8.2. Exaktní rovnice

Cíle

Ve výkladu o funkcích dvou proměnných jsme se seznámili také s jejich diferenciálem prvního řádu, který je pro funkci $F(x,y)$ vyjádřen výrazem

$$dF = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\,dy\ .$$

Nyní budeme hledat odpověď na otázku, zda a jak lze od této diferenciální formule přejít zpět k funkci $F(x,y)$. Poznatky, které získáme, hrají rovněž významnou roli v souvislosti s aplikacemi ve fyzice.

Definice 8.2.1.

Diferenciální rovnice $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$ se nazývá **exaktní**, je-li výraz $P(x,y)\,dx+Q(x,y)$ **totálním diferenciálem** jisté funkce $F(x,y)$ označované jako **kmenová funkce**.

Věta 8.2.1.

Jsou-li funkce $P(x,y)$, $Q(x,y)$ diferencovatelné na oblasti Ω, pak je rovnice $P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy=0$ exaktní právě tehdy, když na oblasti Ω platí

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\ .$$

Je-li $F(x,y)$ kmenovou funkcí příslušného totálního diferenciálu, má obecné řešení exaktní rovnice tvar

$$F(x,y)=C\ .$$

Důkaz: Je-li $P(x,y)\,dx+Q(x,y)$ totálním diferenciálem funkce $F(x,y)$, musí být

$$dF = \frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\,dy = P(x,y)\,dx+Q(x,y)\,dy\ .$$

Odtud plyne pro parciální derivace funkcí $P(x,y)$, $Q(x,y)$:

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x}\,, \qquad \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y}\,.$$

Podle předpokladu jsou derivace spojité, takže

$$\frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 F(x,y)}{\partial x \partial y} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,,$$

což jsme měli dokázat.

Důkaz opačného tvrzení,

$$\frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{exaktnost rovnice} \quad P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0\,,$$

je poněkud náročnější a lze se s ním seznámit např. v [17]. Snadno dokážeme poslední část tvrzení: má-li být $F(x,y) = C$ obecným řešením rovnice, pak musí vyhovět zkoušce. Skutečně, diferencováním tohoto vztahu dostáváme

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x}\,dx + \frac{\partial F(x,y)}{\partial y}\,dy = 0\,,$$

a tedy $P(x,y)\,dx + Q(x,y)\,dy = 0$, což jsme měli dokázat.

Výklad

Z předchozí věty je zřejmé, že řešit exaktní rovnici znamená určit kmenovou funkci totálního diferenciálu. Vyjdeme-li kupříkladu z rovnosti

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial x} = P(x,y)\,,$$

můžeme kmenovou funkci určit integrací:

$$F(x,y) = \int P(x,y)\,dx + K(y) = U(x,y) + K(y)\,.$$

Ve výsledku je $U(x,y)$ primitivní funkce a $K(y)$ integrační „konstanta", která může ovšem záviset na druhé proměnné. Tuto veličinu určíme z podmínky

$$\frac{\partial F(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial y} = Q(x,y)\,.$$

Pak

$$K(y) = \int \left(Q(x,y) - \frac{\partial U}{\partial y} \right) dy \, .$$

Zbývá ovšem dokázat, že integrand $Q(x,y) - \frac{\partial U}{\partial y}$ nezávisí na proměnné x, tedy že jeho derivace podle této proměnné je rovna nule:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(Q - \frac{\partial U}{\partial y}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial y}\left(Q - \frac{\partial U}{\partial x}\right) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 0 \, .$$

Poznámka

Popsaný postup je možno provést také se zaměněným pořadím proměnných, tj. začít integrací

$$F(x,y) = \int Q(x,y)\, dy + L(x) = V(x,y) + L(x)$$

a pokračovat určením funkce $L(x)$. Je proto obvyklé tyto postupy spojit a formálně vypočíst oba integrály

$$F(x,y) = \int P(x,y)\, dx + K(y) = U_1(x,y) + C_1 \, ,$$

$$F(x,y) = \int Q(x,y)\, dy + L(x) = U_2(x,y) + C_2 \, ,$$

kde C_1, C_2 jsou integrační konstanty. Kmenovou funkci $F(x,y)$ vytvoříme sloučením veličin $U_1(x,y)$ a $U_2(x,y)$, přičemž členy, které se vyskytují současně v obou výrazech, uvažujeme pouze jedenkrát.

Celý algoritmus řešení exaktní rovnice pak vypadá takto:

1. Otestujeme exaktnost rovnice podmínkou $P'_y = Q'_x$.
2. Určíme kmenovou funkci $F(x,y)$ některou z výše uvedených metod.
3. Zapíšeme řešení rovnice ve tvaru $F(x,y) = C$.

Řešené úlohy

Příklad 8.2.1. Řešte rovnici $(2xy - 2x - 1)dx + (x^2 + 2y + 1)dy = 0$.

Řešení: Ověříme exaktnost rovnice na základě parciálních derivací:

$$\left.\begin{array}{lcl} P(x,y) = 2xy - 2x - 1 & \Longrightarrow & P'_y = 2x\,, \\ Q(x,y) = x^2 + 2y + 1 & \Longrightarrow & Q'_x = 2x \end{array}\right\} \quad \Longrightarrow \quad \frac{\partial P(x,y)}{\partial y} = \frac{\partial Q(x,y)}{\partial x}\,.$$

Nyní aplikujeme postup uvedený v poslední poznámce:

$$\int P(x,y)\,dx = \int (2xy - 2x - 1)\,dx = x^2y - x^2 - x + C_1\,,$$

$$\int Q(x,y)\,dy = \int (x^2 + 2y + 1)\,dy = x^2y + y^2 + y + C_2\,.$$

Do kmenové funkce sepíšeme všechny získané členy, avšak smíšený člen x^2y pouze jedenkrát:

$$F(x,y) = x^2y - x^2 + y^2 - x + y\,.$$

Hledané řešení má tvar $F(x,y) = C$, tj.

$$x^2y - x^2 + y^2 - x + y = C\,.$$

Správnost výsledku snadno ověříme zkouškou.

Příklad 8.2.2. Řešte rovnici $(2y - x\sin 2y)y' = \sin^2 y$.

Řešení: Nejprve rovnici přepíšeme do vhodnějšího tvaru

$$\sin^2 y\,dx + (x\sin 2y - 2y)\,dy = 0$$

a dále zopakujeme postup z předchozí úlohy:

$$P(x,y) = \sin^2 y \quad \Longrightarrow \quad P'_y = 2\sin y\cos y = \sin 2y\,,$$

$$Q(x,y) = x\sin 2y - 2y \quad \Longrightarrow \quad Q'_x = \sin 2y\,.$$

Parciální derivace se rovnají, takže jde opět o exaktní rovnici, a proto

$$\int P(x,y)\,dx = \int \sin^2 y\,dx = x\sin^2 y + C_1\,,$$

$$\int Q(x,y)\,dy = \int (x\sin 2y - 2y)\,dy = -\frac{1}{2}x\cos 2y - y^2 + C_2\,.$$

Ze získaných dílčích výsledků dostáváme kmenovou funkci

$$F(x,y) = x\sin^2 y - \frac{1}{2}x\cos 2y - y^2\,.$$

Bohužel, **výsledek je chybný!** Je totiž

$$\frac{\partial F}{\partial x} = \sin^2 y - \frac{1}{2}\cos 2y \neq \sin^2 y = P(x,y)\,.$$

Zkusíme proto původní postup:

$$F(x,y) = \int P(x,y)\,dx = \int \sin^2 y\,dx = x\sin^2 y + K(y)\,,$$

a dále

$$\frac{\partial}{\partial y}(x\sin^2 y + K(y)) = x\sin 2y + K'(y) \quad = \quad x\sin 2y - 2y \;\;(= Q(x,y)\,)\,.$$

Odtud

$$K'(y) = -2y \quad \Longrightarrow \quad K(y) = \int (-2y)\,dy = -y^2\,.$$

Novým výsledkem je tedy funkce

$$F(x,y) = x\sin^2 y - y^2$$

a správné řešení

$$x\sin^2 y - y^2 = C$$

(přesvědčte se zkouškou). Zbývá vysvětlit, čím byla způsobena chyba v prvním postupu. Rozepíšeme-li totiž funkci $x\sin^2 y$ podle známého vzorce z trigonometrie, obdržíme

$$x\sin^2 y = x\,\frac{1}{2}(1-\cos 2y) = \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x\cos 2y\,.$$

Druhý člen však již v předchozím dílčím výsledku máme, a tedy první verze kmenové funkce byla sestavena chybně.

Poznámka

Předchozí příklad neznamená odmítnutí postupu, úspěšně použitého v úloze 8.2.1. Upozorňuje pouze na jistou dávku obezřetnosti, s níž musíme k řešení exaktních rovnic přistupovat.

Kontrolní otázky

Otázka 1. *Definujte exaktní diferenciální rovnici a formulujte podmínku, na jejímž základě se exaktnost ověří.*

Otázka 2. *Jaké jsou postupy při řešení exaktní rovnice?.*

Otázka 3. *Vysvětlete pojem „kmenová funkce".*

Úlohy k samostatnému řešení

1. Ověřte, že jde o exaktní diferenciální rovnici a najděte její obecné, případně partikulární řešení:

$$\text{a)}\quad (1 + x\cos 2y)\,dx - x^2 \sin 2y\,dy = 0$$

$$\text{b)}\quad y'\left(\frac{\ln x}{y^2} - y\right) = \frac{1}{xy}, \qquad y(1) = 2\,,$$

$$\text{c)}\quad \left(\ln(x-y) + \frac{x}{x-y}\right) dx - \frac{x}{x-y}\,dy = 0\,.$$

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $x + \frac{1}{2}x^2\cos 2y = C$, b) $y^3 + 2\ln x = 4y$, c) $x\ln(x-y) = C$.