

→ 3 základní problémy: 1. předpokládáme tabulku merných hodnot f

x	x ₀	x ₁	...	x _n
y	y ₀	y ₁	...	y _n

→ ke malíci jednoduchý a vhodný funkční předpis, tak aby hledaná funkce procházela přesu bodů $[x_i, y_i]$ ^{$i=0, \dots, n$}

2. Předpokládáme, že body z tabulky jsou sáhlé dýkami (mírné, náhodné)

→ ke malíci funkční předpis, který přiblíží vzhledu data? Pokud ano, odstraní chyby?

3. Z dané funkce f (je složité a výpočet funkčních hodnot je velmi náročný)

→ ke malíci jiné funkci g, která je jednoduchá a je odpovídající aproximaci f?

TYPY APROXIMACE

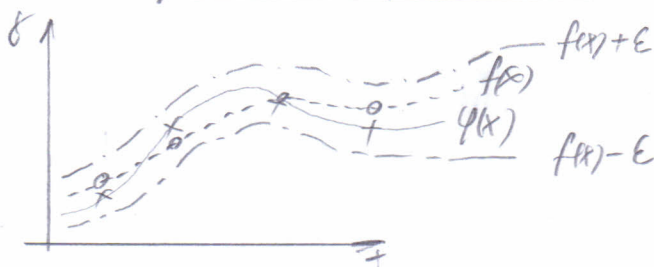
1. Interpolace → hledaná f prochází všemi body
→ bod = pol

$$\varphi(x_i) = f_i; i=0, 1, \dots, n$$

x_i	$f(x_i)$
x_0	f_0
x_1	f_1
$\vdots$	
x_n	f_n

} φ ... aproximační f

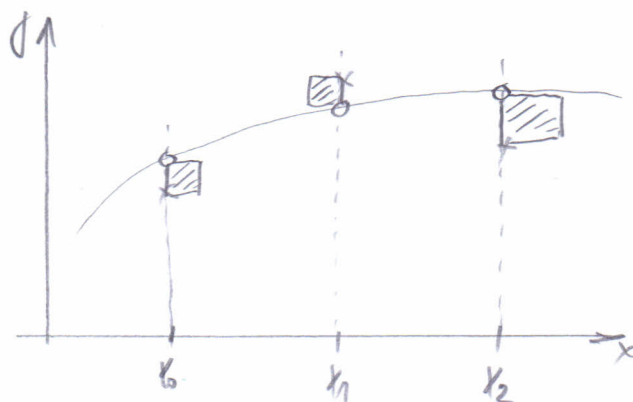
2. Stejnomořná aproximace (má jednoduché řešení)



$$\max |f(x) - \varphi(x)| \leq E$$

pro $x \in \langle x_0, x_n \rangle$

3. Metoda nejmenších čtverců



Σ obsah všech čtverců
→ min

1) Interpolace

(2)

obecná formulace úlohy

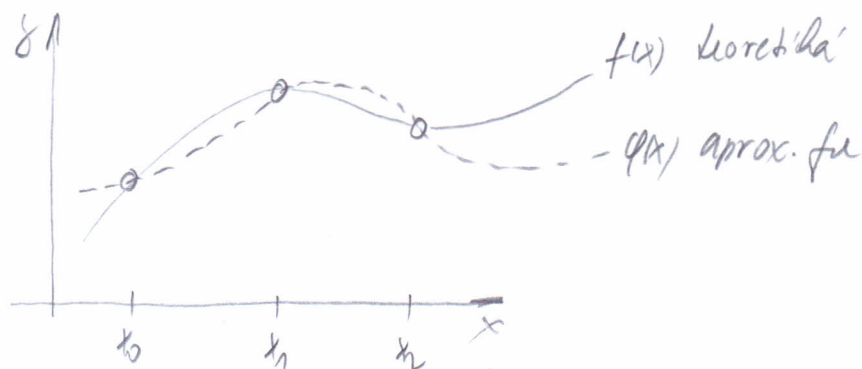
dané

x_0	f_0
x_1	f_1
$\vdots$	$\vdots$
x_n	f_n

$n+1$ hodnot

$[x_i, f_i]; i=0, \dots, n$ polý

hledáme $\varphi(x)$ tak aby $\varphi(x_i) = f_i; i=0, \dots, n$



→ vlastnosti na které je $\varphi(x)$ konstruováno o interpolaci →

- polynomiální
- splajnové
- trigonometrické
- exponenciální
- kombinované

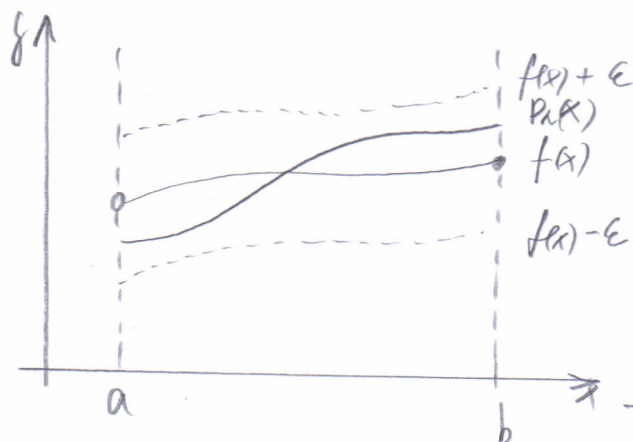
→ výsledná aproximující je u tvorby z tří aproximujících funkcí

$\varphi(x; a_0; a_1; \dots; a_n)$ x — proměnná
 $a_i, i=0, \dots, n$ koeficienty

→ například Algebraické pln: $\{x^0, x^1, x^2, \dots, x^n\} \Rightarrow P_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n$

→ snadný způsob funkcí hodnoty, I+D

WEIERSTRASSOVA VĚTA o Aproximaci



Je-li $f(x)$ spojitá na $x \in \langle a, b \rangle$
 a existuje-li $\epsilon > 0$, pak existuje
 polynom $P(x)$ definovaný na $\langle a, b \rangle$
 tak, že platí:

$$|f(x) - P(x)| < \epsilon \text{ pro každé } x \in \langle a, b \rangle$$

→ ϵ lze volit libovolně malé

Pl. UV $\rightarrow$ princip:

$\rightarrow$ soustava $n+1$ bodů $[x_i, y_i]_{i=0}^n$ hledat, že $x_i = x_j$, pak $\exists$ jediné polynom

$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$ uplyne n -tého stupně s vlastností

$$P_n(x_i) = y_i, \quad i = 0 \dots n.$$

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n$$

$$\text{bodů } [x_0, y_0] \in P_n(x) : y_0 = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \dots + a_n x_0^n$$

$$[x_1, y_1] \in P_n(x) : y_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \dots + a_n x_1^n$$

...

$$[x_n, y_n] \in P_n(x) : y_n = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \dots + a_n x_n^n$$

soustava $n+1$ rovnic o $n+1$ neznámých $(a_0, \dots, a_n)$

pro $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$

restime kramerov'skú pravidel ($a_0 = \frac{D_0}{D}, a_1 = \frac{D_1}{D}, \dots, a_n = \frac{D_n}{D}$)

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^n \\ 1 & x_1 & x_1^2 & \dots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = (x_2 - x_1)(x_3 - x_1)(x_4 - x_1) \dots (x_n - x_1) \neq 0$$

pro $x_i \neq x_j$
 $\rightarrow \exists!$ řešení

Vandermonde's determinant D

$\rightarrow$ hledat hodnoty koeficientů $\rightarrow$ spátu podniku soustava

$\rightarrow$ velká počtem hodnotů pro rostoucí n

$\rightarrow$ speciální algoritmy na konstrukci IP

LAGRANGE'V IP LIP

→ npríma konstrukcia pomoci fundamentálnych polynomi $l_i(x)$; $i=0, \dots, n$,
kteri splňujú podmienku $l_j(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{pre } i \neq j \\ 1 & \text{pre } i = j \end{cases}$

→ polynom $l_i(x)$ má korene $x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n$

$$\Rightarrow l_i(x) = G_i (x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_n) \quad \textcircled{A}$$

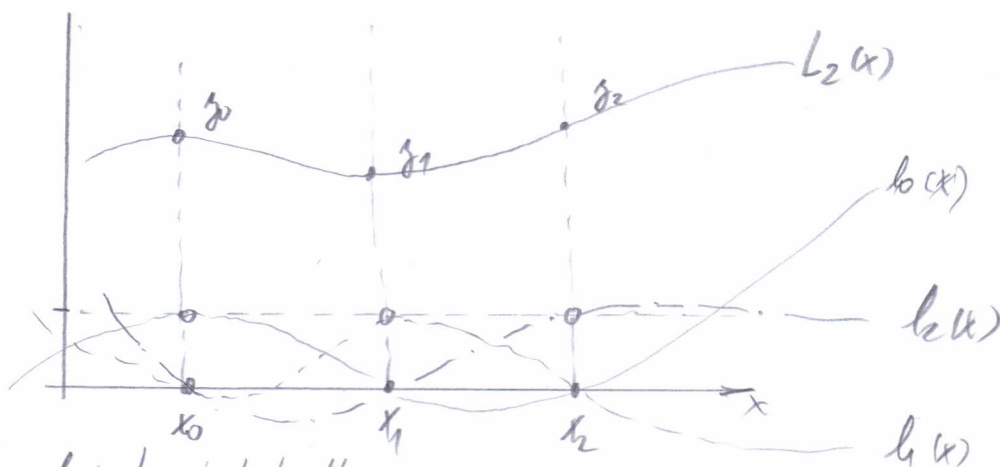
→ dosadiť $l_i(x_i) = 1 \Rightarrow 1 = G_i (x_i-x_0)(x_i-x_1) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_n)$

určíme konst. $G_i \Rightarrow G_i = \frac{1}{(x_i-x_0)(x_i-x_1) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_n)}$

→ dosadiť späť do $\textcircled{A}$: $l_i(x) = \frac{(x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{i-1})(x-x_{i+1}) \dots (x-x_n)}{(x_i-x_0)(x_i-x_1) \dots (x_i-x_{i-1})(x_i-x_{i+1}) \dots (x_i-x_n)}$

→ konstrukcia LIP $\rightarrow L_n(x) = \sum_{i=0}^n g_i \cdot l_i(x)$

Princíp:



Pr. zostrojte LIP pre funkciu danú tabuľkou

x_0	0	1	2	5
g_i	2	2	12	144

$$l_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(0-1)(0-2)(0-5)} = -\frac{1}{10} (x^3 - 3x^2 + 2x) = -\frac{1}{10} (x^3 - 3x^2 + 2x)$$

$$l_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-5)}{(1-0)(1-2)(1-5)} = \frac{1}{4} (x^3 - 2x^2 - 5x) = \frac{1}{4} (x^3 - 2x^2 - 5x)$$

$$l_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-5)}{(2-0)(2-1)(2-5)} = -\frac{1}{6} (x^3 - x^2 - 5x) = -\frac{1}{6} (x^3 - x^2 - 5x)$$

$$l_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(5-0)(5-1)(5-2)} = \frac{1}{60} (x^3 - x^2 - 2x) = \frac{1}{60} (x^3 - x^2 - 2x)$$

LIP: $L_3(x) = 2 \left[-\frac{1}{10}(x^3 - 8x^2 + 17x - 10) \right] + 3 \left[\frac{1}{4}(x^3 - 7x^2 + 10x) \right] + 12 \left[-\frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 11x) \right] + 147 \left[\frac{1}{60}(x^3 - 3x^2 + 2x) \right] = x^3 + x^2 - x + 2$

→ použijte efektivní kalkulaci

→ kontrola $L_3(0) = 2$; $L_3(1) = 3$; $L_3(2) = 12$; $L_3(5) = 147$

např. $L_3(5) = 147$
Hörnerovo schéma

5	1	1	-1	2
	X	5	30	145
	1	6	29	(147)

⇒ LIP má spíše jen teoretický význam (pro ověření VST. DAT a numer. předpovědi, (i když bod))

Newtonův IP (NIP)

1. První diference

x_i	$f(x_i)$	$\Delta^1 f(x)$	$\Delta^2 f(x)$		$\Delta^{N-1} f(x)$	$\Delta^N f(x)$
x_0	f_0	$f[x_0, x_1]$	$f[x_0, x_1, x_2]$			
x_1	f_1	$f[x_1, x_2]$	$f[x_1, x_2, x_3]$		$f[x_0, \dots, x_{N-1}]$	
x_2	f_2	$f[x_2, x_3]$	$f[x_2, x_3, x_4]$			
x_3	f_3	$f[x_3, x_4]$		...		$f[x_0, \dots, x_N]$
x_4	f_4	$\vdots$	$\vdots$			
$\vdots$	$\vdots$	$f[x_{N-2}, x_{N-1}]$			$f[x_1, \dots, x_N]$	
x_{N-1}	f_{N-1}	$f[x_{N-1}, x_N]$	$f[x_{N-2}, x_{N-1}, x_N]$			
x_N	f_N					
		$N+1$	N	$N-1$	2	1

konstrukce pomocných diferencí prvního řádu $\Delta^1 f(x)$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0}; \quad f[x_1, x_2] = \frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} \Rightarrow f[x_{N-1}, x_N] = \frac{f_N - f_{N-1}}{x_N - x_{N-1}}$$

konstrukce pomocí 1. diferencí druhého řádu $\Delta^2 f(x)$

$$f[x_0; x_1] = \frac{f[x_1] - f[x_0]}{x_1 - x_0}$$

$$f[x_1; x_2] = \frac{f[x_2] - f[x_1]}{x_2 - x_1}$$

$$f[x_{n-2}; x_{n-1}] = \frac{f[x_{n-1}] - f[x_{n-2}]}{x_{n-1} - x_{n-2}}$$

konstrukce pomocí dif. n. tého řádu $\Delta^n f(x)$

$$f[x_0; x_1; \dots; x_n] = \frac{f[x_1; \dots; x_n] - f[x_0; \dots; x_{n-1}]}{x_n - x_0}$$

konstrukce NIP

$$N_n(x) = f_0 + f[x_0; x_1](x-x_0) + f[x_0; x_1; x_2](x-x_0)(x-x_1) + \dots \quad \textcircled{1}$$

$$\textcircled{1} \dots + f[x_0; \dots; x_n](x-x_0)(x-x_1) \dots (x-x_{n-1})$$

Pří Sešijte NIP pro funkci danou tabulkou: $f(0)=2, f(1)=3, f(2)=12, f(5)=147$

x_i	f_i	$\Delta^1 f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$
0	2	$\frac{3-2}{1-0} = 1$	$\frac{9-1}{2-0} = 4$	$\frac{9-4}{5-0} = 1$
1	3	$\frac{12-3}{2-1} = 9$	$\frac{45-9}{5-1} = 9$	
2	12	$\frac{147-12}{5-2} = 45$		
5	147			

$$N_3(x) = 2 + 1(x-0) + 4(x-0)(x-1) + 1(x-0)(x-1)(x-2) = 2 + x + 4(x^2-x) + 1(x^2-x)(x-2) =$$

$$= 2 + \underline{x} + \underline{4x^2 - 4x} + \underline{x^3 - 2x^2 - x^2 + 2x} = x^3 + x^2 - x + 2$$

ding' postup:

x_i	0	1	2	5
f_i	2	3	12	147

$$i=0,1,2,3 \Rightarrow N_3(x)$$

konstrukce postupně polynomy p_0, p_1, p_2, p_3

$$p_0(x) = 2$$

$$p_1(x) = p_0(x) + C(x-x_0) = 2 + C \cdot (x-0) \quad \text{platí, že } p_1(1) = 3$$

$$3 = 2 + C(1-0) \Rightarrow C = 1$$

$$\Rightarrow p_1(x) = 2 + x$$

$$p_2(x) = p_1(x) + C(x-x_0)(x-x_1) = 2 + x + C \cdot (x-0)(x-1) \quad \text{platí, že } p_2(2) = 12$$

$$12 = 2 + 2 + C \cdot \frac{(2-0)(2-1)}{2} \Rightarrow C = \frac{12-4}{2} = 4$$

$$\Rightarrow p_2(x) = 2 + x + 4(x-0)(x-1)$$

$$p_3(x) = p_2(x) + C(x-x_0)(x-x_1)(x-x_2) = 2 + x + 4(x-0)(x-1) + C(x-0)(x-1)(x-2)$$

$$\text{platí, že } p_3(5) = 147$$

$$147 = 2 + 5 + 4 \cdot \underbrace{(5-0)(5-1)}_{20} + C \cdot \underbrace{(5-0)(5-1)(5-2)}_{60}$$

$$147 = 7 + 80 + C \cdot 60 \Rightarrow C = \frac{147-7-80}{60} = 1$$

$$p_3(x) = 2 + x + 4(x-0)(x-1) + 1 \cdot (x-0)(x-1)(x-2) = \underline{\underline{x^3 + x^2 - x + 2}} \quad \text{skýne'}$$

Р2: Vakerite NIP fu $f(x)$ dane' Labulikon

(-8c)

x_i	f_i	$\Delta^1 f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	$\Delta^3 f(x)$	$\Delta^4 f(x)$
0	(-5)	$\frac{-3+5}{1-0}$ (2)	$\frac{6-2}{-1-0}$ (-4)	$\frac{12+4}{2-0}$ (8)	$\frac{2-8}{-2-0}$
1	-3	$\frac{-15+3}{-1-1}$ 6	$\frac{12-6}{2-1}$ 12	$\frac{6-12}{-2-1}$ 2	(3)
-1	-15	$\frac{39+15}{2+1}$ 18	$\frac{12-18}{-2+1}$ 6		
2	39	$\frac{-9-39}{-2-2}$ 12			
-2	-9				

$$N_4(x) = -5 + 2(x-0) - 4(x-0)(x-1) + 8(x-0)(x-1)(x+1) + 3(x-0)(x-1)(x+1)(x-2) =$$

$$= -5 + 2x - 4(x^2 - x) + 8(x^3 - x^2 - x + 1) + 3(x^4 - 2x^3 - x^2 + 2x) =$$

$$= -5 + 4x - 7x^2 + 2x^3 + 3x^4$$

$$a_0 = -5; a_1 = 4; a_2 = -7; a_3 = 2; a_4 = 3$$

$$N_4(x) = -5 + x(4 + x(-7 + x(2 + 3x)))$$

Vosteni na'robenu'
Hörmueroo Schema

$$N_4(3) = -5 + 3(4 + 3(-7 + 3(2 + 9))) = \underline{\underline{241}}$$



Hörmueroo Schema

3	3	2	-7	4	-5
	X	9	33	78	246
	3	11	26	82	(241)

ODHAD CHYBY Interpolace níž polynomů

→ plyn 2 Taylorovy řady → vyjádření zbytku $f(x) \rightarrow P_n(x)$

$$\underline{f(x)} = P_n(x) + R_n(x) = \underline{P_n(x)} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

$$f(x) - P_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-x_0)(x-x_1)\dots(x-x_n)$$

→ odhadujeme max. hodnotu $|f^{(n+1)}(\xi)| \leq M$ pro $x \in \langle x_0, x_n \rangle$
 ↳ musíme uvážit ten nejhorší případ

Pr

x	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$
$\sin x$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$

} $L_3(x)$ hledáme odhad max. hodnoty

4. derivace je $\sin x$
 $\sin x \xrightarrow{1D} \cos x \xrightarrow{2D} -\sin x \xrightarrow{3D} -\cos x \xrightarrow{4D} \sin x$
 Max hodnota $\sin x$ na intervalu $(0, \pi/3)$

napr. pro $x = \pi/5$ $L_3(\pi/5) \approx \sin(\pi/5)$

$$|\sin \frac{\pi}{5} - L_3(\frac{\pi}{5})| \leq \frac{\sin(\xi)}{(3+1)!} (\frac{\pi}{5}-0)(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{6})(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{4})(\frac{\pi}{5}-\frac{\pi}{3})$$

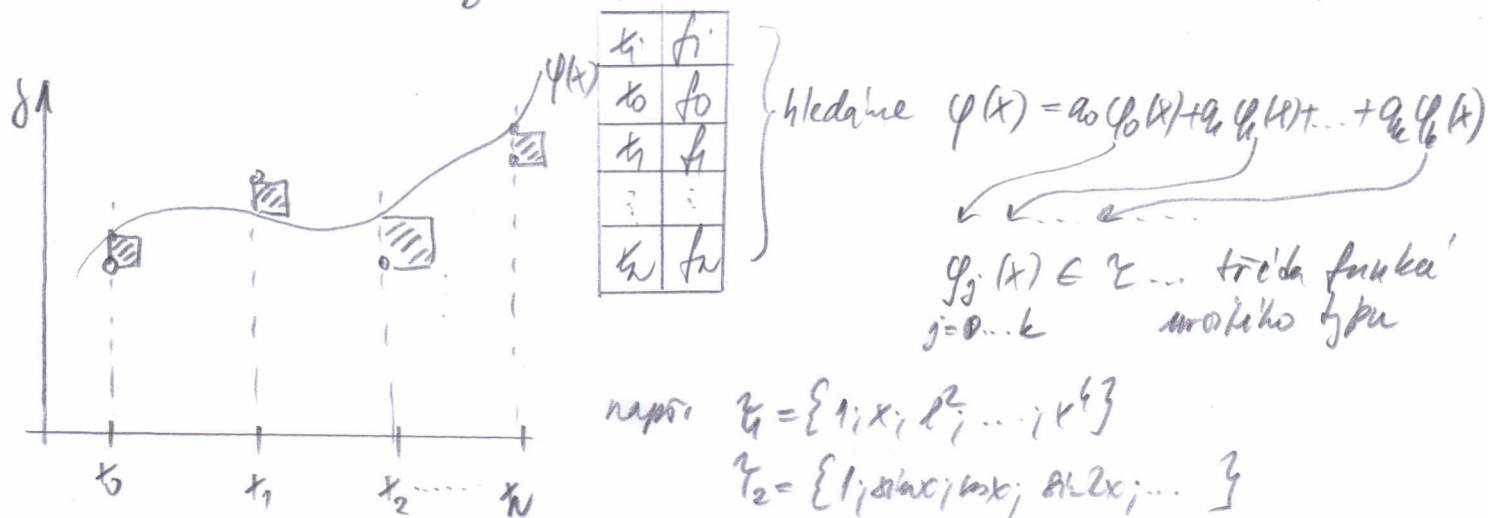
$$|\sin \frac{\pi}{5} - L_3(\frac{\pi}{5})| \leq 1,8039 \cdot 10^{-4} \leq \underline{\underline{0,0002}}$$

METODA NEJMENŠICH OVRHOV (MNO)

(-10-)

→ Vypočítame, aby aproximácia pre prachárela pociť pol
(hlin a eliminujú dby mörred)

→ Obecná formulaa uľohy : $f(x)$ dána formou hodnotami (pol's)



např. $\mathcal{C}_1 = \{1, x, x^2, \dots, x^k\}$
 $\mathcal{C}_2 = \{1, \sin x, \cos x, \sin 2x, \dots\}$
 $\mathcal{C}_3 = \{1, \frac{1}{x}, \frac{1}{x^2}, \dots\}$

→ Podmínka MNO: $\sum_{i=0}^n [\varphi(x_i) - f_i]^2 = S(a_0, a_1, \dots, a_k) \rightarrow \text{MIN}$

→ hledáme koeficienty $a_0 \dots a_k$ tak, aby se $S(a_0, \dots, a_k)$ nebyla své nejmenší hodnoty

→ MINIMALIZACE: $\frac{\partial S}{\partial a_j} = 0 ; j=0 \dots k$

derivace: $2 \sum_{i=0}^n [\varphi(x_i) - f_i] \cdot \varphi_j(x_i) = 0 \quad | :2$

$$\sum_{i=0}^n [a_0 \varphi_0(x_i) + \dots + a_k \varphi_k(x_i) - f_i] \cdot \varphi_j(x_i) = 0$$

soustava k+1 rovnic
0 k+1 neznámých

$$a_0 \underbrace{\sum_{i=0}^n \varphi_0(x_i) \cdot \varphi_j(x_i)}_{\text{květ}} + \dots + a_k \underbrace{\sum_{i=0}^n \varphi_k(x_i) \cdot \varphi_j(x_i)}_{\text{květ}} = \sum_{i=0}^n \underbrace{f_i \cdot \varphi_j(x_i)}_{\text{květ}}$$

obecně $(\varphi_p, \varphi_q) = \sum_{i=0}^n \varphi_p(x_i) \cdot \varphi_q(x_i)$ jako skalární součin

⇒ dostaneme tzv. NORMÁLNÍ SOUSTAVU ROVNIC (NSR)

$$a_0(y_0; y_0) + a_1(y_1; y_0) + \dots + a_k(y_k; y_0) = (f_i; y_0)$$

$$a_0(y_0; y_k) + a_1(y_1; y_k) + \dots + a_k(y_k; y_k) = (f_i; y_k)$$

→ pokud jsou f_i a $y_0(x), \dots, y_k(x)$ lineární uvažujeme na množině $\mathcal{A}$ má tato soustava jedinou řešení $\Rightarrow \varphi(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x) + \dots + a_k y_k(x)$

→ Např. pro polynom 3. stupně $P_3(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$

$$\text{NSR: } a_0(1;1) + a_1(x;1) + a_2(x^2;1) + a_3(x^3;1) = (f_i;1)$$

$$a_0(1;x) + a_1(x;x) + a_2(x^2;x) + a_3(x^3;x) = (f_i;x)$$

$$a_0(1;x^2) + a_1(x;x^2) + a_2(x^2;x^2) + a_3(x^3;x^2) = (f_i;x^2)$$

$$a_0(1;x^3) + a_1(x;x^3) + a_2(x^2;x^3) + a_3(x^3;x^3) = (f_i;x^3)$$

→ Vlastnosti skalárního součinu $\rightarrow$ nestupnost, symetrie např. $(x^2, 1) = (1, x^2)$ atd.

Pr: Vážená pln. 1. stupně, který aproximuje f_i $f(x)$ danou tabulkou:

i	0	1	2	3
x_i	2	4	6	8
y_i	2	11	28	40

$$\text{Máme pln: } P_1(x) = a_0 y_0(x) + a_1 y_1(x)$$

$$y_0(x) = 1; y_1(x) = x \quad f(x) = y_i$$

$$\text{NSR: } a_0(1;1) + a_1(x;1) = (f_i;1)$$

$$a_0(1;x) + a_1(x;x) = (f_i;x)$$

$$\text{Skalární součin: } (1;1) = \sum_{i=0}^3 (1;1) = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 = 4$$

$$(x;1) = \sum_{i=0}^3 (x;1) = x_0 \cdot 1 + x_1 \cdot 1 + x_2 \cdot 1 + x_3 \cdot 1 = 2 + 4 + 6 + 8 = 20 \quad [= (1;x)]$$

$$(x;x) = \sum_{i=0}^3 (x;x) = x_0^2 + x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 4 + 16 + 36 + 64 = 120 \quad [= (1;x^2)]$$

$$(f;1) = \sum_{i=0}^3 (f;1) = f_0 + f_1 + f_2 + f_3 = 2 + 11 + 28 + 40 = 81$$

$$(f;x) = \sum_{i=0}^3 (f;x) = 2 \cdot 2 + 4 \cdot 11 + 6 \cdot 28 + 8 \cdot 40 = 556$$

$$\Rightarrow \text{NSR: } \begin{aligned} 4a_0 + 20a_1 &= 81 \\ 20a_0 + 120a_1 &= 526 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} a_0 &= \frac{\begin{vmatrix} 81 & 20 \\ 526 & 120 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 20 \\ 20 & 120 \end{vmatrix}} = -12,5 \\ a_1 &= \frac{\begin{vmatrix} 4 & 81 \\ 20 & 526 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4 & 20 \\ 20 & 120 \end{vmatrix}} = 6,55 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} a_0 \\ a_1 \end{aligned}} \right\} \underline{p_1(x) = -12,5 + 6,55x}$$

→ problem zde vzniká → NSR je roztokem špatně podmíněná

→ hledá se tedy algoritmus, jak a uhlavovat řešení NSR

→ pokud $\varphi_i \dots$ je ORTOGONÁLNÍ SYSTÉM FCÍ na $\{x_0, \dots, x_n\}$ (nejména Lin. nezávislé) $\Rightarrow$ diagonální soustava $(\varphi_i, \varphi_j) = 0, \text{ pro } i \neq j$

$$\Rightarrow a_0(\varphi_0, \varphi_0) + 0 + \dots + 0 = (f, \varphi_0)$$

$$0 + a_1(\varphi_1, \varphi_1) + \dots + 0 = (f, \varphi_1)$$

$$0 + 0 + \dots + a_n(\varphi_n, \varphi_n) = (f, \varphi_n)$$

→ problem konstrukce OS Fa'

→ dle Rekurze: Ukládáme $\varphi_{-1} = 0$; $\varphi_0 = 1$; $b_0 = 0$

$$\varphi_{k+1} = (x - c_k)\varphi_k - b_k\varphi_{k-1}$$

$$c_k = \frac{(x\varphi_k, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)}; \quad b_k = \frac{(\varphi_k, \varphi_k)}{(\varphi_{k-1}, \varphi_{k-1})}; \quad a_k = \frac{(f, \varphi_k)}{(\varphi_k, \varphi_k)}$$

Př.: stejný příklad přes OSF:

i	0	1	2	3
x_i	2	4	6	8
y_i	2	11	28	40

$$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x)$$

$$\varphi_{-1} = 0; \quad b_0 = 0$$

$$\varphi_0 = 1$$

$$\varphi_1 = (x - c_0)\varphi_0 - b_0\varphi_{-1} = (x - c_0)\varphi_0 = x - 5$$

$$c_0 = \frac{(x\varphi_0, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = \frac{(x, 1)}{(1, 1)} = \frac{20}{4} = 5$$

$$a_1 = \frac{(f, \varphi_1)}{(\varphi_1, \varphi_1)} = \frac{(f, x-5)}{(x-5, x-5)} = \frac{2(2-5) + 11(4-5) + 28(6-5) + 40(8-5)}{(2-5)^2 + (4-5)^2 + (6-5)^2 + (8-5)^2} = \frac{131}{20}$$

$$a_0 = \frac{(f, \varphi_0)}{(\varphi_0, \varphi_0)} = \frac{(f, 1)}{(1, 1)} = \frac{\sum y_i}{\sum 1} = \frac{81}{4}$$

$$\varphi(x) = \frac{81}{4} \cdot 1 + \frac{131}{20} (x-5) = -12,5 + 6,55x$$