PAMAP, PAMAK PŘEDNÁŠKA č. 1

0. ORGANIZAČNÍ POKYNY (témata; literatura; požadavky)

→ ct.upce.cz/mathjiku/aplmat.html

1. ÚVOD DO FINANČNÍ MATEMATIKY

POSLOUPNOSTI / GEOMETRICKÁ POSLOUPNOST (GP)

D. Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá GEOMETRICKÁ, právě tehdy, když existuje takové reálné číslo q, že pro každé přirozené číslo n je $a_{n+1} = a_n \cdot q$.

→ číslo q se nazývá KVOCIENT GP

$$\{a_1;\ a_2;\ a_3;\ \dots;\ a_n\}$$

$$a_1 \quad a_1 q \quad a_1 q^2 \quad \dots \quad a_1 q^{n-1}$$

$$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$$

$$a_r = a_s \cdot q^{r-s}$$

→ součet S_n (prvních n členů) GP $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ s kvocientem q

1. $q = 1 \Rightarrow S_n = \underbrace{a_1 + a_1 + \dots + a_1}_{n} = n a_1$

2. $q \neq 1 \Rightarrow S_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$

Dk.: I: $S_n = a_1 + a_1 q + a_1 q^2 + \dots + a_1 q^{n-1}$

II. = I $\cdot q$: $qS_n = q a_1 + a_1 q^2 + a_1 q^3 + \dots + a_1 q^n$

II − I.: $S_n q - S_n = \cancel{a_1 q} - a_1 + \cancel{a_1 q^2} - \cancel{a_1 q} + \cancel{a_1 q^3} - \cancel{a_1 q^2} + \dots + a_1 q^n - \cancel{a_1 q^{n-1}}$

$S_n(q-1) = a_1 q^n - a_1 = a_1(q^n - 1)$

$\Rightarrow S_n = a_1 \dfrac{q^n - 1}{q - 1}$ cbd.

→ porovnání základních vztahů AP × GP

AP	GP
$a_n = a_{n-1} + d$	$a_n = a_{n-1} \cdot q$
$a_n = a_1 + (n-1)d$	$a_n = a_1 \cdot q^{n-1}$
$a_s = a_r + (s-r)d$	$a_s = a_r \cdot q^{s-r}$
$S_n = \frac{n}{2}(a_1 + a_n)$	$S_n = a_1 \frac{q^n - 1}{q - 1}$

→ 1. Př cvičení 1

užití GP

A) Růst (pokles) veličiny

počátek ... a_0
přírůstek ... $p\,\%$
očekávaný počet po n letech (obdobích)

poč. 1. obd ... a_0
konec 1. obd ... $a_1 = a_0 + a_0 \cdot \frac{p}{100} = a_0\left(1+\frac{p}{100}\right)$
konec 2. obd ... $a_2 = a_1\left(1+\frac{p}{100}\right) = a_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2$
. . . .
konec n. obd ... $a_n = a_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n$

GP $\left\{a_0;\ a_0\left(1+\frac{p}{100}\right);\ a_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^2;\ \dots;\ a_0\left(1+\frac{p}{100}\right)^n\right\}$ první člen a_0, kvocient $q = \left(1+\frac{p}{100}\right)$

→ 2. Př cvičení 1

B) Složené úročení

úroková míra 1 obd ... $p\%$
jistina ... J_0
daň z příjmu 15% ... $d\%$ daně
částka za n období ... J_n

počátek ... J_0
za 1. obd ... úrok $J_0 \cdot \frac{p}{100}$
daň $J_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{d}{100}$
částka: $J_0 + J_0 \cdot \frac{p}{100} - J_0 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{d}{100} = J_0\left(1+\frac{p}{100} - \frac{p}{100}\cdot\frac{d}{100}\right)$

$J_1 = J_0\left[1+\frac{p}{100}\left(1-\frac{d}{100}\right)\right]$

za 2. obd ... úrok $J_1 \cdot \frac{p}{100}$
daň $J_1 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{d}{100}$

$$J_2 = J_1 + J_1 \cdot \frac{p}{100} - J_1 \cdot \frac{p}{100} \cdot \frac{d}{100} = J_1\left(1+\frac{p}{100}-\frac{p}{100}\cdot\frac{d}{100}\right) = J_1\left[1+\frac{p}{100}\left(1-\frac{d}{100}\right)\right]$$

⇒ z n obd: $J_n = J_0\left[1+\frac{p}{100}\left(1-\frac{d}{100}\right)\right]^n$

→ 3. Př cvičení 1

c) Spoření

→ stejná částka I_0 na konci každého úrokovacího Obd

úrok $p\%$; daň $d\%$ (15%)

za n období ... S

1. vložená částka je úročena n krát
2. vložená částka ..... $(n-1)$ krát
3. —————— " —————— $(n-2)$ krát

. . . .

vklad jestli na konci

$$\Rightarrow S = \underbrace{I_0\left[1+\frac{p}{100}\left(1-\frac{d}{100}\right)\right]^n}_{a_{n+1}} + \underbrace{I_0\left[1+\frac{p}{100}\left(1-\frac{d}{100}\right)\right]^{n-1}}_{a_n} + \dots + \underbrace{I_0\left[1+\frac{p}{100}\left(1-\frac{d}{100}\right)\right]}_{a_2} + \underbrace{I_0}_{a_1} \ominus$$

GP

s_{n+1} GP $a_1 = I_0$; $q = 1+\frac{p}{100}\left(1-\frac{d}{100}\right)$

$$\ominus\ I_0 \frac{\left[1+\frac{p}{100}\left(1-\frac{d}{100}\right)\right]^{n+1}-1}{\left[1+\frac{p}{100}\left(1-\frac{d}{100}\right)\right]-1} = I_0 \frac{\left[1+\frac{p}{100}\left(1-\frac{d}{100}\right)\right]^{n+1}-1}{\frac{p}{100}\left(1-\frac{d}{100}\right)}$$

→ 4. Př cvičení 1

D) Splátka úvěru

Př: Banka poskytla úvěr ve výši 1000 000 kč na 3 roky s roční úrokovou sazbou 14% (úrokovací období 1 rok).
Splátka probíhá 1x za rok, první po jednom roce.
Kolik činí splátka S

→ dluh na konci 1. roku .... $10^6\cdot(1+0{,}14)$

→ splátka S

→ dluh na počátku 2. roku (po 1. splátce) $10^6\cdot(1+0{,}14)-S$

→ dluh na počátku 3. roku (po 2. splátce)

$$[10^6(1+0{,}14)-S]\underbrace{(1+0{,}14)}_{\text{úrok}}-\underbrace{S}_{\text{splátka}}=10^6(1+0{,}14)^2-S(1+0{,}14)-S$$

→ dluh na konci 3. roku musí být splacen $=0$

$$[10^6(1+0{,}14)^2-S(1+0{,}14)-S](1+0{,}14)-S=0$$

$$10^6(1+0{,}14)^3-\underbrace{S(1+0{,}14)^2-S\cdot(1+0{,}14)-S}=0$$

GP → nahradíme součtem; $a_1=S$; $q=(1+0{,}14)$

$$10^6(1+0{,}14)^3-S\frac{(1+0{,}14)^3-1}{(1+0{,}14)-1}=0$$

$$\Rightarrow S=\frac{10^6(1+0{,}14)^3\cdot0{,}14}{(1+0{,}14)^3-1}\doteq\underline{430\,731{,}48\text{ kč}}$$

Zobecnění: úvěr D; n úrokovacích období; úrok p% za úr. obd.; n stejných splátek

$$S=D\cdot\frac{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n\cdot\frac{p}{100}}{\left(1+\frac{p}{100}\right)^n-1}$$

E] Spojité úročení

Př: částka 1000 Kč se roční úrok 10% (konec roku 1100 Kč)

→ půlroční připisování úroků   1000 ($t=0$)   1050 ($t=1/2$)   1102,5 ($t=1$)

→ 1/4 roční připisování úroků   1000 ($t=0$)   1025 ($t=1/4$)   1050,625 ($t=1/2$)   1076,89 ($t=3/4$)   1103,81 ($t=1$)

→ atd → spojité úročení ($\to 0$)

OBECNĚ: $y(t)$ … výše částky v Kč v čase t y … Kč ; t … roky

→ roční úročení: $y(t+1) = y(t) + \frac{y(t)}{10}$

$t=0 \quad y(1) = y(0) + \frac{y(0)}{10} = 1000 + \frac{1000}{10} = 1100$

→ 1/2 roku: $y(t+\frac{1}{2}) = y(t) + y(t)\cdot\frac{1}{20}$

$t=0 \quad y(\frac{1}{2}) = y(0) + y(0)\cdot\frac{1}{20} = 1000 + 1000\cdot\frac{1}{20} = 1050$

$y(1) = y(\frac{1}{2}) + y(\frac{1}{2})\cdot\frac{1}{20} = 1050 + 1050\cdot\frac{1}{20} = 1102{,}5$

→ atd…

→ pro spojité úročení zavedeme h … délka časového úseku (v rocích) pro připisování úroků

$$y(t+h) = y(t) + y(t)\cdot\frac{h}{10} \Rightarrow \frac{y(t+h)-y(t)}{h} = \frac{y(t)}{10} \quad ; \ y(t)=1000 \text{ pro } t\in\langle 0;h)$$

→ limitní přechod pro $h\to 0$ (spojité $\Rightarrow h\to 0$)

$$\underbrace{\lim_{h\to 0}\frac{y(t+h)-y(t)}{h}}_{\frac{dy}{dt}(t)} = \lim_{h\to 0}\frac{y(t)}{10} \Rightarrow \boxed{\frac{dy}{dt}(t) = \frac{y(t)}{10} \ ; \ t\geq 0 \ ; \ y(t) = 1000 \text{ pro } t=0}$$

$\Rightarrow$ DR: $y' = \frac{y}{10}$; $y(0) = 1000$ Počáteční problém

ZOBECNĚNÍ: částka I_0 ; úrok $p\%$; $y(0)=I_0$; $\boxed{d\% \text{ daní}}$

$y' = \frac{1}{p}y$ OŘ: $y = e^{\frac{1}{p}t + c} = C\cdot e^{\frac{1}{p}t}$; $y(0)=I_0 \Rightarrow C = I_0$

$\frac{dy}{dt} = \frac{1}{p}y$ PŘ: $y = I_0\cdot e^{\frac{1}{p}t}$

Separace: $\int\frac{dy}{y} = \int\frac{dt}{p}$

$$\| y = I_0\cdot e^{\frac{100-d}{100}\cdot\frac{1}{p}\cdot t} \|$$

$\ln|y| = \frac{1}{p}t + c$

→ J.PŘ značení 1

F/ Pravidlo přirozeného růstu (poklesu) populace

předpokládáme: ideální podmínky → (nekonečný prostor, výživa; bez predátorů; imunita proti nákazám)

t … čas (nezávislá proměnná)

P … počet individualit v populaci (závislá proměnná ve čase)

míra růstu populace $\frac{dP}{dt}$ derivace v čase … je přímo úměrná P

$\Rightarrow \frac{dP}{dt} = k \cdot P$ k … konstanta

$\int \frac{dP}{P} = \int k\,dt$ → za lze přepsat $\frac{1}{P} \cdot \frac{dP}{dt} = k$ … relativní míra růstu je konstantní

$\ln|P| = kt + C$

OŘ: $P = A e^{kt}$

PŘ: $P(0) = P_0 \Rightarrow A = P_0$

$P = P_0 \cdot e^{kt}$

důsledek: Emigrace … míra emigrace … m

$\Rightarrow \frac{dP}{dt} = kP - m$

G/ LOGISTICKÝ MODEL → reaguje na velikost prostředí a omezení zdroje

→ start → exponenciální růst → kritická kapacita M

→ předpoklady → $\frac{dP}{dt} \approx kP$ (P je malé → míra růstu je úměrná P)

→ $\frac{dP}{dt} < 0$ když $P > M$

$\Rightarrow \frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)$

$\int \frac{dP}{P\left(1-\frac{P}{M}\right)} = \int k\,dt$

$\ln|P| - \ln|M-P| = kt + C$

$\ln\left|\frac{P}{M-P}\right| = kt + C$

$\frac{P}{M-P} = A \cdot e^{kt}$

$P = \frac{AMe^{kt}}{1 + Ae^{kt}} = \frac{M}{1 + \frac{1}{Ae^{kt}}} = \frac{M}{1 + Be^{-kt}}$

B … konst; $t = 0$; $P = P_0$

$P_0 = \frac{M}{1 + Be^0} \Rightarrow B = \frac{M - P_0}{P_0}$

→ Celé řešení!

Řešení LM: $P(t) = \frac{M}{1 + Be^{-kt}}$; $B = \frac{M - P_0}{P_0}$

$\lim_{t\to\infty} \frac{M}{1 + \frac{M-P_0}{P_0} e^{-kt}} = M$

H/ další modely růstu

→ $\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right) - c$

c … pravidelný úbytek

→ $\frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)\left(1 - \frac{m}{P}\right)$

m … minimální hodnota, kdy množení druhy vymírají

1. Př: dáno: $a_2 = \frac{3}{2}$; $a_7 = -\frac{3}{64}$; GP

určit: S_{10}

$$a_7 = a_2 \cdot q^{7-2} \Rightarrow q = \sqrt[5]{\frac{a_7}{a_2}} = \sqrt[5]{\frac{-\frac{3}{64}}{\frac{3}{2}}} = \sqrt[5]{-\frac{1}{32}} = -\frac{1}{2}$$

$$a_1 = \frac{a_2}{q} = \frac{\frac{3}{2}}{-\frac{1}{2}} = -3$$

$$S_{10} = (-3)\,\frac{(-\frac{1}{2})^{10}-1}{(-\frac{1}{2})-1} = (-3)\,\frac{\frac{1}{1024}-1}{-\frac{3}{2}} = -\frac{1023}{512}$$

2. Př: Ve městě bylo počátkem roku 1995 23600 obyvatel. Kolik obyvatel bude ve městě počátkem roku 2000 předpokládáme-li přírůstek $p = 1,8\%$.

dáno: $a_0 = 23600$; $q = 1 + \frac{1,8}{100} = 1,018$; $n = 5$

určit: a_5

$$A_5 = A_0 \cdot (1,018)^5 \doteq 25\,802$$

→ Za jak dlouho stoupne počet obyvatel o 25%?

$$\cancel{23600} \cdot 1,25 = \cancel{23600} \cdot 1,018^n$$

$$\ln 1,25 = n \cdot \ln 1,018 \Rightarrow n = \frac{\ln 1,25}{\ln 1,018} \doteq 12,51 \doteq 13 \text{ let}$$

3. Př: Jaký bude přírůstek na termínovaném účtu za 2 roky, vložíme-li 16000 Kč, úrokovací období je ½ roku; roční úrok 10% a daň 15%?

$$S_4 = 16000\left(1 + \frac{10}{100}\cdot\frac{85}{100}\right)^4 \doteq 22\,173,74 \text{ (Kč)}$$
přírůstek 6173,74 Kč

4. Př: Kolik naspoříme za 1 rok, budeme-li každé čtvrtletí vkládat částku 5000 Kč? Roční úrok je 6% a úrokovací období ¼ roku.

$n = 4$; úrok za 1 obd. $\frac{6\%}{4} = 1,5\%$

$$S = 5000 \cdot \frac{\left[1 + 0,85 \cdot \frac{1,5}{100}\right]^5 - 1}{0,85 \cdot 0,015} \doteq 25\,645,68 \text{ Kč}$$

5. Př: Spojitý úrok; částka 1000 Kč $p = 10\%$; $d = 15\%$

bez daně: $y(1) = 1000 \cdot e^{\frac{1}{10}\cdot 1} = 1105,17$ Kč

s daní: $y(1) = 1000 \cdot e^{\frac{85}{100}\cdot\frac{1}{10}\cdot 1} = 1088,72$ Kč d (2)

6. PŘ: Uvažujme Logistický problém $\frac{dP}{dt} = P \cdot k\left(1-\frac{P}{M}\right)$; $P(0)=P_0$

a) vyřešte OŘ, PŘ

b) uvažujte $k=0{,}08$; $M=1000$; $P(0)=100$
určete $P(40)$; $P(80)$; v jakém čase bude $P(t)=900$

c) nakreslete sigmoidální křivku pro $0<t<80$

---

a) $\frac{dP}{dt} = P \cdot k\left(1-\frac{P}{M}\right)$

separace: $\int \frac{dP}{P\left(1-\frac{P}{M}\right)} = k\int dt$

$$\int \frac{dP}{P\left(1-\frac{P}{M}\right)} = \int \frac{dP}{P \cdot \frac{M-P}{M}} = \int \frac{M\,dP}{P(M-P)} = M\int \frac{dP}{P(M-P)} \ominus$$

parciální zlomky $\frac{1}{P(M-P)} = \frac{A}{P} + \frac{B}{M-P} = \frac{AM - AP + BP}{P(M-P)} \Rightarrow$ $P^1: 0=-A+B \rightarrow B=\frac{1}{M}$
$P^0: 1 = AM \Rightarrow A=\frac{1}{M}$

$$\ominus M\left[\int \frac{\frac{1}{M}}{P}dP + \int \frac{\frac{1}{M}}{M-P}dP\right] = \int\frac{dP}{P} - \int\frac{-dP}{M-P} = \ln|P| - \ln|M-P| = \ln\left|\frac{P}{M-P}\right|$$

$$\ln\left|\frac{P}{M-P}\right| = kt + c$$

$$\left|\frac{P}{M-P}\right| = e^{kt+c} = e^c \cdot e^{kt}$$

$\frac{P}{M-P} = A\cdot e^{kt} \Rightarrow$ vyjádříme P: $P = (M-P)\cdot A\cdot e^{kt} = MAe^{kt} - PA\cdot e^{kt}$

$$P(1+Ae^{kt}) = MAe^{kt}$$

$$P = \frac{MAe^{kt}\ (:Ae^{kt})}{1+Ae^{kt}\ (:Ae^{kt})} = \frac{M}{1+\frac{1}{Ae^{kt}}} \overset{\frac{1}{A}=A}{=} \frac{M}{1+Ae^{-kt}}$$

OŘ: $P = \frac{M}{1+Ae^{-kt}}$
konstanta

PP: $P(0)=P_0$
$P_0 = \frac{M}{1+Ae^0} = \frac{M}{1+A} \Rightarrow A = \frac{M-P_0}{P_0}$

PŘ: $P(t) = \frac{M}{1+Ae^{-kt}}$; kde $A = \frac{M-P_0}{P_0}$

$$\lim_{t\to\infty} \frac{M}{1+Ae^{-kt}} = \frac{M}{1+0} = M$$

b) $k = 0{,}08$; $M = 1000$; $P_0 = 100$

$$A = \frac{M - P_0}{P_0} = \frac{1000 - 100}{100} = 9 \Rightarrow P(t) = \frac{1000}{1 + 9 \cdot e^{-0{,}08 t}}$$

$$P(40) = \frac{1000}{1 + 9 \cdot e^{-0{,}08 \cdot 40}} \doteq 731{,}6 \qquad P(80) = \frac{1000}{1 + 9 \cdot e^{-0{,}08 \cdot 80}} \doteq 985{,}3$$

$P(t) = 900$:

$$900 = \frac{1000}{1 + 9 \cdot e^{-0{,}08 \cdot t}}$$

$$900(1 + 9 \cdot e^{-0{,}08 \cdot t}) = 1000$$

$$900 + 8100 e^{-0{,}08 t} = 1000$$

$$e^{-0{,}08 t} = \frac{1000 - 900}{8100} = \frac{1}{81}$$

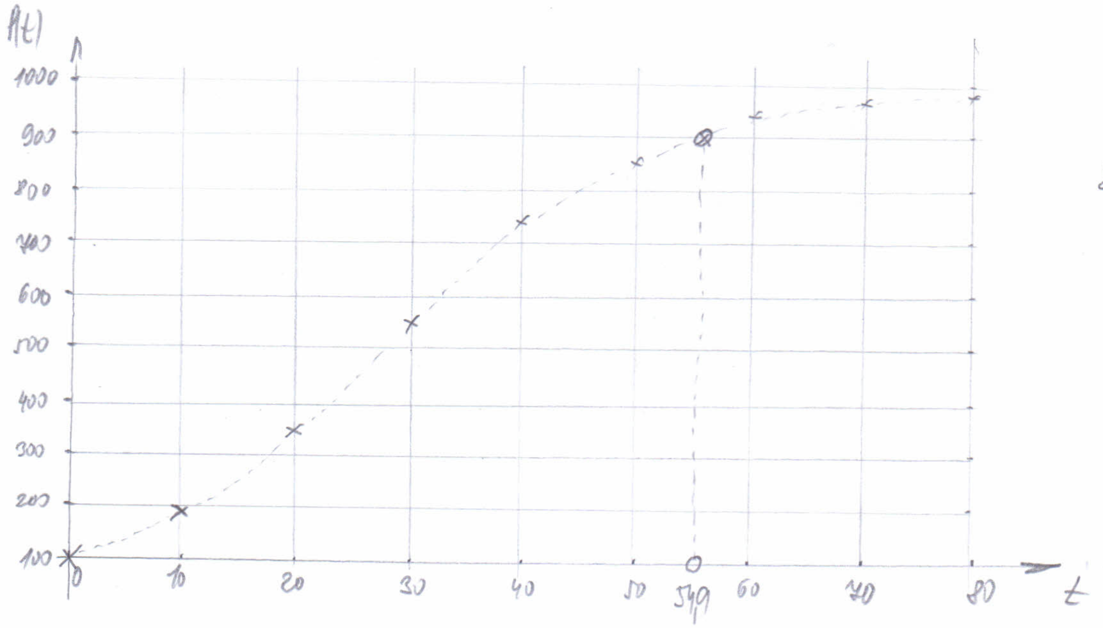
$$\ln e^{-0{,}08 t} = \ln \frac{1}{81}$$

$$-0{,}08 t \ln e = \ln 1 - \ln 81$$

$$t = \frac{\ln 81}{0{,}08} \doteq 54{,}9$$

c)

t	0	10	20	30	40	50	60	70	80
$P(t)$	100	198,3	355	550,5	731,6	858,5	931	967,8	985,3



Sigmoidální křivka