PAMAP, PAMAŁ PŘEDNÁŠKA č. 2

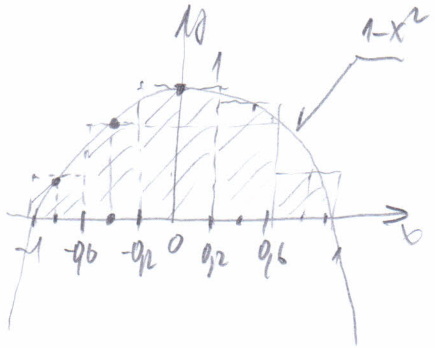
NUMERICKÁ MATEMATIKA

→ převod spojité úlohy na diskrétní (integrál, derivace → jen operace +, −, *, /)

Př: $\int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx = \left[x-\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{1} = \left(1-\frac{1}{3}\right)-\left(-1+\frac{1}{3}\right) = 1-\frac{1}{3}+1-\frac{1}{3} = \frac{4}{3} = \underline{1,\overline{3}}$

spojitá úloha

převod na diskrétní



$$\Rightarrow \int_{-1}^{1}(1-x^2)\,dx \doteq f(-0,8)\cdot 0,4 + f(-0,4)\cdot 0,4 + f(0)\cdot 0,4 + f(0,2)\cdot 0,4 + f(0,8)\cdot 0,4 =$$

$$= [1-(-0,8)^2]\cdot 0,4 + [1-(-0,4)^2]\cdot 0,4 + [1-0^2]\cdot 0,4 + [1-(0,2)^2]\cdot 0,4 +$$

$$+ [1-(0,8)^2]\cdot 0,4 = \underline{1,36}$$

dělení intervalu $\langle -1;1\rangle$ diskrétními body $\{-1; -0,6; -0,2; 0,2; 0,6; 1\}$

→ ekvidistantní body

→ vzdálenost 0,4

⇒ intervaly
$\langle -1; -0,6\rangle \ldots -0,8$
$\langle -0,6; -0,2\rangle \ldots -0,4$
$\langle -0,2; 0,2\rangle \ldots 0$
$\langle 0,2; 0,6\rangle \ldots 0,4$
$\langle 0,6; 1\rangle \ldots 0,8$

⇒ přesná hodnota $x = 1,\overline{3}$

odhad $\tilde{x} = 1,36$

$|\tilde{x}-x| = 0,02\overline{6}$

$\left|\frac{\tilde{x}-x}{\tilde{x}}\right| = 0,0196 \doteq 0,02$ → 2% chyba metody je 2%

→ VSTUPNÍ DATA → ALGORITMUS → VÝSTUPNÍ DATA

ALGORITMUS:
→ +, −, ·, /
→ substituce
→ podmíněné příkazy
→ ....

→ VSTUPNÍ DATA = konečná množina čísel, která je zapotřebí k získání jednoznačného řešení

→ ALGORITMUS = konečná posloupnost výpočetních kroků

→ VÝSTUPNÍ DATA = konečná mna čísel, která je řešením dané úlohy

→ nejsme schopni řešit problémy úplně v původním rozsahu

⇒ MODEL (bereme v úvahu pouze některé faktory)

⇒ rozdíl mezi obdrženým výsledkem a skutečným řešením)

⇒ vždy musíme být schopni odhadnout jaká je nepřesnost

CHYBY - rozdělujeme podle toho, kde vznikají

a) CH. matematického modelu - zanedbání některých skutečností
→ rozdíl mezi modelem a skutečností

Př: kalendář jako model roku
(Juliánský: zaveden Juliem Caesarem, délka 365,25 dne
→ každý 4. rok je přestupný, model se zpožďuje)

b) CH. vstupních údajů - VSTUPNÍ DATA → měření → chyby měření
→ náhodné chyby

c) CH. numerických metod - převod spojitých problémů na diskrétní

d) CH. zaokrouhlovací → čísla v průběhu výpočtu zaokrouhlujeme
→ chyby, kumulují se

x ... reálné číslo } zaokrouhlování
$\tilde{x}$ ... aproximace

⇒ chyba aproximace: Absolutní $\varepsilon(\tilde{x}) = |x-\tilde{x}|$
Relativní $\delta(\tilde{x}) = \left|\frac{x-\tilde{x}}{x}\right|$

správné číslo neznáme ⇒ Odhad ACH a RCH $|x-\tilde{x}| \le \varepsilon(\tilde{x})$
$\left|\frac{x-\tilde{x}}{x}\right| \le \delta(\tilde{x})$

→ RCH je nezávislá na volbě jednotky ⇒ míra přesnosti výpočtu
→ RCH v % $\delta(\tilde{x}) \cdot 100$

PŘI SPRÁVNÉM ZAOKROUHLENÍ → ACH nikdy nepřesáhne polovinu jednotky řádu poslední ponechané číslice

→ platné číslice jsou číslice začínající na první nenulovou číslicí a končí napravo správnou číslicí (může být i 0 pokud je přesná)

→ Počet platných číslic: mějme číslo x (10 soustava, normovaný tvar)
↳ mantisa $\in (0,1; 1)$

$x = 0{,}d_1 d_2 \ldots d_k d_{k+1} \ldots \cdot 10^n$

→ Říkáme, že aproximace $\tilde{x}$ čísla x má j-tou číslici platnou, jestliže platí $|x-\tilde{x}| \le 0{,}5 \cdot 10^{n-j}$

Př: $x = \pi = 3{,}14159\ldots$ → $n=1$
odhad $\tilde{x} = 3{,}1415$ → normovaný tvar $\tilde{x} = 0{,}31415 \cdot 10^1$

$|3{,}14159 - 3{,}1415| = 0{,}00009$

v odhadu 3,1415 poslední číslici nemůžeme věřit = není správně zaokrouhlena

$j=0$ $0{,}5 \cdot 10^1 = 5$ ✓
$j=1$ $0{,}5 \cdot 10^0 = 0{,}5$ ✓
$j=2$ $0{,}5 \cdot 10^{-1} = 0{,}05$ ✓
$j=3$ $0{,}5 \cdot 10^{-2} = 0{,}005$ ✓
$j=4$ $0{,}5 \cdot 10^{-3} = 0{,}0005$ ✓ PPČ = 4
$j=5$ $0{,}5 \cdot 10^{-4} = 0{,}00005$ ✗

ABSOLUTNÍ A RELATIVNÍ CHYBY

α, β 2 čísla α ... přesná hodnota
β ... aproximace α

chyba β jako aproximace α ... $\alpha - \beta$

ACH β jako aprox. α je $|\alpha - \beta|$
RCH β jako aprox. α je $\left|\frac{\alpha - \beta}{\alpha}\right|$
(RCH $\nexists$ pro $\alpha = 0$)

Př: $\alpha_1 = 1{,}333$ $\beta_1 = 1{,}334$ $|\alpha_1 - \beta_1| = 0{,}001$ $\left|\frac{\alpha_1 - \beta_1}{\alpha_1}\right| = 0{,}0007502$
$\alpha_2 = 0{,}001$ $\beta_2 = 0{,}002$ $|\alpha_2 - \beta_2| = 0{,}001$ $\left|\frac{\alpha_2 - \beta_2}{\alpha_2}\right| = 1$
RCH jasně určuje kvalitu aproximace

Př: $x = 0{,}00347$ $\tilde{x} = 0{,}0035$
$y = 30{,}158$ $\tilde{y} = 30{,}16$

Pro $\tilde{x} = 0{,}35 \cdot 10^{-2}$ 2 PČ ACH $|0{,}00347 - 0{,}0035| = 0{,}00003 = 0{,}3 \cdot 10^{-4}$ RCH: $0{,}865 \cdot 10^{-2}$
$\tilde{y} = 0{,}3016 \cdot 10^{2}$ 4 PČ ACH $|30{,}158 - 30{,}16| = 2 \cdot 10^{-3} = 0{,}2 \cdot 10^{-2}$ RCH: $0{,}66 \cdot 10^{-4}$

→ PŘESNOST na n desetinných míst → znamená, že můžeme věřit n číslicím napravo od desetinné čárky

→ PŘESNOST na n platných číslic → znamená, že můžeme věřit alespoň n číslicím (ne 0 na začátku)

Př: 0,001 m ... přesnost na 3DM
12,345 m ... přesnost na 3DM
12,3456789 m ... bezvýznamné – neumíme měřit na 3DM (pravítko)
⇒ 12,345 m 5 číslic
⇒ 12,346 m 5 platných číslic

0,076 2 PČ

→ ROUNDING × CHOPPING
Rounding redukuje počet platných číslic na určitý počet

R: 0,217 → 0,22 2 DM
CH: 0,217 → 0,21

CELKOVÁ CHYBA VÝPOČTU

Předpokládejme teoretickou závislost $Y = F(x_1; \dots; x_n)$

→ F nahradíme numerickou metodou $y = f(x_1; \dots; x_n)$

→ místo přesných hodnot $x_1, x_2; \dots; x_n$ používáme jejich aproximace $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2; \dots; \tilde{x}_n$

$$y' = f(\tilde{x}_1; \dots; \tilde{x}_n)$$

→ zaokrouhlování při výpočtu $\tilde{y} = \tilde{f}(\tilde{x}_1; \dots; \tilde{x}_n)$

⇒ hodnoty y' a $\tilde{y}$ se liší

→ CELKOVÁ CHYBA VÝPOČTU je: $Y - \tilde{y} = F(x_1; \dots; x_n) - \tilde{f}(\tilde{x}_1; \dots; \tilde{x}_n)$

→ PRIMÁRNÍ CHYBA V. je: $y - y' = f(x_1; \dots; x_n) - f(\tilde{x}_1; \dots; \tilde{x}_n)$

→ SEKUNDÁRNÍ CHYBA V. je $y' - \tilde{y} = f(\tilde{x}_1; \dots; \tilde{x}_n) - \tilde{f}(\tilde{x}_1; \dots; \tilde{x}_n)$

ODHAD PRIMÁRNÍ CHYBY VÝPOČTU (PCHV)

Nechť $f(x_1; \dots; x_n)$ je spojitě diferencovatelná na nějaké množině $G = \{x_i; |x_i - \tilde{x}_i| \le \alpha_i; i = 1 \dots n\}$. Pak PCHV odhadujeme jako

$$|f(x_1; \dots; x_n) - f(\tilde{x}_1; \dots; \tilde{x}_n)| \le \sum_{i=1}^{n} A_i \cdot \alpha_i, \text{ kde } A_i = \sup_G \left| \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1 \dots x_n) \right| \quad i = 1 \dots n$$

Př: Odhadněte PCH operace $f(x;y) = y \cdot \ln(x)$ používáme-li aproximace $\tilde{x} = 1{,}25$ a $\tilde{y} = 0{,}3125$, která mají všechny číslice platné (správné zaokrouhlení)

$$|f(x;y) - f(\tilde{x};\tilde{y})| \le \sum_{i=1}^{2} A_i \, \alpha_i \ominus$$

$\alpha_1 \Rightarrow |x - \tilde{x}|$ správně zaokrouhleno $\alpha_1 = 0{,}5 \cdot 10^{-2}$ 2DM

$\alpha_2 \Rightarrow |y - \tilde{y}|$ ——"—— $\alpha_2 = 0{,}5 \cdot 10^{-4}$ 4DM

$A_1 \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial x}(\tilde{x};\tilde{y}) \right| = \frac{y}{x}(\tilde{x};\tilde{y}) = 0{,}25$

$A_2 \Rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial y}(\tilde{x};\tilde{y}) \right| = \ln x \, (\tilde{x};\tilde{y}) = \ln 1{,}25 = 0{,}223143551$

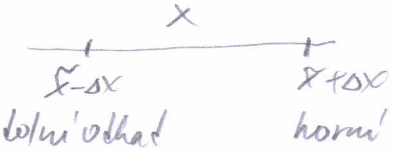
$\ominus \; A_1 \alpha_1 + A_2 \alpha_2 = 0{,}25 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-2} + 0{,}223143551 \cdot 0{,}5 \cdot 10^{-4} \doteq \underline{0{,}12612 \cdot 10^{-2}}$

CHYBY SOUČTU, ROZDÍLU, SOUČINU A PODÍLU

→ odvozeno na základě odhadu primární chyby

$$x = \tilde{x} \pm \Delta x = \tilde{x} \pm \tilde{x}\cdot\delta(x) = \tilde{x}(1\pm\delta(x))$$

$\tilde{x}$ ... střední aproximace
Δx ... absolutní chyba $\varepsilon(x)$
x ... správná hodnota
$\delta(x)$ ... REL. CH.



$x \in \langle \tilde{x}-\Delta x; \tilde{x}+\Delta x \rangle$

→ pro sčítání platí:

$$x = \tilde{x} \pm \Delta x$$
$$y = \tilde{y} \pm \Delta y$$
$$x+y = (\tilde{x}+\tilde{y}) \pm (\Delta x+\Delta y)$$
$$0 \le \delta(x+y) = \frac{\Delta x+\Delta y}{\tilde{x}+\tilde{y}} = \frac{\Delta x}{\tilde{x}+\tilde{y}} + \frac{\Delta y}{\tilde{x}+\tilde{y}} \le \delta(x)+\delta(y)$$

RCH se sčítají

→ pro odčítání platí: $x-y = (\tilde{x}-\tilde{y}) \pm (\Delta x \pm \Delta y)$

$$0 \le \delta(x-y) = \frac{\Delta x+\Delta y}{\tilde{x}-\tilde{y}}$$

→ může jít k ∞ pokud $\tilde{x}$ a $\tilde{y}$ jsou skoro stejné

RCH rozdílu nelze mít v žádném výpočtu pod kontrolou

→ pro násobení platí: $x\cdot y = (\tilde{x}\pm\Delta x)(\tilde{y}\pm\Delta y) = \tilde{x}\tilde{y} \pm (\Delta x\cdot\tilde{y} + \Delta y\,\tilde{x})$

$$0 \le \delta(x\cdot y) = \frac{\Delta x\,\tilde{y}+\Delta y\,\tilde{x}}{\tilde{x}\cdot\tilde{y}} \le \delta(x)+\delta(y)$$

→ pro dělení platí: $\frac{x}{y} = \frac{\tilde{x}}{\tilde{y}} \pm \frac{x\Delta y + y\Delta x}{y^2}$

$$\delta\left(\frac{x}{y}\right) = \delta(x)+\delta(y)$$

Př: Odhad chyby rozdílu: Odhadněte chybu rozdílu $\tilde{x}_1-\tilde{x}_2$, jestliže $\tilde{x}_1 = 97{,}132$ a $\tilde{x}_2 = 97{,}116$ a obě čísla mají stejný PPČ

$\tilde{x}_1-\tilde{x}_2 = 97{,}132-97{,}116 = 0{,}016 = 0{,}16\cdot10^{-1} \rightarrow n=-1$ ← PPČ pouze 1

$\varepsilon(\tilde{x}_1-\tilde{x}_2) = \underbrace{0{,}5\cdot10^{-3}}_{JDM} + \underbrace{0{,}5\cdot10^{-3}}_{JDM} = 0{,}001$ $\quad 0{,}001 \le 0{,}5\cdot10^{-1-j}$

$j=0 \quad 0{,}001 \le 0{,}5\cdot10^{-1} = 0{,}05$ ✓
$j=1 \quad 0{,}001 \le 0{,}5\cdot10^{-2} = 0{,}005$ ✓
$j=2 \quad 0{,}001 \le 0{,}5\cdot10^{-3} = 0{,}0005$ ×

rel. ch.: $\delta(\tilde{x}_1) = \frac{0{,}5\cdot10^{-3}}{97{,}132} = 5\cdot10^{-6}$ $\quad \delta(\tilde{x}_2) = \frac{0{,}5\cdot10^{-3}}{97{,}116} = 5\cdot10^{-6}$

$\delta(\tilde{x}_1-\tilde{x}_2) = \frac{0{,}001}{0{,}016} = 0{,}0625$ $\quad \frac{0{,}0625}{5\cdot10^{-6}} = 12500$

RCH rozdílu je 12500× větší než RCH jednotlivých čísel

DOBRÉ A ŠPATNĚ PODMÍNĚNÉ ÚLOHY

→ korektní úlohy = SPOJITÉ

→ NEKOREKTNÍ → DISKRÉTNÍ $<$ DOBŘE / ŠPATNĚ $>$ PODMÍNĚNÉ

→ Nekorektní úloha je dobře podmíněna, jestliže malé změně VSTUPNÍCH údajů odpovídá malá změna VÝSTUPNÍCH údajů

→ definujeme ČÍSLO PODMÍNĚNOSTI $C_p = \dfrac{\text{rel. ch. VÝSTUPNÍCH DAT}}{\text{rel. ch. VSTUPNÍCH DAT}}$

→ hraniční hodnota C_p není dána jednoznačně

$C_p \to 1$ DOBŘE PODM.

$C_p \to 100$ ŠPATNĚ PODM.

→ podmíněnost nesouvisí s použitým algoritmem řešení, je to vlastnost úlohy samotné

Př: Zjistěte C_p při výpočtu $y = \sin x$ pro a) $x = 0$ b) $x = \pi$

VSTUP: x

VÝSTUP: $\sin x$

$$\Big\} C_p = \frac{\text{RCH VÝST}}{\text{RCH VST}} = \frac{\left|\frac{\sin x - \sin \tilde{x}}{\sin x}\right|}{\left|\frac{x - \tilde{x}}{x}\right|} = \underbrace{\left|\frac{\sin x - \sin \tilde{x}}{x - \tilde{x}}\right|} \cdot \left|\frac{x}{\sin x}\right| \ominus$$

derivace $\sin x$ $(\sin x)' = \cos x$

$\ominus$ a) $|x \to 0| = \lim\limits_{x \to 0} \cos x \cdot \left|\frac{x^{\to 0}}{\sin x_{\to 0}}\right| = \cos 0 \cdot 1 = 1$ dobře podmíněná úloha v okolí $x = 0$

$\ominus$ b) $|x \to \pi| = \lim\limits_{x \to \pi} \underbrace{\cos x \cdot \left|\frac{x^{\to \pi}}{\sin x_{\to 0}}\right|}_{\cot x} = \cot \pi \cdot \pi = \infty \cdot \pi = \infty$ špatně podmíněná úloha v okolí $x = \pi$

Př: Rozhodněte, zda je systém LR
$$x_1 + 1{,}01x_2 = 2{,}01$$
$$1{,}01x_1 + 1{,}02x_2 = 2{,}03$$

dobře nebo špatně podmíněn při změně pravé strany o $-0{,}01$.

$$x_1 + 1{,}01x_2 = 2{,}01 \qquad\qquad x_1 + 1{,}01x_2 = 2$$
$$1{,}01x_1 + 1{,}02x_2 = 2{,}03 \qquad\qquad 1{,}01x_1 + 1{,}02x_2 = 2{,}02$$

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2{,}01 & 1{,}01 \\ 2{,}03 & 1{,}02 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1{,}01 \\ 1{,}01 & 1{,}02 \end{vmatrix}} = \frac{2{,}01\cdot 1{,}02 - 1{,}01\cdot 2{,}03}{1\cdot 1{,}02 - 1{,}01\cdot 1{,}01} = 1 \qquad\qquad x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1{,}01 \\ 2{,}02 & 1{,}02 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1{,}01 \\ 1{,}01 & 1{,}02 \end{vmatrix}} = 2$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2{,}01 \\ 1{,}01 & 2{,}03 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1{,}01 \\ 1{,}01 & 1{,}02 \end{vmatrix}} = 1 \qquad\qquad x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1{,}01 & 2{,}02 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1{,}01 \\ 1{,}01 & 1{,}02 \end{vmatrix}} = 0$$

VSTUP $b = \begin{pmatrix} 2{,}01 \\ 2{,}03 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \tilde{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2{,}02 \end{pmatrix}$

VÝSTUP $x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \tilde{x} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$C_p = \frac{\left\| \frac{x-\tilde{x}}{x} \right\|}{\left\| \frac{b-\tilde{b}}{b} \right\|} = \frac{\left\| \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} \right\|}{\left\| \frac{\begin{pmatrix} 2{,}01 \\ 2{,}03 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 2{,}02 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 2{,}01 \\ 2{,}03 \end{pmatrix}} \right\|} = \frac{\left\| \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\|} \cdot \frac{\left\| \begin{pmatrix} 2{,}01 \\ 2{,}03 \end{pmatrix} \right\|}{\left\| \begin{pmatrix} 0{,}01 \\ 0{,}01 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{\cancel{\sqrt{1+1}}}{\cancel{\sqrt{1+1}}} \cdot \frac{\sqrt{2{,}01^2 + 2{,}03^2}}{\sqrt{0{,}01^2 + 0{,}01^2}} \doteq 202$$

ŠPATNĚ PODMÍNĚNO

STABILNÍ ALGORITMUS

DOBŘE PODMÍNĚNÝ ALG → málo citlivý na změnu vstupních údajů

NUMERICKY STABILNÍ ALG → málo citlivý na vliv zaokrouhlovacích chyb

1. Algoritmus vnořeného násobení

→ výpočet hodnoty polynomu: $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_{n-1} x^{n-1} + a_n x^n =$

$$= a_0 + x(a_1 + x(a_2 + \dots + x(a_{n-1} + x a_n))\dots))$$

→ HÖRNEROVO SCHEMA

Př: $y = 5 + 3x - 7x^2 + 2x^3 = 5 + x(3 + x(-7 + x(2)))$

Př: $p(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 5x - 2$; urči $p(3)$

3	1	-4	7	-5	-2
	X	3	-3	12	21
	1	-1	4	7	19

$\Rightarrow p(3) = 19 \Rightarrow x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 5x - 2 = (x-3)(x^3 - x^2 + 4x + 7) + 19$

Př: $p(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 5x - 2$ má kořen 2 rozlož $p(x)$ na součin

2	1	-4	7	-5	-2
	X	2	-4	6	2
	1	-2	3	1	0

$\Rightarrow p(2) = 0 \Rightarrow x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 5x - 2 = (x-2)(x^3 - 2x^2 + 3x + 1)$

→ KOMPLETNÍ HÖRNEROVO SCHEMA

→ výpočet Taylorovy řady polynomu v libovolném bodě r

$$p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0 = c_n (x-r)^n + c_{n-1}(x-r)^{n-1} + \dots + c_1 (x-r) + c_0$$

$$\Rightarrow c_k = \frac{p^{(k)}(r)}{k!} \quad \text{(Taylorovy koeficienty)}$$

$$p(r) = c_0 \Rightarrow q(x) = \frac{p(x) - p(r)}{x - r} = c_n (x-r)^{n-1} + c_{n-1}(x-r)^{n-2} + \dots + c_1$$

$$\Rightarrow c_1 = q(r)$$

Př: Nalezněte TŘ $p(x) = x^4 - 4x^3 + 7x^2 - 5x + 2$ v bodě $r = 3$

3	1	-4	7	-5	2
	X	3	-3	12	21
3	1	-1	4	7	23
	X	3	6	30	X
3	1	2	10	37	X
	X	3	15	X	X
3	1	5	25	X	X
	X	3	X	X	X
3	1	8	X	X	X
	X	X	X	X	X
3	1	X	X	X	X

$\Rightarrow p(x) = (x-3)^4 + 8(x-3)^3 + 25(x-3)^2 + 37(x-3)^1 + 23$

Pr: semilogaritmický tvar $x = \pm m \cdot 10^{p}$ … m… mantisa
p… exp. (celé číslo)
$m \in \langle 0{,}1; 1)$ normalizovaný tvar

123,45678 zaokrouhlit na 6místnou mantisu

$x = 123{,}45678 = \underbrace{0{,}12345678}_{\in \langle 0{,}1;1)} \cdot 10^{3} \doteq 0{,}\underbrace{123457}_{6\text{míst}} \cdot 10^{3}$ $\tilde{x} = 123{,}457$

$\varepsilon(x) = |x - \tilde{x}| = |123{,}45678 - 123{,}457| = 2{,}2 \cdot 10^{-4} = 0{,}00022 = 0{,}22 \cdot 10^{-3}$

$\delta(x) = \left|\frac{\varepsilon(x)}{x}\right| = \frac{0{,}00022}{123{,}45678} \doteq 1{,}78 \cdot 10^{-6} \doteq 0{,}18 \cdot 10^{-5} = 0{,}0000018$ $(\doteq 0{,}00018\%)$

Pr: $\rho = 0{,}95823 \cdot 10^{3}_{n=3}$ kg/m³ $\delta(x) = 0{,}035\%$. kolik PPČ má tento údaj?

$x = 0{,}95823 \cdot 10^{3}$ $\delta(x) = 0{,}035\% = 0{,}35 \cdot 10^{-1}\% = 0{,}35 \cdot 10^{-3} = 0{,}00035$

$\varepsilon(x) = \delta(x) \cdot x = 0{,}00035 \cdot 0{,}95823 \cdot 10^{3} \doteq 0{,}3353805$

$\rho = (958{,}0 \pm 0{,}3)$ kg/m³

$0{,}5 \cdot 10^{3-j}$

$j=0$	$0{,}5 \cdot 10^{3} = 500$	✓
$j=1$	$0{,}5 \cdot 10^{2} = 50$	✓
$j=2$	$0{,}5 \cdot 10 = 5$	✓
$j=3$	$0{,}5 \cdot 10^{-1} = 0{,}5$	✓ PPČ=3
$j=4$	$0{,}5 \cdot 10^{-2} = 0{,}05$	X

Pr: $a = 0{,}001234$ 4PČ
$a = 0{,}607012$ 6PČ

Zápis výsledku měření → chybu uvádíme na nejvýše 2PČ
→ ve výsledku zaokrouhlujeme v řádu poslední platné číslice chyby

$v = (3{,}86 \pm 0{,}03)$ m/sec
$I = (2{,}3 \pm 0{,}1) \cdot 10^{-3}$ A
$P = (8{,}706 \pm 0{,}054)$ mV

pokud se chyba neudává předpokládáme, že je menší než polovina řádu za poslední platnou číslicí výsledku

$v = 3{,}5\ m\,sec^{-1} \rightarrow (3{,}45 \leq v \leq 3{,}55)\ m\,sec^{-1}$