3 \\ -10 & -1 & +2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

GEM řešení na cvičení.

ITERAČNÍ METODY (IM)

NORMA VEKTORU: $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$

$\|\vec{a}\|_1 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ Euklidovská norma

$\|\vec{a}\|_2 = \max(|a_1|; \ldots ; |a_3|)$

$\|\vec{a}\|_3 = |a_1| + \ldots + |a_3|$

...

NORMY MATIC

A

$\|A\|_1 = \sqrt{\lambda_0}$ $\lambda_0 = \max(\underbrace{\lambda_1; \ldots ; \lambda_n}_{\text{vlastní čísla matice}})$ SPEKTRÁLNÍ NORMA

$\|A\|_2 = \max_j \left(\sum |a_{ij}|\right)$ sloupcová norma

$\|A\|_3 = \max_i \left(\sum |a_{ij}|\right)$ řádková norma

spektrální poloměr matice $\rho(A) = \max(|\lambda_1|; |\lambda_2|; \ldots ; |\lambda_n|)$

IM → $Ax = b$ → zvolíme lib. aproximaci $x^{(0)} \to x$

→ $x = Hx + h$ ⇒ $x^{(k)} = \underbrace{H}_{\text{iterační matice}} \cdot x^{(k-1)} + h$

JACOBIHO METODA A regulární, diagonálně dominantní $|a_{ii}| > \sum_{j \neq i} |a_{ij}|$

$A = D + L + U$

D diagonální
L dolní △ matice
U horní △ matice } jiné než LU!

$(D + L + U) \cdot x = b$

$Dx = -(L+U)x + b$

$x = \underbrace{-D^{-1}(L+U)}_{H} \cdot x + \underbrace{D^{-1} b}_{h}$

Metoda post. aproximací

Př: $\varepsilon = 0{,}1$

$10x_1 + x_2 = 11$ ⇒ $x_1 = 1{,}1 - 0{,}1x_2$

$x_1 + 10x_2 = -9$ ⇒ $x_2 = -0{,}9 - 0{,}1x_1$

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}1 \\ -0{,}9 \end{pmatrix}$

! diagonálně dom.!

přesné řeš.: $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

tabulka:

i	$x^{(k)T}$	$\|x^{(k-1)} - x^{(k)}\|$
0	lib $[0; 0]$	—
1	$[1{,}1; -0{,}9]$	1,42
2	$[1{,}19; -1{,}01]$	$\sqrt{0{,}09^2 + 0{,}11^2} = 0{,}13 > \varepsilon$ ✓
3	$[1{,}201; -1{,}019]$	$\sqrt{0{,}011^2 + 0{,}009^2} = 0{,}01 < \varepsilon$ ✗

GAUSS-SAIDEZOVA METODA (metoda postupných oprav)

A: symetrická, pozitivně definitní
diag. dominantní

$$(D+L+U)x = b$$
$$(D+L)x + Ux = b$$
$$(D+L)\cdot x = b - U\cdot x \quad / \cdot (D+L)^{-1}$$
$$x = \underbrace{(D+L)^{-1} b}_{h} - \underbrace{(D+L)^{-1}\cdot U}_{H}\, x$$

Př: $10x_1 + x_2 = 11 \Rightarrow x_1 = 1{,}1 - 0{,}1x_2$

$x_1 + 10x_2 = -9 \Rightarrow x_2 = -0{,}9 - 0{,}1x_1$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}1 \\ -0{,}1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1{,}1 \\ -0{,}9 \end{pmatrix}$$

pro výpočet tohoto už využívám x_1 z této aproximace (ne z minulé!) $\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & -0{,}1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{k} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -0{,}1 & 0 \end{pmatrix}}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{k+1} + \begin{pmatrix} 1{,}1 \\ -0{,}9 \end{pmatrix}$$

protože x_1 už znám z $k+1$ iterace

tabulka:

i	$x^{(k)T}$	$\lVert x^{(k-1)} - x^{(k)} \rVert$	
0	lib $[0;0]$	—	
1	$[1{,}1;\ -1{,}01]$	$\sqrt{1{,}1^2 + 1{,}01^2} = 1{,}49$	✓
2	$[1{,}201;\ -1{,}0201]$	$\sqrt{0{,}101^2 + 0{,}0101^2} = 0{,}1$	×

Nemůžeme obecně říct, která metoda konverguje rychleji

Výpočet determinantu matice pomocí LU rozkladu

$$\det(A) = \det(L) \cdot \det(U)$$

Př:

$$\begin{vmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & 11/13 & 1 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 0 & 13/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 64/13 \end{vmatrix} = 1 \cdot \cancel{4} \cdot \frac{\cancel{13}}{\cancel{4}} \cdot \frac{64}{\cancel{13}} = \underline{\underline{64}}$$

$$\begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 3 & 1 & -2 \\ 1 & 2 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3/4 & 1 & 0 \\ 1/4 & 11/13 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 4 & -3 & -2 \\ 0 & 13/4 & -1/2 \\ 0 & 0 & 64/13 \end{pmatrix}$$

$4 = u_{11}$ $\qquad 3 = l_{21} \cdot u_{11} \Rightarrow l_{21} = 3/4$

$-3 = u_{12}$ $\qquad 1 = l_{21} \cdot u_{12} + u_{22} \Rightarrow u_{22} = 1 + 3/4 \cdot (3) = 13/4$

$-2 = u_{13}$ $\qquad -2 = l_{21} \cdot u_{13} + u_{23} \Rightarrow u_{23} = -2 - 3/4(-2) = -2 + \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}$

$1 = l_{31} \cdot u_{11} \Rightarrow l_{31} = \frac{1}{4}$

$2 = l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot u_{22} = 1/4 \cdot (-3) + l_{32} \cdot 13/4 \Rightarrow l_{32} = \frac{11}{13}$

$4 = l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + u_{33} \Rightarrow u_{33} = 4 - \frac{1}{4}(-2) - \frac{11}{13}\left(-\frac{1}{2}\right) = 4 + \frac{1}{2} + \frac{11}{26} = \frac{64}{13}$

LU rozklad pro větší matice (algoritmicky)

$A = L\cdot U$ cyklus pro $R=1$ to n step 1 do

pro $J=R$ to n step 1 do

$$u_{RJ} = a_{RJ} - \sum_{S=1}^{R-1} l_{RS}\cdot u_{SJ}$$

pro $I=R+1$ to n step 1 to

$$l_{IR} = \frac{1}{u_{RR}}\left[a_{IR} - \sum_{S=1}^{R-1} l_{IS}\cdot u_{SR}\right]$$

Př: $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 6 & 2 & 1 & 1 \\ 7 & 5 & 7 & 2 & 0 \\ 0 & 6 & 4 & 2 & 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 & 0 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 & 0 & 0 \\ l_{41} & l_{42} & l_{43} & 1 & 0 \\ l_{51} & l_{52} & l_{53} & l_{54} & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} & u_{14} & u_{15} \\ 0 & u_{22} & u_{23} & u_{24} & u_{25} \\ 0 & 0 & u_{33} & u_{34} & u_{35} \\ 0 & 0 & 0 & u_{44} & u_{45} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & u_{55} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & 2/3 & 1 & 0 & 0 \\ 7 & 3 & 5/8 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1/4 & -38/49 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 1 & 2 \\ 0 & -3 & -3 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & -8 & -5/3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 49/24 & -15/8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 88/45 \end{pmatrix}$

$r=1$
$j=1:\ u_{11} = a_{11} = 1$
$j=2:\ u_{12} = a_{12} = 2$
$j=3:\ u_{13} = a_{13} = 3$
$j=4:\ u_{14} = a_{14} = 1$
$j=5:\ u_{15} = a_{15} = 2$
$i=2\quad l_{21} = \frac{1}{u_{11}}\cdot a_{21} = 2$
$i=3\quad l_{31} = 1/u_{11}\cdot a_{31} = 4$
$i=4\quad l_{41} = 7$
$i=5\quad l_{51} = 0$

$r=2$
$j=2:\ u_{22} = a_{22} - l_{21}\cdot u_{12} = 1-(2\cdot 2) = -3$
$j=3:\ u_{23} = a_{23} - l_{21}\cdot u_{13} = 3-(2\cdot 3) = -3$
$j=4:\ u_{24} = a_{24} - l_{21}\cdot u_{14} = 0-(2\cdot 1) = -2$
$j=5:\ u_{25} = a_{25} - l_{21}\cdot u_{15} = 1-(2\cdot 2) = -3$
$i=3\quad l_{32} = \frac{1}{u_{22}}\left[a_{32} - l_{31}\cdot u_{12}\right] = \frac{1}{-3}\left[6-4\cdot 2\right] = \frac{2}{3}$
$i=4\quad l_{42} = \frac{1}{u_{22}}\left[a_{42} - l_{41}\cdot u_{12}\right] = -1/3\left[5-7\cdot 2\right] = 3$
$i=5\quad l_{52} = \frac{1}{u_{22}}\left[a_{52} - l_{51}\cdot u_{12}\right] = 1/3\left[6-0\cdot 2\right] = -2$

$r=3$
$j=3\quad u_{33} = a_{33} - \sum_{S=1}^{2} l_{3S} u_{S3} = a_{33} - (l_{31}u_{13} + l_{32}\cdot u_{23}) = 2-(4\cdot 3 + 2/3(-3)) = 2-12+2 = -8$
$j=4\quad u_{34} = a_{34} - \sum_{S=1}^{2} l_{3S}\cdot u_{S4} = a_{34} - (l_{31}\cdot u_{14} + l_{32}u_{24}) = 1-(4\cdot 1 + \frac{2}{3}(-2)) = 1-4+\frac{4}{3} = -\frac{5}{3}$
$j=5\quad u_{35} = a_{35} - \sum_{S=1}^{2} l_{3S}\cdot u_{S5} = a_{35} - (l_{31}u_{15} + l_{32}u_{25}) = 1-(4\cdot 2 + \frac{2}{3}\cdot(-3)) = 1-8+2 = -5$
$i=4\quad l_{43} = \frac{1}{u_{33}}\left[a_{43} - \sum_{S=1}^{2} l_{4S}\cdot u_{S3}\right] = \frac{1}{u_{33}}\left[a_{43} - (l_{41}\cdot u_{13} + l_{42}\cdot u_{23})\right] = \frac{1}{-8}\left[7-(7\cdot 3 + 3\cdot(-3))\right] = \frac{5}{8}$
$i=5\quad l_{53} = \frac{1}{u_{33}}\left[a_{53} - \sum_{S=1}^{2} l_{5S}\cdot u_{S3}\right] = \frac{1}{u_{33}}\left[a_{53} - (l_{51}u_{13} + l_{52}\cdot u_{23})\right] = \frac{1}{-8}\left[4-(0\cdot 3 + (-2)\cdot(-3))\right] = \frac{1}{4}$

$r=4$
$j=4\quad u_{44} = a_{44} - \sum_{S=1}^{3} l_{4S}u_{S4} = a_{44} - (l_{41}u_{14} + l_{42}u_{24} + l_{43}\cdot u_{34}) = 2-(7\cdot 1 + 3(-2) + \frac{5}{8}(-\frac{5}{3})) = \frac{49}{24}$
$j=5\quad u_{45} = a_{45} - (l_{41}u_{15} + l_{42}u_{25} + l_{43}\cdot u_{35}) = 0-(7\cdot 2 + 3(-3) + \frac{5}{8}(-5)) = -\frac{15}{8}$
$i=5\quad l_{54} = \frac{1}{u_{44}}\left[a_{54} - \sum_{S=1}^{3} l_{5S}\cdot u_{S4}\right] = \frac{1}{u_{44}}\left[a_{54} - (l_{51}u_{14} + l_{52}u_{24} + l_{53}u_{34})\right] = \ldots = -\frac{38}{49}$

$r=5$
$j=5\quad u_{55} = a_{55} - \sum_{S=1}^{4} l_{5S}\cdot u_{S5} = a_{55} - (l_{51}\cdot u_{15} + l_{52}u_{25} + l_{53}\cdot u_{35} + l_{54}\cdot u_{45}) = \ldots = \frac{88}{49}$

$\det(A) = 1\cdot 1\cdot(-3)\cdot(-8)\cdot\frac{49}{24}\cdot\frac{88}{49} = \underline{\underline{88}}$

A^{-1} DO DO ..

Př 1: Řešte soustavu metodou LUR

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 - x_3 &= 3 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 &= 0 \\ -x_1 - 2x_2 + x_3 &= -5 \end{aligned}$$

1. Ověříme předpoklad věty 2

$\det A_1 = |1| = 1$

$\det A_2 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} = -3$ } platí

$\det A_3 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{vmatrix} = \cancel{-1} \cancel{-3} \cancel{+1} + 1 + 6 - 2 = 5$

2. LU rozklad matice A $LU = A$

Doolittle:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ l_{21} & 1 & 0 \\ l_{31} & l_{32} & 1 \end{pmatrix}}_{L} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}}_{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

násobíme: $1 \cdot u_{11} = 1$

$l_{21} \cdot u_{11} = 2 \Rightarrow l_{21} = 2$

$l_{31} \cdot u_{11} = -1 \Rightarrow l_{31} = -1$

$u_{12} = 1$

$l_{21} \cdot u_{12} + u_{22} = -1$

$2 \cdot 1 + u_{22} = -1 \Rightarrow u_{22} = -3$

$l_{31} \cdot u_{12} + l_{32} \cdot u_{22} = -1$

$-1 \cdot 1 + l_{32} \cdot (-3) = -2 \Rightarrow l_{32} = 1/3$

$1 \cdot u_{13} = -1$

$l_{21} \cdot u_{13} + u_{23} = 3$

$2 \cdot (-1) + u_{23} = 3 \Rightarrow u_{23} = 5$

$l_{31} \cdot u_{13} + l_{32} \cdot u_{23} + u_{33} = 1$

$(-1) \cdot (-1) + 1/3 \cdot 5 + u_{33} = 1 \Rightarrow u_{33} = \cancel{1} \cancel{-1} - \frac{5}{3}$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1/3 & 1 \end{pmatrix}}_{L} \underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -5/3 \end{pmatrix}}_{U} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$$

3. Řešíme soustavu $L \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$y_1 = 3$

$2y_1 + y_2 = 0 \quad y_2 = -6$

$-y_1 + 1/3 \cdot y_2 + y_3 = -5$

$-3 + \frac{1}{3}(-6) + y_3 = -5$

$-3 - 2 + y_3 = -5 \Rightarrow y_3 = 0$

$$y = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

4. Řešíme soustavu $U \cdot x = y$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & -5/3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-\frac{5}{3} x_3 = 0$

$x_3 = 0$

$-3x_2 + 5x_3 = -6$

$-3x_2 + 0 = -6$

$x_2 = 2$

$x_1 + x_2 - x_3 = 3$

$x_1 + 2 - 0 = 3$

$x_1 = 1$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 2: GEM řeší soustavu z př. 1.

$$(A|b) = (A^{(0)}|b^{(0)}) = \begin{array}{c} \\ -2 \\ 1 \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 3 & 0 \\ -1 & -2 & 1 & -5 \end{array}\right) \sim$$

vedoucí prvek $a_{11}^{(0)} = 1$

eliminace $a_{21}^{(0)} = 2 \Rightarrow$

$\Rightarrow$ multiplikátor $l_{21} = \frac{a_{21}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = 2$

$l_{31} = \frac{a_{31}^{(0)}}{a_{11}^{(0)}} = -1$

$$\sim \begin{array}{c} \\ (:-3) \\ \\ \end{array}\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & -3 & 5 & -6 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5/3 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -2 \end{array}\right)$$

$(A^{(1)}|b^{(1)})$

vedoucí prvek $a_{22}^{(1)} = 1$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & -5/3 & 2 \\ 0 & 0 & -5/3 & 0 \end{array}\right)$$

$(A^{(2)}|b^{(2)})$

zpětný chod

$-\frac{5}{3} x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = 0$

$x_2 - \frac{5}{3} x_3 = 2 \Rightarrow x_2 = 2$

$x_1 + x_2 - x_3 = 3$

$x_1 + 2 - 0 = 3 \Rightarrow x_1 = 1$

$$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Příklad 3: S přesností $\varepsilon = 10^{-7}$ řešte Jacobiho metodou systém
$\varepsilon = 0{,}1$

$$10x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5$$
$$2x_1 + 12x_2 - 8x_3 = 3$$
$$4x_1 + 3x_2 - 16x_3 = -1$$

s poč. aproximací $x^{(0)} = (1,1,1)^T$

1. ověříme diagonální dominantnost matice A $\begin{pmatrix} 10 & -3 & 4 \\ 2 & 12 & -8 \\ 4 & 3 & -16 \end{pmatrix}$

zřejmé

2. Jacobiho metoda

a) z 1. rce vyj. $x_1 = \frac{1}{10}(5 - 0x_1 + 3x_2 - 4x_3) = \frac{1}{2} - 0x_1 + \frac{3}{10}x_2 - \frac{2}{5}x_3$

z 2. rce vyj. $x_2 = \frac{1}{12}(3 - 2x_1 - 0x_2 + 8x_3) = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}x_1 - 0x_2 + \frac{2}{3}x_3$

z 3. rce vyj. $x_3 = -\frac{1}{16}(-1 - 4x_1 - 3x_2 - 0x_3) = \frac{1}{16} + \frac{1}{4}x_1 + \frac{3}{16}x_2 - 0x_3$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{3}{10} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{1}{6} & 0 & \frac{2}{3} \\ \frac{1}{4} & \frac{3}{16} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(k)} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 1/16 \end{pmatrix}$$

b) $A = D + L + U = \underbrace{\begin{pmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 12 & 0 \\ 0 & 0 & -16 \end{pmatrix}}_{D} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}}_{L} + \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 0 & 0 & -8 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{U}$

$x^{(k+1)} = Hx^{(k)} + h$

$$H = -D^{-1}(L+U) = -\underbrace{\begin{pmatrix} 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & -1/16 \end{pmatrix}}_{D^{-1}} \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & -3 & 4 \\ 2 & 0 & -8 \\ 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}}_{L+U} = \begin{pmatrix} 0 & 3/10 & -2/5 \\ -1/6 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 3/16 & 0 \end{pmatrix}$$

$$h = D^{-1} b = \begin{pmatrix} 1/10 & 0 & 0 \\ 0 & 1/12 & 0 \\ 0 & 0 & -1/16 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 1/16 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(k+1)} = \begin{pmatrix} 0 & 3/10 & -2/5 \\ -1/6 & 0 & 2/3 \\ 1/4 & 3/16 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{(k)} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 1/16 \end{pmatrix}$$

3. Výpočet uspořádáme do tabulky $\varepsilon = 0{,}1$

i	$[x^{(i)}]^T$	$\|x^{(i)} - x^{(i-1)}\|$
0	[1; 1; 1]	
1	[0,4; 0,75; 0,5]	0,820061 $\sqrt{(0{,}4-1)^2+(0{,}75-1)^2+(0{,}5-1)^2}$
2	[0,525; 0,516; 0,303125]	0,329892725 ✓
3	[0,53375; 0,364583; 0,250625]	0,152846827 ✓
4	[0,493125; 0,354752; 0,264297]	0,049390662 ×

Příklad 4: S přesností $\varepsilon = 10^{-1} = 0{,}1$ řešte GSM systém z př. 3

$$10x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 5$$
$$2x_1 + 12x_2 - 8x_3 = 3$$
$$4x_1 + 3x_2 - 16x_3 = -1$$

s poč. apr. $x^{(0)} = (1; 1; 1)^T$

ŘJ a)

$$x_1 = \frac{1}{2} - 0x_1 + \frac{3}{10}x_2 - \frac{2}{5}x_3$$
$$x_2 = \frac{1}{4} - \frac{1}{6}x_1 - 0x_2 + \frac{2}{3}x_3$$
$$x_3 = \frac{1}{16} + \frac{4}{4}x_1 + \frac{3}{16}x_2 - 0x_3$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{matrix} \frac{1}{2} + \frac{3}{10}x_2^{(k)} - \frac{2}{5}x_3^{(k)} \\ \frac{1}{4} - \frac{1}{6}x_1^{(k+1)} + \frac{2}{3}x_3^{(k)} \\ \frac{1}{16} + \frac{1}{4}x_1^{(k+1)} + \frac{3}{16}x_2^{(k+1)} \end{matrix}$$

Výpočet uspořádáme do tabulky

i	$[x^{(i)}]^T$	$\|x^{(i)} - x^{(i-1)}\|$
0	[1; 1; 1]	
1	[0,4; 0,85; 0,321875]	0,917798 ✓
2	[0,62625; 0,360208; 0,286602]	0,540675 ✓
3	[0,493422; 0,358831; 0,253136]	0,136986 ✓
4	[0,506395; 0,334358; 0,251791]	0,027731 ×

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{k+1} = \begin{pmatrix} 0 & 3/10 & -2/5 \\ 0 & 0 & 4/3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{k} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -1/6 & 0 & 0 \\ 1/4 & 3/16 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}^{k+1} + \begin{pmatrix} 1/2 \\ 1/4 \\ 1/16 \end{pmatrix}$$

ITERAČNÍ VZTAH