9.2. Zkrácená lineární rovnice s konstantními koeficienty

Cíle

Řešíme-li konkrétní aplikace, které jsou popsány diferenciálními rovnicemi, velmi často zjistíme, že fyzikální nebo další parametry (hmotnost, hustota, frekvence, elektrický odpor aj.), které obvykle vystupují jako koeficienty rovnice, jsou konstantami. Takovéto úlohy tvoří základní skupinu mezi lineárními rovnicemi a budeme se jimi proto zabývat podrobně. V neposlední řadě je důvodem také možnost získat jejich řešení analytickými metodami, což v případě obecnějších typů rovnic není obvykle dosažitelné.

Výklad

Zaměříme se na **zkrácené rovnice druhého řádu s konstantními koeficienty**, jejichž obecný tvar je

$$a_2\, y''(x) + a_1\, y'(x) + a_0\, y(x) = 0\ ,$$

kde $a_0,\ a_1,\ a_2$ jsou reálné koeficienty. Ukážeme nejprve zásadní skutečnost, že existují řešení této rovnice ve tvaru

$$y(x) = \mathrm{e}^{rx}\ ,$$

kde r je zatím nespecifikovaná konstanta. Snadno určíme derivace

$$y'(x) = r\mathrm{e}^{rx}\ , \quad y''(x) = r^2\mathrm{e}^{rx}\ ,$$

které dosadíme do původní rovnice. Po vydělení výrazem e^{rx} dostáváme

$$a_2\, r^2 + a_1\, r + a_0 = 0\ ,$$

což je kvadratická rovnice pro neznámou r. Tento výsledek znamená, že funkce $y(x) = \mathrm{e}^{rx}$ bude řešením diferenciální rovnice právě tehdy, když r bude řešením příslušné algebraické rovnice.

Definice 9.2.1.

Kvadratickou rovnici $a_2\ r^2 + a_1\ r + a_0 = 0$ nazýváme **charakteristickou rovnicí** diferenciální rovnice $a_2\ y''(x) + a_1\ y'(x) + a_0\ y(x) = 0$.

Výklad

Jak vidíme, je charakteristická rovnice kvadratickou rovnicí, která může mít reálné či komplexní kořeny, v prvním případě i násobné. Půjde nyní o to, ukázat, jak lze s pomocí těchto kořenů najít fundamentální systém řešení (a tedy i obecné řešení) diferenciální rovnice druhého řádu. Klíčové tvrzení obsahuje následující věta.

Věta 9.2.1.

Mějme lineární diferenciální rovnici druhého řádu s konstantními koeficienty

$$a_2\ y''(x) + a_1\ y'(x) + a_0\ y(x) = 0\ ,$$

s charakteristickou rovnicí $\quad a_2\ r^2 + a_1\ r + a_0 = 0.$

(a) Má-li charakteristická rovnice dva různé reálné kořeny $r_1,\ r_2$, má diferenciální rovnice fundamentální systém $y_1 = \mathrm{e}^{r_1 x},\ y_2 = \mathrm{e}^{r_2 x}$ a její obecné řešení je

$$y = C_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + C_2 \mathrm{e}^{r_2 x}\ , \quad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}\ .$$

(b) Má-li charakteristická rovnice dvojnásobný reálný kořen r, má diferenciální rovnice fundamentální systém $y_1 = \mathrm{e}^{rx},\ y_2 = x\mathrm{e}^{rx}$ a její obecné řešení je

$$y = C_1 \mathrm{e}^{rx} + C_2 x \mathrm{e}^{rx} = \mathrm{e}^{rx}\left(C_1 + C_2 x\right)\ , \quad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}\ .$$

(c) Má-li charakteristická rovnice komplexní kořeny $r_{1,2} = \alpha \pm \mathrm{i}\beta$, má diferenciální rovnice fundamentální systém $y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x,\ y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$ a její obecné řešení je

$$y = C_1 \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\ + C_2 \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\ , \quad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}\ .$$

Důkaz: Dokazování je postaveno na ověření lineární nezávislosti příslušné dvojice řešení.

(a) Dosazením snadno ověříme, že funkce $y_1 = \mathrm{e}^{r_1 x}$, $y_2 = \mathrm{e}^{r_2 x}$ vyhovují diferenciální rovnici. Například pro $y_1 = \mathrm{e}^{r_1 x}$ je $y_1' = r_1 \mathrm{e}^{r_1 x}$, $y_1'' = r_1^2 \mathrm{e}^{r_1 x}$ a platí tedy

$$a_2 r_1^2 \mathrm{e}^{r_1 x} + a_1 r_1 \mathrm{e}^{r_1 x} + a_0 \mathrm{e}^{r_1 x} = \left(a_2 r_1^2 + a_1 r_1 + a_0\right) \mathrm{e}^{r_1 x} = 0 \ ,$$

neboť výraz v závorce je nulový, protože r_1 je kořenem charakteristické rovnice. Lineární nezávislost dokážeme pomocí wronskianu:

$$W(x) = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 \\ y_1' & y_2' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{r_1 x} & \mathrm{e}^{r_2 x} \\ r_1 \mathrm{e}^{r_1 x} & r_2 \mathrm{e}^{r_2 x} \end{vmatrix} = (r_2 - r_1) \mathrm{e}^{(r_2 - r_1)x} \ .$$

Protože kořeny r_1 a r_2 jsou různé, je $W(x) \neq 0$, což jsme měli dokázat.

(b) Pro funkci $y_1 = \mathrm{e}^{rx}$ je ověření toho, že se jedná o řešení, stejné jako v případě (a). Pro druhou funkci $y_2 = x\mathrm{e}^{rx}$ po dosazení do rovnice dostáváme

$$a_2 \underbrace{\left(2r\mathrm{e}^{rx} + r^2 x \mathrm{e}^{rx}\right)}_{y_2''} + a_1 \underbrace{\left(\mathrm{e}^{rx} + rx\mathrm{e}^{rx}\right)}_{y_2'} + a_0 x \mathrm{e}^{rx} =$$

$$= \left(a_2 r^2 + a_1 r + a_0\right) x\mathrm{e}^{rx} + (2a_2 r + a_1)\, \mathrm{e}^{rx} = 0 \ .$$

Protože je $r = r_{1,2} = -a_1/2a_2$ dvojnásobný kořen, jsou nulové výrazy v obou posledních závorkách.

Ukažme ještě, že řešení jsou lineárně nezávislá:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{rx} & x\mathrm{e}^{rx} \\ r\mathrm{e}^{rx} & \mathrm{e}^{rx} + rx\mathrm{e}^{rx} \end{vmatrix} = \mathrm{e}^{2rx} \neq 0 \, .$$

(c) V tomto případě by měly představovat fundamentální řešení funkce

$$y_1 = \mathrm{e}^{(\alpha + \mathrm{i}\beta)x} = \mathrm{e}^{\alpha x}\ \mathrm{e}^{\mathrm{i}\beta x}, \quad y_2 = \mathrm{e}^{(\alpha - \mathrm{i}\beta)x} = \mathrm{e}^{\alpha x}\ \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\beta x} \ ,$$

jak se můžeme opět přesvědčit dosazením. Jelikož chceme mít řešení tvořeno reálnými výrazy, použijeme k další úpravě tzv. **Eulerovy vzorce**

$$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}\beta x} = \cos \beta x \pm \mathrm{i} \sin \beta x \ .$$

Po jejich použití vypadá dvojice řešení takto:

$$y_1 = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x + \mathrm{i}\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\ ,$$
$$y_2 = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x - \mathrm{i}\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x\ .$$

Řešením diferenciální rovnice musí být také každá lineární kombinace těchto funkcí, například dvojice

$$\tilde{y}_1 = \frac{1}{2}(y_1 + y_2) = \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x\,, \qquad \tilde{y}_2 = \frac{1}{2\mathrm{i}}(y_1 - y_2) = \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x$$

uvedená ve tvrzení věty. Také pro ni je wronskián nenulový:

$$W(x) = \begin{vmatrix} \mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x & \mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x \\ \alpha\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x - \beta\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x & \alpha\mathrm{e}^{\alpha x}\sin\beta x + \beta\mathrm{e}^{\alpha x}\cos\beta x \end{vmatrix} = \beta\mathrm{e}^{2\alpha x} \neq 0\,.$$

Řešení $\tilde{y}_1,\ \tilde{y}_2$ jsou tudíž lineárně nezávislá a tvoří fundamentální systém.

Poznámka

Uvedená věta zaručuje, že řešení nalezená v souladu s ní budou vždy lineárně nezávislá, není tedy třeba pro jednotlivé aplikace zkoumat, zda je příslušný wronskian nenulový.

Řešené úlohy

Následující trojice příkladů ilustruje praktické použití jednotlivých variant dokázané věty.

Příklad 9.2.1. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - y' - 2y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice $r^2 - r - 2 = 0$ má kořeny $r_1 = 2,\ r_2 = -1$. Fundamentální systém tvoří funkce $y_1 = \mathrm{e}^{2x},\ y_2 = \mathrm{e}^{-x}$, obecné řešení má tvar

$$y(x) = C_1\,\mathrm{e}^{2x} + C_2\,\mathrm{e}^{-x}\ .$$

Příklad 9.2.2. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 4y' + 4y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice $r^2 - 4r + 4 = 0$ má dvojnásobný kořen $r = 2$. Fundamentální systém tvoří funkce $y_1 = \mathrm{e}^{2x}$, $y_2 = x\mathrm{e}^{2x}$, obecné řešení napíšeme například ve tvaru

$$y(x) = C_1\, \mathrm{e}^{2x} + C_2\, x\mathrm{e}^{2x}\ .$$

Příklad 9.2.3. Najděte obecné řešení rovnice $y'' - 6y' + 13y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice $r^2 - 6r + 13 = 0$ má komplexně sdružené kořeny $r_{1,2} = 3 \pm 2\mathrm{i}$. Fundamentální systém v reálném oboru budou podle tvrzení (c) předchozí věty tvořit funkce $y_1 = \mathrm{e}^{3x}\cos 2x$, $y_2 = \mathrm{e}^{3x}\sin 2x$, obecné řešení zapíšeme ve tvaru

$$y(x) = C_1\, \mathrm{e}^{3x}\cos 2x + C_2\mathrm{e}^{3x}\sin 2x.$$

Výklad

Je-li jeden z kořenů charakteristické rovnice roven nule, odpovídá mu ve fundamentálním systému funkce $\mathrm{e}^{0x} = 1$. Speciálně pro rovnici $y'' = 0$ dostáváme fundamentální systém $y_1 = 1$, $y_2 = x$ a tedy obecné řešení $y = C_1 + C_2x$. Výsledek je stejný, jaký bychom obdrželi postupnou dvojí integrací původní rovnice.

Jiný zvláštní případ nastane, má-li charakteristická rovnice pouze ryze imaginární kořeny $\pm\mathrm{i}\beta$. Pak pro $\alpha = 0$ figurují ve fundamentálním systému pouze goniometrické funkce, jak ukazuje druhý z následujících řešených příkladů.

Řešené úlohy

Příklad 9.2.4. Najděte řešení počáteční úlohy $5y'' - y' = 0$, $y(5) = 4$, $y'(5) = 1$.

Řešení: Charakteristická rovnice $5r^2 - r = 0$ má kořeny $r_1 = \frac{1}{5}$, $r_2 = 0$. Fundamentální systém tentokrát tvoří funkce $y_1 = \mathrm{e}^{\frac{x}{5}}$, $y_2 = 1$, obecné řešení má tvar

$$y(x) = C_1 \mathrm{e}^{\frac{x}{5}} + C_2 \ .$$

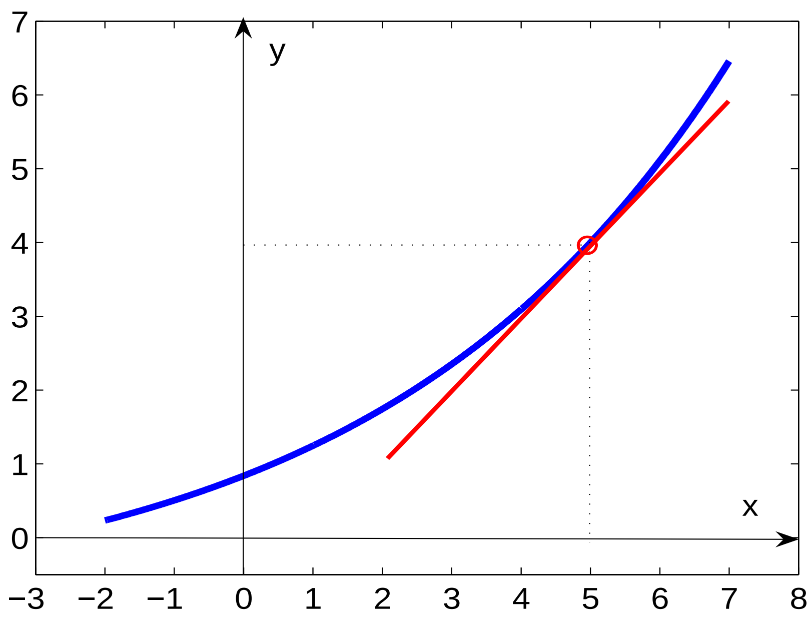
Výpočet konstant pro počáteční podmínky:

$$\begin{array}{rcccl} & & y(5) = 4 & \dots & 4 = C_1\mathrm{e} + C_2 \ , \\ y' = \frac{1}{5}C_1\mathrm{e}^{\frac{x}{5}} & \dots & y'(5) = 1 & \dots & 1 = \frac{1}{5}C_1\mathrm{e} \ . \end{array}$$

Odtud $C_1 = \frac{5}{\mathrm{e}}$, $C_2 = -1$ a tedy

$$y_p(x) = 5\mathrm{e}^{\frac{x}{5}-1} - 1 \ .$$

Na obr. 9.2.1 vidíme část grafu této funkce, kde je vedle bodu $[5, 4]$, odpovídajícího – podobně jako u rovnic prvního řádu – podmínce pro funkční hodnotu $y(5) = 4$ také část tečny v tomto bodě. Ta má směrnici rovnu jedné, a proto svírá s osou x úhel $\pi/4$. Znázorňuje druhou počáteční podmínku $y'(5) = 1$.



Obr. 9.2.1. Graf řešení počáteční úlohy z příkladu 9.2.4.

Příklad 9.2.5. Najděte obecné řešení rovnice $y'' + 9y = 0$.

Řešení: Charakteristická rovnice $r^2 + 9 = 0$ má kořeny $r_1 = 3\mathrm{i}$, $r_2 = -3\mathrm{i}$. Fundamentální systém tvoří dvojice $y_1 = \cos 3x$, $y_2 = \sin 3x$, obecné řešení je jejich lineární kombinací:

$$y(x) = C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x\ .$$

Kontrolní otázky

Otázka 1. *Objasněte pojem „charakteristická rovnice”.*

Otázka 2. *Popište tvar obecného řešení LDR 2. řádu s konstantními koeficienty, má-li její charakteristická rovnice*

a) různé reálné nenulové kořeny,

b) různé reálné kořeny, z nichž jeden je nulový,

c) dvojnásobný nenulový reálný kořen.

Otázka 3. *Popište formu obecného řešení v případě, že charakteristická rovnice má*

a) komplexní kořeny $\alpha \pm \beta\mathrm{i}$, $\alpha \neq 0$,

b) komplexní kořeny $\pm\beta\mathrm{i}$.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte wronskian fundamentálního systému řešení z příkladu 9.2.5.

2. Najděte obecná řešení rovnic s konstantními koeficienty:

a) $4y'' - y = 0$, b) $y'' + 7y' + 10y = 0$,

c) $4y'' + y = 0$, d) $y'' + 8y' + 25y = 0$.

3. Řešte počáteční úlohy:

a) $y'' - y' - 12y = 0$, $y(0) = 5$, $y'(0) = -1$,

b) $y'' + y = 0, \qquad y(\pi) = y'(\pi) = 2,$

c) $y'' + 4y' = 0, \qquad y(0) = 0,\ y'(0) = -12.$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. $W = 3.$

2. a) $y = C_1 \mathrm{e}^{\frac{x}{2}} + C_2 \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}},$ b) $y = C_1 \mathrm{e}^{-2x} + C_2 \mathrm{e}^{-5x},$

c) $y = C_1 \cos \frac{x}{2} + C_2 \sin \frac{x}{2},$ d) $y = \mathrm{e}^{-4x}(C_1 \cos 3x + C_2 \sin 3x).$

3. a) $y = 2\mathrm{e}^{4x} + 3\mathrm{e}^{-3x},$ b) $y = -2\cos x - 2\sin x,$ c) $y = 3\mathrm{e}^{-4x} - 3.$

Kontrolní test

Úloha 1. Jsou dány funkce $y_1(x) = \mathrm{e}^{2x}$, $y_2(x) = \mathrm{e}^{-2x}$. Wronskian této dvojice je

$$\text{a) } 4\,, \qquad \text{b) } -4\,, \qquad \text{c) } 0\,, \qquad \text{d) } 2\mathrm{e}^{-4x}\,.$$

Úloha 2. Jsou dány funkce $y_1 = \sin x$, $y_2 = \sin^2 x$, $y_3 = 1 - \cos 2x$. Které z následujících tvrzení platí pro dvojice z nich utvořené?

a) funkce y_1, y_2 jsou lineárně závislé,

b) funkce y_1, y_3 jsou lineárně závislé,

c) funkce y_2, y_3 jsou lineárně závislé,

d) všechny dvojice jsou lineárně nezávislé.

Úloha 3. Rozhodněte, která z funkcí a) – d) je řešením diferenciální rovnice $y'' + 4y' + 5y = 0$.

a) $y = \mathrm{e}^{2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$,

b) $y = \mathrm{e}^{-x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$,

c) $y = \mathrm{e}^{-2x}(C_1 \cos x + C_2 \sin x)$,

d) $y = \mathrm{e}^{x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$.

Úloha 4. Funkce $y(x)$ je řešením rovnice $6y'' - 5y' - 6y = 0$. Vyberte počáteční podmínky, které splňuje v bodě $x = 0$.

a) $y(0) = 2\,,\ y'(0) = 0$, b) $y(0) = 0\,,\ y'(0) = 2$,

c) $y(0) = 2\,,\ y'(0) = \frac{1}{4}$, d) $y(0) = \frac{1}{4}\,,\ y'(0) = 2$.

Úloha 5. Rozhodněte, která z funkcí a) – d) je řešením počáteční úlohy

$$y'' + 7y' + 12y = 0\,, \quad y(0) = 5, \quad y'(0) = 3\,.$$

a) $y = -18e^{-3x} + 23e^{-4x}$,

b) $y = 23e^{-4x} - 18e^{-3x}$,

c) $y = 23e^{-3x} - 18e^{4x}$,

d) $y = 23e^{-3x} - 18e^{-4x}$.

Úloha 6. Která z dvojic a) – d) tvoří fundamentální systém řešení diferenciální rovnice $y'' - 10y' + 25y = 0$?

a) $y_1 = e^{5x}, \quad y_2 = e^{5x}$,

b) $y_1 = e^{-5x}, \quad y_2 = e^{5x}$,

c) $y_1 = e^{5x}, \quad y_2 = xe^{5x}$,

d) $y_1 = e^{-5x}, \quad y_2 = xe^{5x}$.

Úloha 7. Určete, který z uvedených výsledků je obecným řešením diferenciální rovnice $9y'' + 4y = 0$:

a) $y = C_1 \cos \frac{2}{3}x + C_2 \sin \frac{2}{3}x$,

b) $y = C_1 e^{\frac{2}{3}x} + C_2 e^{-\frac{2}{3}x}$,

c) $y = C_1 \cos \frac{3}{2}x + C_2 \sin \frac{3}{2}x$,

d) $y = C_1 + C_2 e^{-\frac{4}{9}x}$.

Úloha 8. Určete, který z uvedených výsledků je obecným řešením diferenciální rovnice $y'' - 16y' + 68y = 0$:

a) $y = C_1 e^{-8x} \cos 2x + C_2 e^{8x} \sin 2x$,

b) $y = e^{8x}(C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x)$,

c) $y = e^{-2x}(C_1 \cos 8x + C_2 \sin 8x)$,

d) $y = C_1 e^{2x} \cos 8x + C_2 e^{-2x} \sin 8x$.

Úloha 9. Určete, který z uvedených výsledků je obecným řešením diferenciální rovnice $y'' + 4y' = 0$:

a) $y = C_1 \mathrm{e}^{2x} + C_2 \mathrm{e}^{-2x}$,

b) $y = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$,

c) $y = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{4x}$,

d) $y = C_1 + C_2 \mathrm{e}^{-4x}$.

Úloha 10. Určete, který z uvedených výsledků je řešením počáteční úlohy $y'' = 0,\ y(-1) = 3,\ y'(-1) = 2$:

a) $y = 2x - 5$,

b) $y = 2x + 5$,

c) $y = x + 4$,

d) $y = 2 - x$.

Výsledky testu

Číslo úlohy	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Správná odpověď	b)	c)	c)	d)	d)	c)	a)	b)	d)	b)