8.4. Shrnutí ke kapitolám 7 a 8

Shrnutí lekce

Úvodní 7. kapitola přinesla informace o druzích řešení diferenciálních rovnic prvního řádu a stručné teoretické poznatky o podmínkách existence a jednoznačnosti řešení:

1. diferenciální rovnici prvního řádu můžeme psát v jednom z tvarů

$$y' = f(x, y)\ , \qquad F(y', y, x) = 0 \qquad \text{nebo} \qquad P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0\ ;$$

2. počáteční úlohou rozumíme zadání, v němž je diferenciální rovnice doplněna podmínkou $y(x_0) = y_0$, na jejímž základě určíme, které partikulární řešení z množiny funkcí představujících řešení obecné prochází bodem $[x_0, y_0]$;

3. je-li rovnice ve tvaru $y' = f(x, y)$, pak její řešení existuje na každé množině, kde je funkce $f(x, y)$ spojitá; je-li navíc spojitá parciální derivace $f'_y(x, y)$, je řešení jednoznačné.

V kapitole 8 jsme poznali nejčastější typy rovnic prvního řádu a metody jejich řešení. Stručnou rekapitulaci představuje následující tabulka.

Rovnice	Typický tvar	Metoda řešení
separovatelná	$y' = P(x).Q(y)$	přímá separace proměnných
separovatelná	$y' = f(ax + by + c)$	separace po substituci $ax + by + c = z$
homogenní	$y' = f(\frac{y}{x})$	separace po substituci $\frac{y}{x} = z$
exaktní	$P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0$, je-li $P'_y = Q'_x$	určení kmenové funkce
lineární	$y' = P(x)y + Q(x)$	variace konstanty

Pohled na tabulku ukazuje, že ke klíčovým podmínkám úspěšnosti při řešení diferenciálních rovnic patří rozpoznání jejich typu. Níže uvedené úlohy reprezentující problematiku předchozích dvou kapitol mají za cíl mimo jiné procvičení této dovednosti.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Ukažte, že zadané výrazy představují obecné řešení uvedené diferenciální rovnice:

a) $y = \frac{C}{\sin x}\,,\quad x \in (0,\pi)\,;\qquad y' + y\operatorname{cotg} x = 0,$

b) $y^2 - 2xy = C\,,\quad y \neq x\,;\qquad (x-y)y' = y.$

2. Rovnicí $y = x.(C - x)$ je dán systém křivek. Ukažte, že jde o paraboly procházející počátkem souřadného systému (určete souřadnice jejich vrcholu a osu pro libovolné $C \in \mathbb{R}$). Odvoďte diferenciální rovnici tohoto systému a přesvědčte se jejím řešením o správnosti výsledku.

3. Vyřešte rovnici $x^2y' = y^2$. Jakým jejím řešením je funkce $y = x$?

4. Určete typ rovnice a najděte její obecné řešení:

a) $(4x - y)\,dx + x\,dy = 0\,;$ b) $(4x - y)\,dx - x\,dy = 0\,;$

c) $y' - y = x\,;$ d) $3x^2y - 2xy^2 + (x^3 - 2x^2y - 4y^3)y' = 0\,.$

5. Najděte partikulární řešení pro zadanou počáteční podmínku:

a) $3y'\sqrt{xy} = 1\,,\qquad y(0) = 1\,;$

b) $y'\cos x - y\sin x = \operatorname{tg} x\,,\qquad y(\pi) = 1\,;$

c) $(y\ln x + y - 1)\,dx + (x\ln x + \ln y + 1)\,dy = 0\,,\qquad y(1) = 1\,;$

d) $xy' = y - y' - x\,,\qquad y(0) = 1\,.$

6. Označme $y(t)$ počet jedinců v populaci lesních škůdců na určitém území. Předpokládejme spojité změny ve vývoji populace, které jsou za jednotku času úměrné rozdílu mezi počtem narozených a počtem uhynulých jedinců. Uvažujme scénář časového vývoje populace, v němž

(1) výchozí stav je y_0 škůdců,

(2) počet narozených jedinců je úměrný jejich počtu (konstanta úměrnosti a),

(3) počet uhynulých jedinců se mění úměrně druhé mocnině jejich počtu (konstanta úměrnosti b).

Diferenciální rovnice s počáteční podmínkou popisující tento proces má tvar

$$\frac{dy}{dt} = ay - by^2 \,, \qquad y(0) = y_0 \,.$$

Najděte řešení této úlohy a stanovte, při jakém výchozím stavu y_0 bude při pevných hodnotách a, b počet škůdců klesat. Určete, na jaké hodnotě se jejich počet ustálí.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

2. Doplněním pravé strany na čtverec dostáváme rovnici

$$y - \frac{C^2}{4} = -\left(x - \frac{C}{2}\right)^2 \,,$$

což je rovnice paraboly s vrcholem $[\frac{C}{2}, \frac{C^2}{4}]$ a osou, která jím prochází rovnoběžně se souřadnou osou y. Několik takových křivek je na obr. 8.4.1, příslušná diferenciální rovnice má tvar $xy' - y + x^2 = 0$.

3. Obecné řešení: $y = \frac{x}{1-Cx}$, funkce $y = x$ je partikulárním řešením pro $C = 0$.

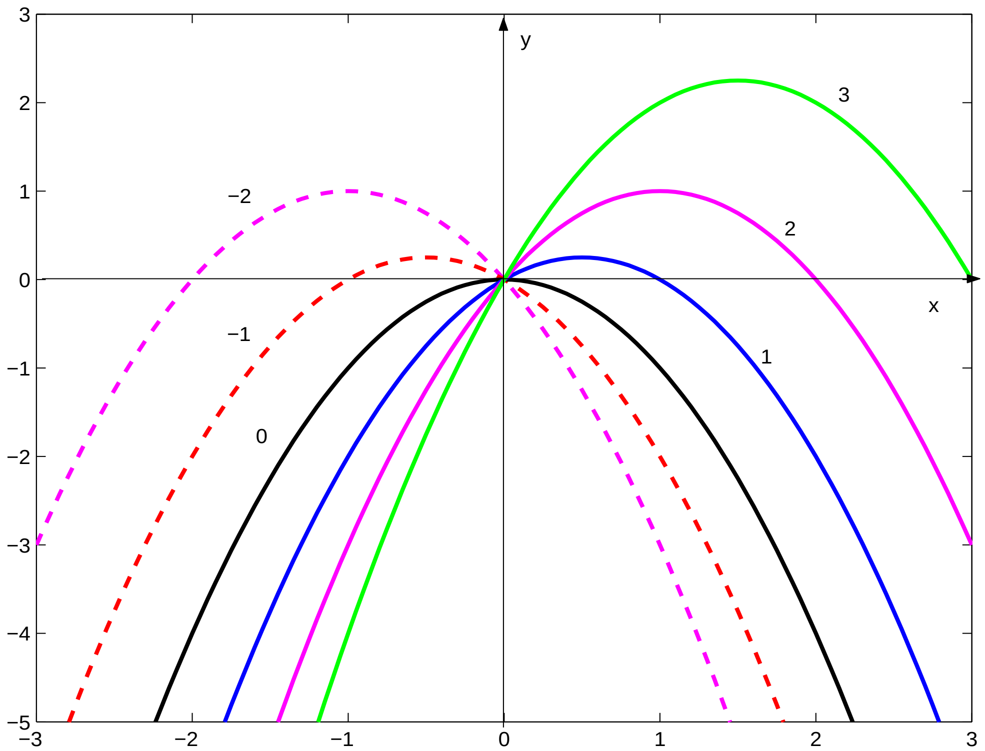
4. a) homogenní, $y = Cx - 4x \ln x$; b) homogenní, exaktní, $y = 2x - \frac{C}{x}$;
c) lineární, $y = C\mathrm{e}^x - x - 1$; d) exaktní, $x^3y - x^2y^2 - y^4 = C$.

5. a) $y^3 = (\sqrt{x} + 1)^2$; b) $y = -\frac{1+\ln\cos x}{\cos x}$; c) $xy \ln x + y \ln y - x + 1 = 0$;
d) $y = (x + 1) \ln(x + 1) - x^2 + 1$.

6. Časový vývoj populace bude popsán funkcí

$$y(t) = \frac{ay_0}{by_0 + (a - by_0)\mathrm{e}^{-at}} \,,$$

počet škůdců bude klesat pro $y_0 > \frac{a}{b}$ a ustálí se na hodnotě $\frac{a}{b}$.



Obr. 8.4.1. Systém parabol (hodnoty konstant C jsou uvedeny).

Kontrolní test

Úloha 1. Kolik řešení rovnice $(2x-y)dx-(x+2y)dy=0$ prochází bodem $[2,\ -1]$?

a) dvě, b) jedno, c) žádné, d) nekonečně mnoho .

Úloha 2. Označte funkci, která je obecným řešením úlohy

$$y\cos x+y'(\sin y+\sin x)=0\,.$$

a) $x\cos y-y\sin x=C$, b) $\sin y-y\cos x=C$,
c) $y\sin x-\cos y=C$, d) $x\cos y-\sin x=C$.

Úloha 3. Najděte funkci $y(x)$, která je řešením úlohy

$$(\cos x-y')\,\cos x=y\sin x\,,\quad y(0)=0.$$

Jaké hodnoty nabývá toto řešení v bodě $x=\pi$?

a) $y(\pi)=-\pi$, b) $y(\pi)=\pi$, c) $y(\pi)=1$, d) $y(\pi)=0$.

Úloha 4. Rozhodněte, která z následujících funkcí je řešením počáteční úlohy

$$\frac{2x-y}{x(x-y)}\,dx-\frac{x}{y(x-y)}\,dy=0\,,\qquad y(2)=1\,.$$

a) $y=\frac{x}{2}$, b) $y=\frac{4x-2}{x+4}$, c) $y=2^x-3$, d) $y=\frac{x^2}{x+2}$.

Úloha 5. Je dána počáteční úloha $(x^2+1)dy=(2xy+1)dx,\ y(0)=2$. Pro funkci $y(x)$, která je jejím řešením, platí:

a) $y(\frac{\pi}{4})=3$, b) $y(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi^2}{8}$, c) $y(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi^2}{8}+3$, d) $y(\frac{\pi}{4})=\frac{\pi^2}{8}+2$,

Úloha 6. Funkce $y(x)$ je řešením počáteční úlohy

$$y\cos x=(1+y')\sin x\,,\ y(\frac{\pi}{2})=\frac{3\pi}{2}.$$

Které z uvedených tvrzení pro ni platí?

a) $y(\pi) = 0$, b) $y(\pi) = -\pi$, c) $y(\pi) =$ neexistuje , d) $y(\pi) = \pi$.

Úloha 7. Která z uvedených rovnic je současně homogenní, exaktní a lineární?

a) $y + xy' - x = 0$, b) $y + xy' + x = 0$,

c) $x + yy' + y = 0$, d) $y + xy' + x^2 = 0$.

Úloha 8. Určete dvojice, které si budou odpovídat, přiřadíme-li k rovnicím A – D vždy jeden z typů 1 – 4 :

A	$x(y' + y) = 1$	1	homogenní
B	$xy - x^2y' = y^2$	2	lineární
C	$xyy' - y + 1 = 0$	3	exaktní
D	$2xy = y'(2y - x^2)$	4	separovatelná

a) A3, B2, C1, D4 b) A2, B1, C4, D3

c) A2, B3, C1, D4 d) A1, B4, C3, D2

Úloha 9. Integrální křivky (grafy) obecného řešení rovnice $(1 - x)y' - y + 1 = 0$ jsou

a) hyperboly, b) paraboly, c) kružnice, d) přímky.

Úloha 10. Funkce $y(x)$ je řešením počáteční úlohy

$$y' + 3y = 2xe^{-3x}\,, \quad y(0) = -\frac{1}{3}\,.$$

Její absolutní (globální) maximum na intervalu $\langle 0, 2\rangle$ nastává v bodě

a) $[1, 1]$, b) $[\frac{1}{e^3}, 1]$, c) $[1, \frac{2}{3e^3}]$, d) $[0, \frac{3}{e}]$.

Výsledky testu

Číslo úlohy	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Správná odpověď	b)	c)	a)	d)	c)	a)	b)	b)	a)	c)