IAMAP, PAMAb přednáška, cvičení

NUMERICKÉ ŘEŠENÍ ROVNIC

→ nalézt všechny nulové body fce $f(x)$ ⇒ rce $f(x)=0$

nulový bod $\bar{x}$; $f(\bar{x})=0$ kořen

→ vzorce pro řešení rovnic pouze do 4. stupně (i použití vzorců je někdy problém)

1\. ETAPA: <u>Separace kořenů</u> - stanovení co nejkratších intervalů, ve kterých leží právě jeden kořen (obecně i komplexní)

(nelze obecně algoritmizovat)

2\. ETAPA: <u>Aproximace kořenů</u> (s určitou přesností ε) - nalezení numerického řešení rce

a) číslo, které představuje přibližnou hodnotu kořene s danou přesností ε ... $\bar{x}$

b) postup, který vede k nalezení $\bar{x}$

Př: a) $f(x) = 6x^2 - 7x + 2$ hledáme nulový bod ⇒ rce $6x^2 - 7x + 2 = 0$

jednoduše nalezneme nulové body

$(2x-1)(3x-2)=0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$

$x_2 = \frac{2}{3}$

b) $g(x) = \cos 3x - \cos 7x$ ⇒ rce $\cos 3x - \cos 7x = 0$

$2 \cdot \sin(5x) \cdot \sin(2x) = 0 \Rightarrow \sin 5x = 0 \Rightarrow$ kořeny

V $\sin 2x = 0 \Rightarrow$ kořeny

jednoduše nalezneme nulové body

c) $h(x) = 14{,}3(e^{2V} - 1) + V - 12 = 0$

d) $i(x) = 3{,}24x^8 - 2{,}42x^7 + 10{,}34x^2 + 10{,}01x + 47{,}98 = 0$

e) $j(x) = \cosh(\sqrt{x^2+1} - e^x) + \ln \sin x$

→ komplikované
→ složité
→ nelze využít klasické metody řešení rovnic

→ ∃ stovky metod na hledání nulových bodů fce (půlení intervalu (bisekce), regula falsi, ...)

→ My budeme uvažovat pouze → Metoda prosté Iterace (MPI)
→ Newtonova Metoda (NM)
→ Metoda sečen (tětiv) (MS)

Teoretický úvod ke všem metodám:

→ $\langle a;b \rangle$ interval separace (IS)

→ numerický výpočet $\bar{x}$ spočívá v konstrukci posloupnosti $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ takové, že $\lim_{n\to\infty} x_n = \bar{x}$

→ numerické řešení → takový člen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, pro který platí $|x_k - \bar{x}| < \varepsilon$

ε... předem daná přesnost

→ efektivita každé metody je dána rychlostí konvergence

→ <u>kontraktivní zobrazení</u>: • Nechť zobrazení φ zobrazuje interval $\langle a;b \rangle$ sám do sebe. [$\varphi: \langle a;b \rangle \to \langle a;b \rangle$]
Jestliže existuje číslo $k \in (0;1)$ takové, že pro každou dvojici čísel $x_1 \neq x_2$ z intervalu $\langle a;b \rangle$ platí: $|\varphi(x_1) - \varphi(x_2)| \leq k \cdot |x_1 - x_2|$.
Pak se zobrazení φ nazývá kontraktivní.

→ <u>Banachova věta o pevném bodě</u> → poskytuje teoretický základ
→ udává postačující podmínku pro existenci pevného bodu zobrazení φ
($\varphi(\bar{x}) = \bar{x}$) ... pevný bod = kořen.

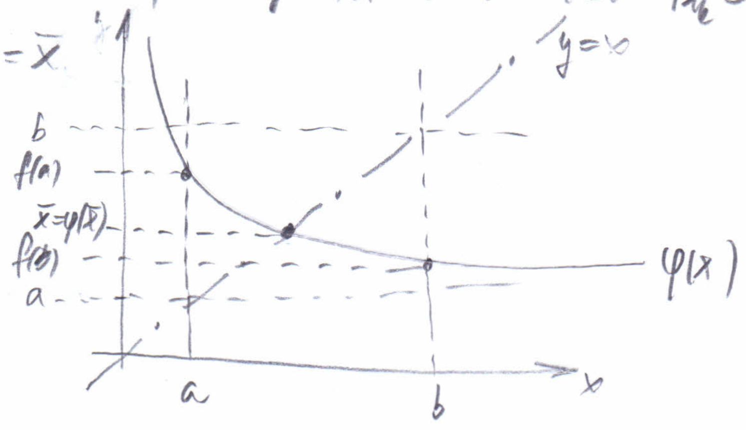
• Pokud je zobrazení $\varphi(x)$ kontraktivní v $\langle a;b \rangle$. Pak existuje jediný pevný bod $\bar{x}$ zobrazení $\varphi(x)$ v intervalu $\langle a;b \rangle$.

→ kontraktivnost zobrazení $\varphi(x)$ znamená, že vzdálenost obrazů je menší, než vzdálenost vzorů. Je podstatná pro existenci pevného bodu zobrazení

→ kritérium pro zastavení výpočtu: $|\bar{x} - x_k| \leq \frac{k^k}{1-k} |x_1 - x_0|$

• je složité, v praxi stačí hlídat $|x_k - x_{k-1}| < \varepsilon$

→ Obr. $\varphi(\bar{x}) = \bar{x}$



$|\varphi(a) - \varphi(b)| < k|a-b|$

$k \in (0;1)$

1. Metoda Prosté Iterace (MPI)

→ $f(x) = 0$ volíme $x_0 \in \langle a;b \rangle$

→ hledáme kontraktivní zobrazení $x_{k+1} = \varphi(x_k)$

→ Stanovení $\varphi(x)$ není jednoznačné → vždy je více možností

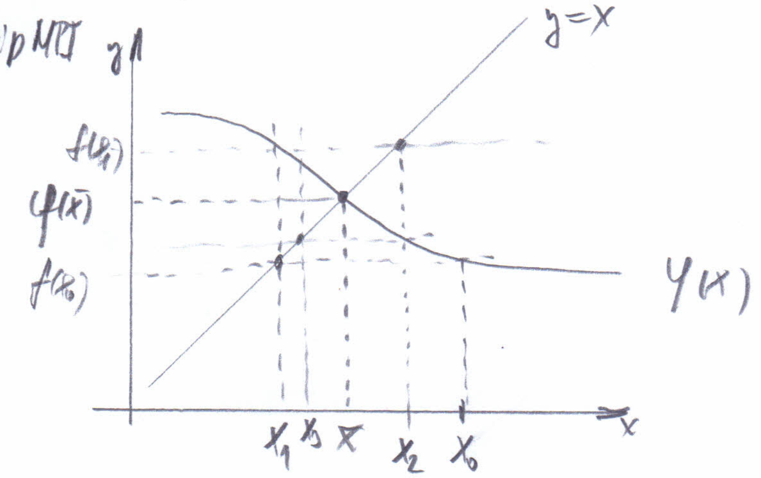
→ vždy ale nutné kontrolovat kontrakci

→ možnosti $f(x) = 0 \quad / +x$

$$\underbrace{f(x)+x}_{\varphi(x)} = x \Rightarrow \boxed{x_{k+1} = \varphi(x_k)}$$

→ další možnost, jak ověřit kontraktivitu: $\langle a;b \rangle\ \exists q<1;\ |f'(x)| < q\ \forall x \in \langle a;b \rangle$

Princip MPI



Př: $x^3 + x - 1000 = 0$ IS $\langle 9;10 \rangle$

Stanovení $\varphi(x)$ a ověření K: 1. $x = 1000 - x^3$ $\langle 9;10 \rangle \curvearrowright \langle 0;271 \rangle$

$x = \varphi(x)$ $\varphi_1(x_k) = 1000 - x_k^3$ $|10-9| = 1$ $|271-0| = 271$

Výpočet: $x_0 = 10$ volím

není K $\varphi_1'(x) = -3x^2$ v $\langle 9;10 \rangle$ není menší 1

→ $x_1 = \varphi_2(x_0) = 9{,}9665549\,34$

2. $x = \sqrt[3]{1000 - x}$ $\langle 9;10 \rangle \curvearrowright \langle 9{,}96; 9{,}969 \rangle$

$x_2 = \varphi_2(x_1) = 9{,}966667166$

$\varphi_2(x_k) = \sqrt[3]{1000 - x_k}$ $\varphi_2'(x) = -\frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(1000-x)^2}}$ určitě je <1 $\forall x \in \langle 9;10 \rangle$

$x_3 = \varphi_2(x_2) = 9{,}966666789$

je K

$x_4 = \varphi(x_3) = 9{,}966666791$

$x_5 = \varphi(x_4) = 9{,}966666791$] stejné ⇒ x_4 je PB zobrazení $\varphi_2(x)$ a tedy kořen rce.

Př: $x^3 - x - 1 = 0$ IS $\langle 1;2\rangle$

1. $\varphi_1(x_k): x_{k+1} = x_k^3 - 1$ $\langle 1;2\rangle \curvearrowright \langle 0;7\rangle$ není k
$\varphi_1'(x) = 3x^2$ na $\langle 1;2\rangle$ není menší než 1

2. $\varphi_2(x_k): x_{k+1} = \sqrt[3]{x+1}$ $\langle 1;2\rangle \cap \langle 1{,}2599; 1{,}4422\rangle$ je k
$\varphi_2'(x) = \frac{1}{3}\frac{1}{\sqrt[3]{(x+1)^2}}$ $\forall x \in \langle 1;2\rangle < 1$

Výpočet: $x_0 = 1$ volím

$\rightarrow x_1 = \varphi_2(x_0) = 1{,}259\ 921\ 05$ 1PČ
$\rightarrow x_2 = \varphi_2(x_1) = 1{,}312\ 293\ 837$ 2PČ
$\rightarrow x_3 = \varphi_2(x_2) = 1{,}322\ 353\ 819$ 3PČ
$\rightarrow x_4 = \varphi_2(x_3) = 1{,}324\ 268\ 745$ 4PČ
$\rightarrow x_5 = \varphi_2(x_4) = 1{,}324\ 632\ 625$ 4PČ
$\rightarrow x_6 = \varphi_2(x_5) = 1{,}324\ 701\ 749$ 5PČ
$\rightarrow x_7 = \varphi_2(x_6) = 1{,}324\ 714\ 878$ pomalá konvergence

OBECNÁ METODA VÝPOČTU KOEFICIENTU KONTRAKCE

$x \in \langle a;b\rangle$ $f(x) = 0 \Rightarrow \varphi(x) = x$ $x_{k+1} = \varphi(x_k)$

předpokládáme, že $f(x)$ je diferencovatelná na $\langle a;b\rangle$ a platí

$0 < c \leq f'(x) \leq d$ $\forall x \in \langle a;b\rangle$ {na $\langle a;b\rangle$ je derivace ohraničená}

$f(x) = 0 \quad | + x$

$f(x) + x = x \Rightarrow x = x - \lambda f(x)$

↳ λ určíme tak, aby $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$ byla k

$\varphi(x) = x - \lambda f(x)$

$\varphi'(x) = 1 - \lambda \cdot f'(x) \Rightarrow |\varphi'(x)| \leq k < 1$

kaž AM: $1 - k \leq \lambda \cdot c \leq \lambda \cdot f'(x) \leq \lambda d \leq 1 + k$ max:

$$\begin{aligned} 1 - k &= \lambda \cdot c \\ 1 + k &= \lambda \cdot d \\ \hline 2 &= \lambda(c+d) \\ \lambda &= \frac{2}{c+d} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \lambda = \frac{2}{c+d}$

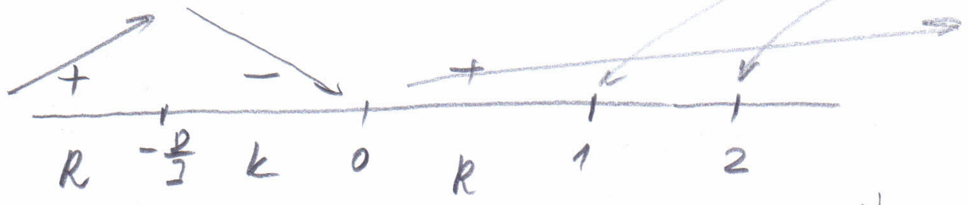
$\Rightarrow$ Iterační vztah: $x_{k+1} = x_k - \frac{2}{c+d} \cdot f(x_k)$

$c \ldots \min f'(x)$ na $\langle a;b\rangle$
$d \ldots \max f'(x)$ na $\langle a;b\rangle$

Př Řešte numericky MPI rci: $x^3+4x^2-10=0$ na intervalu $\langle 1;2\rangle$ s přesností $\varepsilon = 10^{-4}$. kolik iterací je potřeba provést. Zaokr. na 6DM

$f(x) = x^3+4x^2-10$

$f'(x) = 3x^2+8x = 3x\left(x+\frac{8}{3}\right)$ nulové body jsou 0 a $-\frac{8}{3}$



derivace v intervalu $\langle 1;2\rangle$ jen roste $\Rightarrow f'(1) = 11$ je min

$\Rightarrow f'(2) = 28$ je max

$\Rightarrow \lambda = \frac{2}{11+28} = \frac{2}{39} \Rightarrow$ IV: $x_{k+1} = x_k - \frac{2}{39}\left(x_k^3+4x_k^2-10\right)$

IV kalk.: $x_{k+1} = A - \frac{2}{39}\left(A^3+4A^2-10\right)$

$x_0 = 1,5$ volím	$\to A$	$\lvert x_{k+1}-x_k\rvert$ $(B-A)$
$x_1 = \varphi(x_0) = 1,378205$	$\to B$ $\to B \to A$	$0,121795 \nless \varepsilon$
$x_2 = \varphi(x_1) = 1,367147$	$\to B$ $\to B \to A$	$0,011058 \nless \varepsilon$
$x_3 = \varphi(x_2) = 1,365521$	$\to B$ $\to B \to A$	$0,001625 \nless \varepsilon$
$x_4 = \varphi(x_3) = 1,365275$	$\to B$ $\to B \to A$	$0,000246 \nless \varepsilon$
$x_5 = \varphi(x_4) = 1,365237$	$\to B$	$0,000038 < \varepsilon$

5 iterací $\tilde{x} = 1,3652$ s přesností $0,0001$

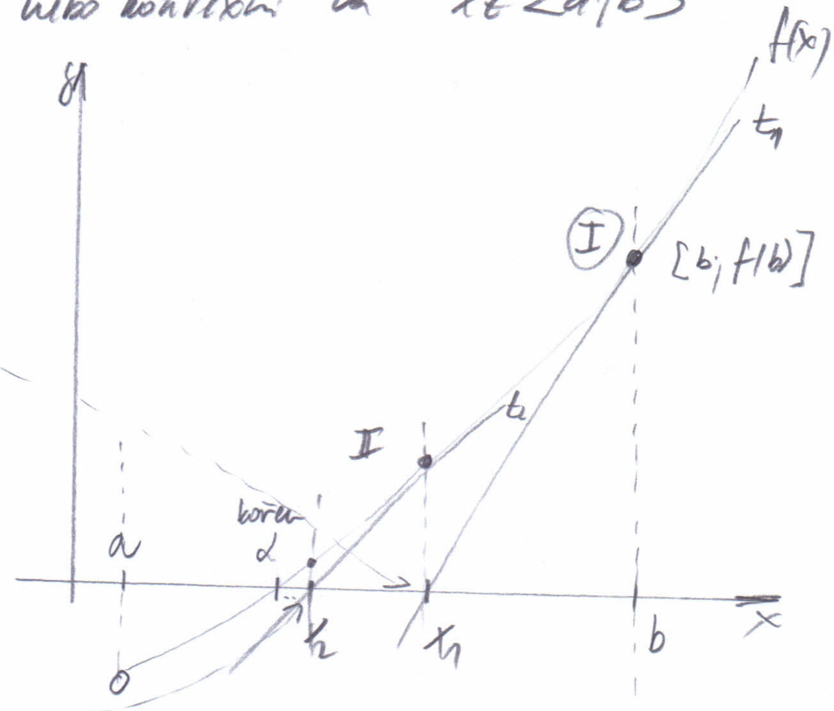
$x \in (1,3651;\ 1,3653)$

NEWTONOVA METODA TEČEN (NMT)

→ nejznámější, nejpoužívanější, zpravidla nejefektivnější

→ fce musí být konkávní nebo konvexní na $x \in \langle a;b\rangle$

Základní myšlenka:



$x_0 = b$

$t_1: y - f(b) = f'(b)(x-b)$

$t_1 \cap o_x: \quad [x_1;0]$

$-f(b) = f'(b)(x_1-b)$

$-\frac{f(b)}{f'(b)} = x_1 - b \Rightarrow x_1 = b - \frac{f(b)}{f'(b)}$

$t_2: y - f(x_1) = f'(x_1)(x - x_1)$

$t_2 \cap o_x: \quad [x_2;0]$

$-f(x_1) = f'(x_1)(x_2 - x_1) \Rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$ $\Rightarrow$ IV: $x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}$

...... $\Rightarrow \{x_0; x_1; x_2; \dots\} \to \alpha$

→ postačující podmínka konvergence metody:

$x \in \langle a;b\rangle$ $\quad x_0 = a$; je-li $f'(x)\cdot f''(x) < 0$

$\quad x_0 = b$; je-li $f'(x)\cdot f''(x) > 0$

Př: Vypočti $\sqrt{2}$ $\quad f(x)=0 \quad \langle 1;2\rangle$

$\varepsilon = 0{,}0001$ $\quad x^2 - 2 = 0 \to f(x) = x^2 - 2$

$f'(x) = 2x$, $f''(x) = 2$ $\}$ $2x \cdot 2$ na $\langle 1;2\rangle$ je vždy >0

$\Rightarrow x_0 = 2$

IV: $x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k}$

paměť: $x_{k+1} = A - \frac{A^2-2}{2A}$

$x_0 = 2$	paměť → A	přesnost $\lvert B-A\rvert$	
$x_1 = 1{,}5$	→ B → B→A	0,5	×
$x_2 = 1{,}41667$	→ B → B→A	0,08333	×
$x_3 = 1{,}414216$	→ B → B→A	0,002451	×
$x_4 = 1{,}414214$	→ B	0,000002	✓

$\sqrt{2} = 1{,}4142$ s přesností 0,0001

$\sqrt{2} \in (1{,}4141; 1{,}4143)$

METODA SEČEN (TĚTIV)

→ NMT – nejrychlejší ale má jednu nevýhodu: musíme počítat derivaci (což může být někdy složité)

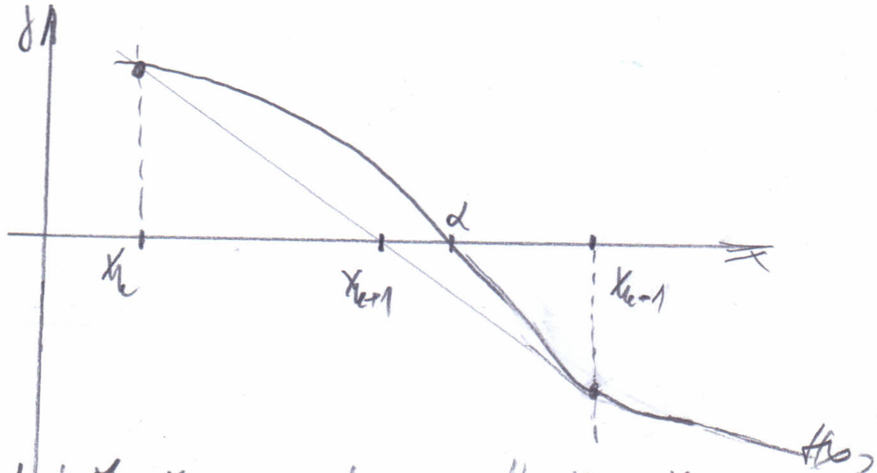
→ v iteračním vzorci NMT lze nahradit $f'(x_k)$ diferenčním podílem (= numerická derivace)

$$\Rightarrow f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

⇒ Iterační vzorec $$x_{k+1} = x_k - f(x_k)\,\frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

(derivace je ve jmenovateli, proto převrácená hodnota)

→ princip:



→ nevýhoda metody: k výpočtu x_{k+1} musíme použít x_k a x_{k-1}
(je to tzv. dvoukroková metoda; NMT, PMI jednokrokové metody)

Př: $x - \cos x = 0$ v $\langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle$ $\varepsilon = 0{,}01$ IV: $x_{k+1} = A - C\,\frac{A-B}{C-D}$ (použití)
v rad!

x_{k+1}	x_k	x_{k-1}	$f(x_k)$	$f(x_{k-1})$	ε $\lvert E-A \rvert$
0,611015 E	0 A	$\frac{\pi}{2}$ B	−1 C	1,5708 D	0,611015
0,771533 E	0,611015 A	A→B 0 B	−0,20805 C	−1 D	0,160518
0,738121 E	0,771533 A	A→B 0,611015 B	0,054691 C	−0,20805 D	0,033412
0,739078 E	0,738121 A	A→B 0,771533 B	$-1{,}61367 \cdot 10^{-3}$ C	0,054691 D	0,000957

↳ nejdříve přehodit A→B !

0,739 je kořen s přesností 0,001 $\bar{x} \in (0{,}738; 0{,}74)$

Př: NMT : $x - \cos x = 0$ $\varepsilon = 10^{-5}$ $x_0 = \frac{\pi}{4}$ určit ? PČ v 2. iteraci

! rad !

$f(x) = x - \cos x$

$f'(x) = 1 + \sin x$

IV: $x_{k+1} = x_k - \dfrac{x_k - \cos x_k}{1 + \sin x_k}$

k	x_k	$\varepsilon \, \lvert x_k - x_{k-1} \rvert$	$\lvert B - A \rvert$
0	A $\pi/4$ B	/	
1	A 0,739 536 1335 B	0,045 8620 2988	×
2	A 0,739 085 1281 B	0,0004 509 55	×
3	A 0,739 085 1032 B	0,00000004	✓
navíc 4	A 0,739 085 1032 B	pevný bod	

7PČ (0 na začátku není PČ)

→ další příklady ve skriptech !