9.7. Vybrané aplikace

Cíle

V rámci témat zaměřených na lineární diferenciální rovnice a soustavy druhého řádu (kapitoly 9.1 až 9.6) jsme dosud neuváděli žádné aplikace. Je jim společně věnována tato závěrečné kapitola, v níž jsou řešeny zejména počáteční úlohy pro evoluční procesy – pohybové rovnice, harmonické kmity, elektrické obvody apod.

Poznámka

Z výše uvedených důvodů je v následujících úlohách nezávisle proměnnou veličinou čas t, ketrý hraje roli dosud používané proměnné x.

Výklad

Ze široké nabídky aplikací, v nichž se v různých oblastech uplatňují diferenciální rovnice druhého řádu nebo soustavy diferenciálních rovnic, je v rámci řešených úloh vybráno do této kapitoly několik typických ukázek zastupujících nejrozšířenější okruhy jejich použití. Při jejich studiu je užitečné si zároveň uvědomit, že v praxi je stejně důležitá znalost postupu řešení jako dovednost sestavit úlohu a matematicky formulovat zadaný problém.

Položíme-li si otázku, proč se při teoretickém popisu procesů a stavů v (nejen) technických a přírodovědných disciplinách setkáváme právě s diferenciálními rovnicemi, je odpověď překvapivě jednoduchá:

diferenciální rovnice jsou přepisem globálních zákonů zachování (energie, hmotnosti, síly, elektrického náboje aj.) **do podoby, v níž je možno studovat stavové, resp. tokové veličiny v daném místě nebo čase včetně jejich lokálních změn**.

Řešené úlohy

Příklad 9.7.1. Vozidlo o hmotnosti m se pohybuje po přímce působením konstatní síly F, která má směr pohybu. Vozidlo překonává odpor R úměrný okamžité rychlosti $v(t)$. Formulujte a řešte pohybovou rovnici pro závislost dráhy $y(t)$ na čase při počátečních podmínkách $y(0) = 0$, $v(0) = 0$.

Řešení: Nejprve si připomeneme potřebné fyzikální vztahy. Rychlost v a zrychlení a jsou derivacemi dráhy podle času, tj.

$$v(t) = \frac{dy}{dt}, \qquad a(t) = \frac{d^2y}{dt^2}.$$

Konstantu úměrnosti zahrnující odpor prostředí a případné tření označíme k, takže bude $R = k.v(t)$. Zákonem zachování síly vyjádříme za použití druhého Newtonova zákona $F = ma$ základní bilanční vztah

$$ma + R = F \quad \Longrightarrow \quad m\,\frac{d^2y}{dt^2} + k\,\frac{dy}{dt} = F\,,$$

který po vydělení hmotností m dává základní pohybovou rovnici

$$y'' + \frac{k}{m}\,y' = \frac{F}{m}\,.$$

Máme před sebou diferenciální rovnici druhého řádu s konstatními koeficienty a s nenulovou pravou stranou, při jejímž řešení uplatníme znalosti z kapitol 9.3. a 9.4. Charakteristická rovnice $r^2 + \frac{k}{m}r = 0$ má kořeny $r_1 = 0,\ r_2 = -\frac{k}{m}$, takže obecné řešení zkrácené rovnice bude mít tvar

$$\hat{y}(t) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t}\,.$$

Partikulární řešení pro úplnou rovnici můžeme hledat metodou neurčitých koeficientů. Protože je však konstatní pravá strana již zastoupena konstantou ve fundamentálním systému (jeden z kořenů charakteristické rovnice je nula), musíme zvolit

$$v(t) = A.t\,, \quad v'(t) = A\,, \quad v'' = 0\,.$$

Po dosazení funkce $v(t)$ a jejích derivací do úplné rovnice snadno vypočteme, že $A = \frac{F}{k}$. Pro obecné řešení a jeho derivaci (rychlost pohybu) tedy vychází

$$y(t) = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + \frac{F}{k}\,t\,, \qquad y'(t) = v(t) = -\frac{k}{m}\,C_2 \mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} + \frac{F}{k}\,.$$

Počáteční podmínky v bodě $t = 0$ vedou na soustavu

$$\begin{aligned} 0 &= C_1 + C_2\,, \\ 0 &= -\tfrac{k}{m}\,C_2 + \tfrac{F}{k}\,, \end{aligned} \qquad \text{odkud} \qquad C_1 = -\frac{Fm}{k^2}\,, \quad C_1 = \frac{Fm}{k^2}\,.$$

Dosazením do obecného řešení a úpravou obdržíme hledanou závislost dráhy na čase:

$$y(t) = \frac{F}{k}\left[t + \frac{m}{k}\left(\mathrm{e}^{-\frac{k}{m}t} - 1\right)\right]\,.$$

Příklad 9.7.2. Na pružině je zavěšeno závaží o hmotnosti m, které je v rovnovážné poloze. Vychýlíme-li je o y_0 a uvolníme (případně mu udělíme určitou počáteční rychlost), dochází v důsledku pružné deformace ke kmitavému pohybu (obr. 9.7.1). Odvoďte příslušnou diferenciální rovnici pro okamžitou výchylku $y(t)$ za předpokladu, že odpor prostředí je přímo úměrný rychlosti pohybu. Proveďte analýzu řešení.

Řešení: Označíme $2b$ faktor vyjadřující odpor okolí, takže odporující síla má velikost $R = 2b.y'(t)$. Rovnováha sil bude vyjádřena rovnicí

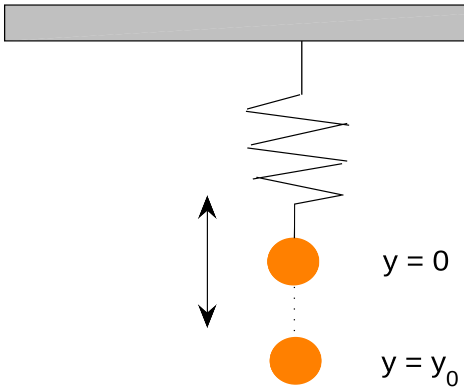
$$m\,\frac{d^2y}{dt^2} + 2b\,\frac{dy}{dt} + k\,y(t) = 0\,,$$

kde k je tuhost pružiny. Dále označíme

$$a = \frac{b}{m} > 0\,, \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

a po vydělení hmotností m obdržíme základní **rovnici vlastních mechanických kmitů v odporujícím prostředí**:

$$y'' + 2ay' + \omega_0^2 y = 0\,.$$



.

Obr. 9.7.1. Obrázek k příkladu 9.7.2.

K ní příslušná charakteristická rovnice $r^2 + 2ar + \omega_0^2 = 0$ má kořeny

$$r_{1,2} = -a \pm \sqrt{a^2 - \omega_0^2}\ .$$

Je zřejmé, že lze rozlišit tři možnosti, které mají zásadní vliv na charakter děje.

(I) $\underline{a^2 - \omega_0^2 > 0, \text{ tj. } a > \omega_0}$

Charakteristická rovnice má dva různé záporné reálné kořeny

$$r_1 = -a + \sqrt{a^2 - \omega_0^2}\ , \qquad r_2 = -a - \sqrt{a^2 - \omega_0^2}\ ,$$

obecným řešením rovnice je exponenciální funkce

$$y(t) = C_1 \mathrm{e}^{r_1 t} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 t} = \mathrm{e}^{-at}\left(C_1 \mathrm{e}^{-\sqrt{a^2-\omega_0^2}t} + C_2 \mathrm{e}^{\sqrt{a^2-\omega_0^2}t}\right)\ .$$

Děj je neperiodický, s rostoucím časem klesá výchylka k nule. Jedná se o **silně tlumený neharmonický pohyb**.

(II) $\underline{a^2 - \omega_0^2 = 0, \text{ tj. } a = \omega_0}$

Charakteristická rovnice má jeden dvojnásobný kořen $r = -a$, obecným řešením je opět výraz s exponenciální funkcí

$$y(t) = (C_1 + C_2 t)\mathrm{e}^{-at}\ .$$

Jde o tzv. **kriticky tlumený pohyb**, který je neperiodický stejně jako předchozí silně tlumený pohyb.

(III) $a^2 - \omega_0^2 < 0$, tj. $a < \omega_0$

Z charakteristické rovnice vychází dvojice komplexně sdružených kořenů

$$r_{1,2} = -a \pm \mathrm{i}\sqrt{\omega_0^2 - a^2} = -a \pm \mathrm{i}\omega \ , \quad \text{kde} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - a^2} \ .$$

Jak víme z dřívější teorie, lze obecné řešení v tomto případě psát ve tvaru

$$y(t) = \mathrm{e}^{-at}(C_1 \cos \omega t + C_2 \sin \omega t) \ .$$

V tomto výsledku ještě provedeme menší úpravy, abychom ho mohli lépe fyzikálně interpretovat. Položíme-li $C_1 = -A \sin \varphi$, $C_2 = A \cos \varphi$, bude pro výraz v závorce platit

$$-A \sin \varphi \cos \omega t + A \cos \varphi \sin \omega t = A \sin(\omega t - \varphi) \ .$$

Obecným řešením je nyní funkce

$$y(t) = A\mathrm{e}^{-at} \sin(\omega t - \varphi) \ ,$$

v níž A je amplituda a φ fáze děje, který nazýváme **slabě tlumený harmonický pohyb**. Jeho perioda je

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - a^2}}$$

a má amplitudu $A\mathrm{e}^{-at}$, která s časem klesá k nule.

Poznámka

1. Snadno lze potlačit vliv odporu prostředí tak, že v základní rovnici položíme $a = 0$. *Příslušné důsledky pro řešení si odvoďte samostatně.*

2. Zatímco v případě reálných kořenů – varianta (I) a (II) – se při aplikaci počátečních podmínek neodchylujeme od dříve zavedeného postupu, v případě periodického děje se amplituda a fáze určují způsobem, který je poněkud specifický, a proto mu věnujeme následující řešený příklad.

Příklad 9.7.3. Vyšetřete harmonický pohyb popsaný rovnicí $y''+2y'+101y=0$ s počátečními podmínkami $y(0)=1,\ y'(0)=9$.

Řešení: V rovnici je $a=1$ menší než úhlová frekvence $\omega_0=101$, proto se jedná tlumený periodický pohyb o frekvenci

$$\omega=\sqrt{\omega_0^2-a^2}=10\ ,$$

který je popsán funkcí

$$y(t)=A\mathrm{e}^{-t}\sin(10t-\varphi)\ .$$

Přistoupíme nyní k výpočtu amplitudy a fáze z počátečních podmínek. Protože

$$y'(t)=-A\mathrm{e}^{-t}\sin(10t-\varphi)+10A\mathrm{e}^{-t}\cos(10t-\varphi)\ ,$$

obdržíme pro $t=0$ soustavu

$$\begin{aligned} 1 &= -A\sin\varphi\ ,\\ 9 &= A\sin\varphi+10A\cos\varphi\ . \end{aligned}$$

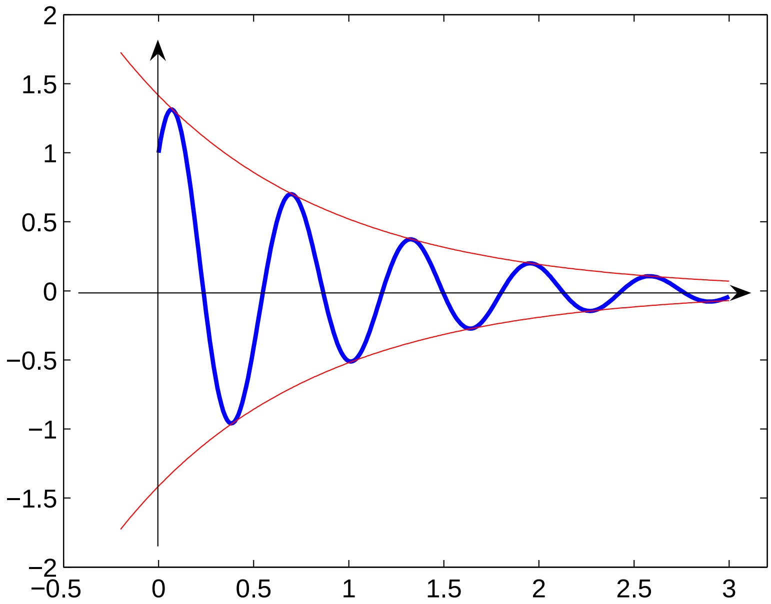
Dosadíme-li z první rovnice do druhé (nebo: sečteme-li obě rovnice), vychází jednodušší rovnice $1=A\cos\varphi$, kterou použijeme spolu s první rovnicí:

$$\begin{aligned} 1 &= -A\sin\varphi\ ,\\ 1 &= A\cos\varphi\ . \end{aligned}$$

Jestliže obě rovnice umocníme na druhou a sečteme, máme $2=A^2 \quad\Rightarrow A=\sqrt{2}$; vydělíme-li první rovnici druhou, bude $1=-\mathrm{tg}\,\varphi \quad\Rightarrow \varphi=-\frac{\pi}{4}$. Výsledný tlumený harmonický pohyb je tedy určen předpisem

$$y(t)=\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-t}\sin(10t+\frac{\pi}{4})\ .$$

Část grafu této funkce je na obr. 9.7.2.



Obr. 9.7.2. Harmonické tlumené kmity - k příkladu 9.7.3. Červeně jsou znázorněny funkce $\pm\sqrt{2}\,\mathrm{e}^{-t}$ charakterizující úbytek amplitudy.

Příklad 9.7.4. Proveďte analýzu proudových poměrů v primárním a sekundárním obvodu transformátoru (obr. 9.7.3) za těchto předpokladů:

– primární vinutí je napájeno napětím $u(t)$, ohmická zátěž sekundárního vinutí je R,

– indukčnosti a odpory primárního a sekundárního obvodu jsou po řadě $L_1,\ R_1,\ L_2,\ R_2$,

– vzájemná indukčnost je M,

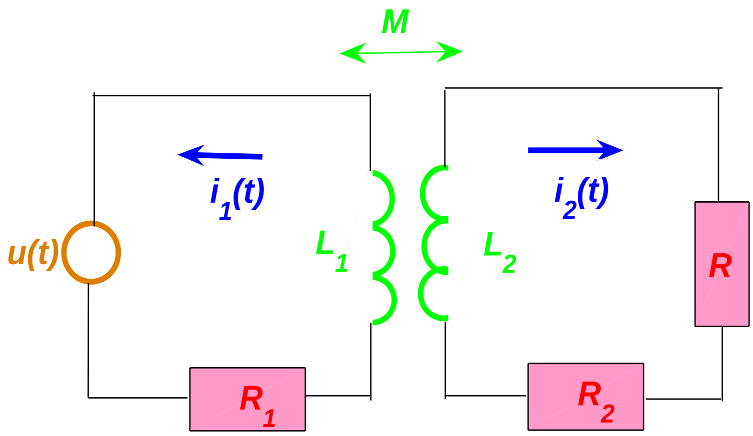
– počáteční proudy jsou nulové.

Řešení: Pro proudy $i_1(t)$ a $i_2(t)$ na základě Kirchhoffových zákonů platí:

$$L_1\,\frac{di_1(t)}{dt} + M\,\frac{di_2(t)}{dt} + R_1 i_1(t) \;=\; u(t)\ ,$$

$$M\,\frac{di_1(t)}{dt} + L_2\,\frac{di_2(t)}{dt} + (R_2+R)i_2(t) \;=\; 0\ .$$

Jedná se o soustavu dvou lineárních diferenciálních rovnic prvního řádu pro proudy $i_1(t)$, $i_2(t)$ s počátečními podmínkami $i_1(0) = 0$, $i_2(0) = 0$. Jako sa-



.

Obr. 9.7.3. Primární a sekundární obvod transformátoru.

mostatné cvičení si můžete provést převod této úlohy eliminační metodou na diferenciální rovnici druhého řádu například pro funkci $i_1(t)$ s tímto výsledkem:

$$(L_1 L_2 - M^2)\, i_1'' + [L_1(R+R_2) + L_2 R_1]\, i_1' + R_1(R+R_2)\, i_1 = (R+R_2)\, u + L_2\, u' \,.$$

Úlohy k samostatnému řešení

1. Těleso o hmotnosti m se pohybuje po přímce z bodu A do bodu B působením konstatní síly F, která má směr pohybu. Odpor prostředí je přímo úměrný vzdálenosti tělesa od bodu B, přičemž v bodě A je jeho hodnota f. Odvoďte a řešte jeho pohybovou rovnici za předpokladů, že $f < F$ a že rychlost v bodě A je nulová.

2. Sestavte jednoduchý model uzavřeného systému „kořist – dravec" z hlediska časového vývoje počtu jedinců v obou populacích. U funkcí představujících počty zástupců v populacích předpokládejte spojitost v čase. Uvažujte následující faktory, na nichž proces závisí lineárně s konstantními koeficienty:

– reprodukční schopnost každé z populací,

– úbytek kořisti působením dravců,

– přírůstek populace dravců jako důsledek dostatku potravy.

3. Napište diferenciální rovnici pro tlumené nucené kmity s vlastní frekvencí

ω_0 a tlumícím faktorem $2a$. Nutící síla vztažená na jednotku hmotnosti má amplitudu F, úhlovou frekvenci Ω a nulový fázový posuv. Úlohu řešte pro hodnoty $a = 0,05$, $\omega_0^2 = 1,0025$, $F = 30$ a $\Omega = 3$.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. Označíme-li $y(t)$ dráhu jako funkci času a s vzdálenost bodů A, B, je odporová síla vyjádřena vztahem $R = k(s - y)$, kde k je konstanta úměrnosti. V bodě A, kde je $y = 0$, platí podle předpokladu $R = f = k.s$, tj. $k = f/s$. Při rovnováze sil je $my'' = F - R$, tedy po úpravě

$$y'' - \frac{f}{sm} y = \frac{F - f}{m} ,$$

což je hledaná pohybová rovnice. Její řešení má tvar

$$y(t) = \frac{s}{2f}(F - f) \left(\mathrm{e}^{bt} - \mathrm{e}^{-bt}\right)^2 , \qquad \text{kde} \qquad b = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{f}{sm}} .$$

2. Označíme $x(t)$ počet jedinců v populaci kořisti, tj. potravy pro populaci dravců, v níž počet jedinců bude $y(t)$. V lineárním modelu zavedeme nezáporné konstanty a, b, c, d, s jejichž pomocí vyjádříme zadané změny v populacích:

ax, cy ... reprodukční schopnost příslušné populace,

by ... úbytek kořisti působením dravců,

dx ... přírůstek populace dravců jako důsledek dostatku potravy.

Chování systému v závislosti na čase vyjadřuje soustava diferenciálních rovnic

$$\frac{dx}{dt} = ax - by , \qquad \frac{dy}{dt} = dx + cy .$$

Počátečními podmínkami jsou výchozí stavy populací.

3. Nutící síla bude tvořit pravou stranu diferenciální rovnice kmitů, která tak bude mít tvar

$$y'' + 2ay' + \omega_0^2 y = F \sin \Omega t , \qquad \text{tj.} \qquad y'' + 0,1y' + 1,0025y = 30 \sin 3t .$$

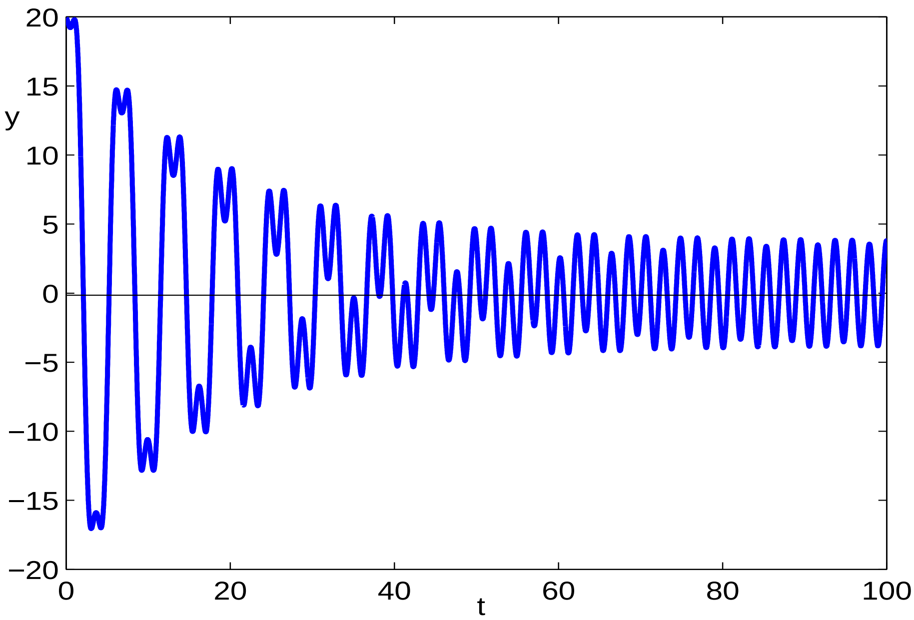
Její obecné řešení budeme hledat ve tvaru

$$y(t) = A\mathrm{e}^{-at}\sin(\omega t - \varphi) + v(t) \ ,$$

kde $v(t) = B\sin(\Omega t - \psi)$ je partikulární integrál. Jeho parametry B, ψ určíme metodou neurčitých koeficientů. Dále je $\omega = \sqrt{\omega_0^2 - a^2}$ a konstanty A a φ stanovíme z počátečních podmínek. Konečný výsledek představuje funkce

$$y(t) = 23,57\mathrm{e}^{-0,05t}\sin(t + 1,02) + 3,75\sin(3t - 3,10) \ .$$

Na jejím grafu (obr. 9.7.4) je dobře patrný přechod od vlastních kmitů ke stadiu, v němž systém kmitá zcela pod vlivem nutící síly.



Obr. 9.7.4. Přechod od vlastních kmitů k nuceným – k úloze 3.

Poznámka

Ve speciálním případě může nastat případ $\omega = \Omega$, rovná-li se frekvence vlastních kmitů frekvenci nutící síly. Z fyzikálního hlediska dochází k tzv. rezonanci, matematické řešení se najde na principu varianty (III) na str. 397 (kap. 9.4). Obecné odvození pro tuto situaci lze nalézt například v publikaci [18].