

9.3. Úplná lineární rovnice s konstantními koeficienty

Cíle



Nyní přejdeme k řešení úplné lineární rovnice druhého řádu. I v tomto případě si nejprve ujasníme, v jakém tvaru můžeme očekávat řešení, poté se zaměříme na rozšíření metody variace konstant na rovnice druhého řádu.

Výklad



Věta 9.3.1.

Obecné řešení úplné lineární rovnice druhého řádu

$$a_2(x) y''(x) + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y(x) = b(x)$$

má tvar

$$y(x) = \tilde{y}(x) + v(x) ,$$

kde $\tilde{y}(x)$ je obecné řešení zkrácené rovnice a $v(x)$ je libovolné řešení (tzv. **partikulární integrál**) úplné rovnice.

Důkaz: Podle předpokladů je

$$a_2 \tilde{y}'' + a_1 \tilde{y}' + a_0 \tilde{y} = 0, \text{ neboť se jedná o obecné řešení zkrácené rovnice,}$$

$$a_2 v'' + a_1 v' + a_0 v = b, \text{ protože } v(x) \text{ je řešením úplné rovnice.}$$

Dosadíme-li do rovnice $a_2 y'' + a_1 y' + a_0 y = b$ předpokládané řešení, bude

$$a_2(\tilde{y}'' + v'') + a_1(\tilde{y}' + v') + a_0(\tilde{y} + v) = b ,$$

$$\text{tj.} \quad a_2 \tilde{y}'' + a_1 \tilde{y}' + a_0 \tilde{y} + a_2 v'' + a_1 v' + a_0 v = b.$$

Uplatníme-li oba uvedené předpoklady, je tato rovnost identicky splněna.

Výklad

Máme řešit úpnou lineární rovnici druhého řádu

$$a_2(x) y''(x) + a_1(x) y'(x) + a_0(x) y(x) = b(x)$$

za předpokladu, že známe řešení zkrácené rovnice

$$\hat{y} = C_1 y_1(x) + C_2 y_2(x) .$$

Stejně jako u lineárních rovnic prvního řádu budeme předpokládat, že obecné řešení úplné rovnice má stejný tvar jako řešení zkrácené rovnice, kde však figurují namísto konstant vhodné funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$. Tento postup se i zde označuje jako **metoda variace konstant**. Hledaný tvar řešení bude tedy

$$y = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) ,$$

a jeho první derivace

$$y' = C_1' y_1 + C_1 y_1' + C_2' y_2 + C_2 y_2' .$$

Volba dvojice nových funkcí dovoluje stanovit vhodnou doplňující podmínku pro jejich vzájemný vztah. Nejvýhodnější – pro snadný další postup – je požadavek, aby

$$C_1' y_1 + C_2' y_2 = 0 .$$

Po dosazení do derivace bude tedy pouze

$$y' = C_1 y_1' + C_2 y_2'$$

a můžeme vyčíslit druhou derivaci

$$y'' = C_1' y_1' + C_1 y_1'' + C_2' y_2' + C_2 y_2'' .$$

Získané vztahy pro funkci $y(x)$ a její derivace dosadíme do úplné rovnice a upravíme:

$$C_1(a_2 y_1'' + a_1 y_1' + a_0 y_1) + C_2(a_2 y_2'' + a_1 y_2' + a_0 y_2) + a_2(C_1' y_1' + C_2' y_2') = b .$$

Výrazy v prvních dvou závorkách jsou rovny nule, neboť jak y_1 , tak y_2 jsou řešením zkrácené rovnice. Zůstává tedy pouze rovnost $a_2(C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2) = b$, kterou v mírně upravené podobě zapíšeme spolu s dříve zvolenou podmínkou:

$$\begin{aligned} C'_1 y_1 + C'_2 y_2 &= 0, \\ C'_1 y'_1 + C'_2 y'_2 &= \frac{b}{a_2}. \end{aligned}$$

Získali jsme algebraickou soustavu rovnic pro derivace hledaných funkcí $C_1(x)$, $C_2(x)$, kterou musíme vyřešit. V první řadě vidíme, že determinant této soustavy je vlastně wronskianem $W(x)$ fundamentálního systému zkrácené rovnice (je proto nenulový). Z něj snadno zkonstruujeme determinanty $W_1(x)$, $W_2(x)$ tak, že příslušný sloupec nahradíme sloupцем pravých stran soustavy:

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & y_2 \\ \frac{b}{a_2} & y'_2 \end{vmatrix}, \quad W_2(x) = \begin{vmatrix} y_1 & 0 \\ y'_1 & \frac{b}{a_2} \end{vmatrix}.$$

Výrazy pro derivace $C'_1(x)$, $C'_2(x)$ získáme snadno pomocí Cramerových vzorců známých z lineární algebry:

$$C'_1(x) = \frac{W_1(x)}{W(x)}, \quad C'_2(x) = \frac{W_2(x)}{W(x)}.$$

Odtud integrací obdržíme

$$C_1(x) = \int \frac{W_1(x)}{W(x)} dx + K_1, \quad C_2(x) = \int \frac{W_2(x)}{W(x)} dx + K_2,$$

kde K_1 , K_2 jsou reálné konstanty. Závěrečným krokem je zpětné dosazení těchto výsledků do původního výrazu $y = C_1(x)y_1(x) + C_2(x)y_2(x)$, odkud obdržíme finální tvar obecného řešení úplné rovnice:

$$y(x) = \left(\int \frac{W_1(x)}{W(x)} dx + K_1 \right) y_1(x) + \left(\int \frac{W_2(x)}{W(x)} dx + K_2 \right) y_2(x).$$

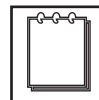
Předchozí výsledek můžeme zapsat i v poněkud odlišném uspořádání, z kterého je vidět, že podoba získaného řešení je v souladu s větou 9.3.1.:



$$y(x) = \underbrace{K_1 y_1(x) + K_2 y_2(x)}_{\hat{y}(x)} + \underbrace{y_1(x) \int \frac{W_1(x)}{W(x)} dx + y_2(x) \int \frac{W_2(x)}{W(x)} dx}_{v(x)}. \quad (*)$$

Poznámka

Třebaže se odvození základních vztahů pro metodu variace konstant jeví komplikovaně, je její aplikace velmi přehledná, jak ukazují následující řešené úlohy. Jisté problémy mohou však nastat při výpočtu integrálů.

**Řešené úlohy**

Příklad 9.3.1. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 2y' - 8y = 30e^{3x}$.

Řešení:

1. Nejprve vyřešíme zkrácenou rovnici $y'' - 2y' - 8y = 0$. Charakteristická rovnice $r^2 - 2r - 8 = 0$ má kořeny $r_1 = -2$, $r_2 = 4$, proto funkce fundamentálního systému budou

$$y_1 = e^{-2x}, \quad y_2 = e^{4x}.$$

2. Nyní realizujeme algoritmus metody variace konstant. Nejprve vyčíslíme wronskian a odvozené determinanty:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{4x} \\ -2e^{-2x} & 4e^{4x} \end{vmatrix} = 6e^{2x},$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & e^{4x} \\ 30e^{3x} & 4e^{4x} \end{vmatrix} = -30e^{7x},$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} e^{-2x} & e^{4x} \\ 0 & 30e^{3x} \end{vmatrix} = 30e^x.$$

Pro funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$ tak obdržíme integrály

$$C_1(x) = \int \frac{W_1(x)}{W(x)} dx = -5 \int e^{5x} dx = -e^{5x} + K_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{W_2(x)}{W(x)} dx = 5 \int e^{-x} dx = -5e^{-x} + K_2.$$

3. Výslednou podobu hledaného řešení vytvoříme na základě formule (*):

$$y(x) = K_1 e^{-2x} + K_2 e^{4x} + e^{-2x}(-e^{5x}) + e^{4x}(-5e^{-x}) = K_1 e^{-2x} + K_2 e^{4x} - 6e^{3x}.$$

Příklad 9.3.2. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 2y' + y = \frac{e^x}{x^2 + 1}$.

Řešení:

1. Charakteristická rovnice $r^2 - 2r + 1 = 0$ má dvojnásobný kořen $r = 1$, což vede k fundamentálnímu systému $y_1 = e^x$, $y_2 = xe^x$.

2. Wronskian a odvozené determinanty:

$$W(x) = \begin{vmatrix} e^x & xe^x \\ e^x & (x+1)e^x \end{vmatrix} = e^{2x},$$

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & xe^x \\ \frac{e^x}{x^2+1} & (x+1)e^x \end{vmatrix} = -\frac{xe^{2x}}{x^2+1},$$

$$W_2(x) = \begin{vmatrix} e^x & 0 \\ e^x & \frac{e^x}{x^2+1} \end{vmatrix} = \frac{e^{2x}}{x^2+1}.$$

Funkce $C_1(x)$, $C_2(x)$:

$$C_1(x) = \int \frac{W_1(x)}{W(x)} dx = -\int \frac{x}{x^2+1} dx = -\frac{1}{2} \ln(x^2+1) + K_1,$$

$$C_2(x) = \int \frac{W_2(x)}{W(x)} dx = \int \frac{dx}{x^2+1} = \operatorname{arctg} x + K_2.$$

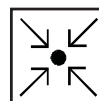
3. Výsledné řešení opět podle obecné formule (*):

$$y(x) = e^x(K_1 + K_2 x) - \frac{1}{2} e^x \ln(x^2+1) + x e^x \operatorname{arctg} x.$$

Kontrolní otázky

Otázka 1. *Popište strukturu obecného řešení úplné LDR druhého řádu.*

Otázka 2. *Vysvětlete základní princip metody variace konstant pro rovnici 2. řádu.*

Úlohy k samostatnému řešení

1. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 2y' = xe^x$.

2. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - y' - 12y = 14e^x$.

3. Najděte při počátečních podmínkách $y(1) = e$, $y'(1) = 2e$ řešení rovnice

$$y'' - 2y' + y = 3\sqrt{x}e^x.$$

4. Najděte obecné řešení rovnice

$$y'' + 3y' + 2y = \frac{e^{-x}}{e^x + 1}.$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. $y = C_1 e^{2x} + C_2 - x e^x$.

2. $y = C_1 e^{4x} + C_2 e^{-3x} - \frac{7}{6} e^x$.

3. $y = \frac{e^x}{10} (8\sqrt{x^5} + 5x - 3)$.

4. $y = C_1 e^{-x} + C_2 e^{-2x} - e^{-x} \ln(1 + e^{-x}) - e^{-2x} \ln(1 + e^x)$.