8. Metody řešení diferenciálních rovnic 1. řádu

8.1. Separovatelné rovnice

Cíle

V předchozí kapitole jsme poznali separovaný tvar diferenciální rovnice, který bezprostředně umožňuje nalézt řešení integrací. Existuje široká skupina úloh, které jsou na takový tvar převoditelné buď jednoduchými úpravami v rovnici nebo vhodnou substitucí. Označují se jako **separovatelné rovnice** a nyní se seznámíme se třemi nejčastějšími typy:

a) $y' = P(x).Q(y)$ (základní tvar separovatelné rovnice),

b) $y' = f(ax + by + c)$,

c) $y' = f\left(\frac{y}{x}\right)$ (homogenní rovnice).

8.1.1. Základní typ

Výklad

U tohoto typu, který zapisujeme obvykle ve tvaru $y' = P(x).Q(y)$, postačuje k separaci jednoduchá úprava rovnice (využijeme identity $y' = dy/dx$):

$$\frac{dy}{Q(y)} = P(x)\,dx\,,$$

po níž může hned následovat integrace.

Příklad 8.1.1. Najděte řešení rovnice $y' = -y.\mathrm{cotg}x$.

Řešení: Separace vede k rovnici

$$\int \frac{dy}{y} = -\int \frac{\cos x}{\sin x}\,dx\,,$$

kterou po integraci zapíšeme takto:

$$\ln|y| = -\ln|\sin x| + \ln C\,.$$

Po odlogaritmování dostáváme obecné řešení

$$y(x) = \frac{C}{\sin x}\,.$$

V uvedeném příkladu si povšimněme dvou skutečností, s nimiž se při výpočtech často setkáváme. Vede-li integrace na logaritmickou funkci, je zvykem psát logaritmovaný výraz v absolutní hodnotě. Důvodem je – zjednodušeně řešeno – požadavek, aby definiční obor celého výrazu byl po integraci stejný jako před ní. Dále bývá vhodné psát integrační konstantu ve formě logaritmu, jestliže bude následně provedeno odlogaritmování. Tento krok usnadňuje zápis výsledku.

Poznámka

Výše uvedený základní tvar separovatelné rovnice není jediný možný. Má řadu variant, které však vždy vedou k separované rovnici. Jako ukázku uvádíme další řešený příklad.

Příklad 8.1.2. Najděte řešení počáteční úlohy $(x-1)y' + y^2 = 0\,,\, y(2) = -1$.

Řešení: Postup při separaci je zřejmý z následujících kroků (přesvědčte se, že rovnici lze zapsat i ve tvaru $y' = P(x).Q(y)$):

$$(x-1)y' + y^2 = 0 \quad\Longrightarrow\quad (x-1)\frac{dy}{dx} = -y^2 \quad\Longrightarrow\quad \int\frac{dy}{y^2} = -\int\frac{dx}{x-1}\,.$$

Integrací obdržíme

$$-\frac{1}{y} = -\ln(x-1) + C\,, \qquad \text{odkud} \qquad y(x) = \frac{1}{\ln(x-1) - C}\,.$$

Dosadíme-li do získaného obecného řešení z počáteční podmínky $x = 2$, $y = -1$, bude

$$-1 = \frac{1}{\ln 1 - C}\,, \qquad \text{tj.} \qquad C = 1.$$

Nyní můžeme zapsat hledané řešení počáteční úlohy:

$$y_p(x) = \frac{1}{\ln(x-1)-1}\,.$$

8.1.2. Rovnice typu $y' = f(ax+by+c)$

Výklad

Uvědomme si nejprve, že $y = y(x)$. Tuto rovnici lze tudíž pro libovolné konstanty a, $b \neq 0$, $c \in \mathbb{R}$ transformovat na jednodušší separovatelnou rovnici substitucí

$$ax + by + c = z(x)\,.$$

Derivováním tohoto vztahu podle x dostáváme

$$a + by' = z'\,, \qquad \text{odkud} \qquad y' = \frac{z'-a}{b}\,, \text{ kde } z' = \frac{dz}{dx}\,.$$

Po dosazení do původní rovnice vychází postupnými úpravami

$$\frac{z'-a}{b} = f(z) \quad \Longrightarrow \quad z' = a + bf(z) \quad \Longrightarrow \quad \frac{dz}{a+bf(z)} = dx\,.$$

Výsledkem je rovnice se separovanými proměnnými, v níž lze již pokračovat integrací.

Popsaný postup budeme ilustrovat dvěma řešenými příklady.

Řešené úlohy

Příklad 8.1.3. Řešte rovnici $y' - y + 3x = 5$.

Řešení: Napíšeme-li zadání ve tvaru $y' = y - 3x + 5$, je na první pohled zřejmé, že $f(z) = z = y - 3x + 5$. Proto $z' = y' - 3$ a rovnice se dále transformuje a řeší takto:

$$z' + 3 = z \quad \Longrightarrow \quad \frac{dz}{z-3} = dx \quad \Longrightarrow \quad \int \frac{dz}{z-3} = \int dx\,.$$

Po provedení integrace následuje zpětná substituce:

$$\ln(z-3) = x+\ln C \qquad \Longrightarrow \qquad z = C.\mathrm{e}^{x}+3 \qquad \Longrightarrow \qquad y-3x+5 = C.\mathrm{e}^{x}+3\,.$$

Po drobné úpravě dostáváme obecné řešení

$$y(x) = C.\mathrm{e}^{x} + 3x - 2\,.$$

Příklad 8.1.4. Řešte rovnici $y' + (x-y)^2 = 0$.

Řešení: Nyní je $y' = -(x-y)^2$, takže položíme $z = x-y$, $z' = 1-y'$. Rovnice přejde touto substitucí do tvaru ($f(z) = -z^2$)

$$1 - z' = -z^2 \qquad \Longrightarrow \qquad z' = 1 + z^2 \qquad \Longrightarrow \qquad \int \frac{dz}{1+z^2} = \int dx\,.$$

Odtud

$$\operatorname{arctg} z = x + C \qquad \Longrightarrow \qquad z = \operatorname{tg}(x+C) \qquad \Longrightarrow \qquad y(x) = x - \operatorname{tg}(x+c)\,.$$

O správnosti výsledků se samozřejmě přesvědčíme zkouškou – dosazením získaného řešení do původní rovnice, včetně případného ověření platnosti počáteční podmínky. S ohledem na omezený rozsah textu zde **zkoušky** neuvádíme, avšak vřele **doporučujeme jako samostatné cvičení**.

8.1.3. Homogenní rovnice

Výklad

Diferenciální rovnici nazýváme homogenní, lze-li ji upravit na tvar

$$y' = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Řešíme ji převedením na separovatelnou rovnici substitucí

$$\frac{y}{x} = z(x) \qquad \Longrightarrow \qquad y = zx \qquad \Longrightarrow \qquad y' = z'x + z\,.$$

Poznámka

Termínem ***homogenní*** *bývají označovány i rovnice (popřípadě soustavy rovnic) s nulovou pravou stranou, kterými se budeme zabývat v dalších kapitolách. V tomto textu však uvedený název vyhradíme pouze rovnicím výše uvedeného tvaru.*

Zároveň je vhodné připomenout, že funkce $f(x, y)$ se na oblasti $\Omega \in \mathbb{R}^2$ nazývá ***homogenní stupně k****, jestliže pro libovolné $t \neq 0$ platí*

$$f(tx, ty) = t^k f(x, y)\,.$$

Doporučujeme povšimnout si této vlastnosti u členů v rovnicích uvedených níže (např. členy rovnice v následující úloze jsou homogenní stupně 2).

Příklad 8.1.5. Určete obecné řešení rovnice $(2xy - x^2)y' = 3y^2 - 2xy$.

Řešení: Nejprve se přesvědčíme, že jde o homogenní rovnici:

$$y' = \frac{3y^2 - 2xy}{2xy - x^2} = \frac{3\left(\frac{y}{x}\right)^2 - 2\frac{y}{x}}{2\frac{y}{x} - 1} = f\left(\frac{y}{x}\right).$$

Nyní uplatníme substituční vztahy $y/x = z$, $y' = z'x + z$:

$$z'x + z = \frac{3z^2 - 2z}{2z - 1} \qquad \Longrightarrow \qquad x\frac{dz}{dx} = \frac{z^2 - z}{2z - 1}\,,$$

odkud

$$\int \frac{2z-1}{z^2-z}\,dz = \int \frac{dx}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad \ln|z^2-z| = \ln|x| + \ln C \qquad \Longrightarrow \qquad z^2 - z = Cx\,.$$

Po zpětné substituci a úpravě obdržíme obecné řešení – tentokrát je funkce $y(x)$ vyjádřena implicitně:

$$y^2 - xy - Cx^2 = 0\,.$$

Příklad 8.1.6. Řešte počáteční úlohu $xy' - y - \sqrt{x^2-y^2} = 0,\ y(1) = \frac{1}{2}$.

Řešení: V upraveném tvaru této homogenní rovnice,

$$y' = \frac{y}{x} + \sqrt{1 - \left(\frac{y}{x}\right)^2}\,,$$

opět zavedeme příslušnou substituci a po separaci proměnných obdržíme

$$\int \frac{dz}{\sqrt{1-z^2}} = \int \frac{dx}{x} \qquad \Longrightarrow \qquad \arcsin z = \ln|x| + C\,,$$

odkud plyne obecné řešení

$$y = x.\sin(\ln|x| + C)\,.$$

Na závěr vypočteme konstantu C ze zadané podmínky:

$$\frac{1}{2} = \sin C \qquad \Longrightarrow \qquad C = \arcsin\frac{1}{2} = \frac{\pi}{6}\,.$$

Výsledným partikulárním řešením je tudíž funkce

$$y_p(x) = x.\sin\left(\ln|x| + \frac{\pi}{6}\right)\,.$$

Kontrolní otázky

?

Otázka 1. *Vysvětlete pojem separace proměnných v diferenciální rovnici.*

Otázka 2. *Uveďte příklady separovatelných diferenciálních rovnic.*

Otázka 3. *Kdy říkáme, že funkce $f(x,y)$ je (na zadané oblasti) homogenní stupně k?*

Otázka 4. *Jak charakterizujeme homogenní diferenciální rovnici prvního řádu?*

Otázka 5. *Popište algoritmus řešení homogenní rovnice.*

Úlohy k samostatnému řešení

1. Řešte následující separovatelné rovnice:

a) $y' \sin x = y \cos x$,

b) $x^2y' - y^2 = 1$,

c) $2xyy' = x + 2$,

d) $(x + y)y' = 1$.

2. Ověřte, že zadané diferenciální rovnice jsou homogenní a najděte jejich obecné řešení:

a) $x^2y' = y^2 + xy$,

b) $xy' = y(\ln y - \ln x)$,

c) $xy' - y = 2\sqrt{xy}$.

3. Určete partikulární řešení rovnic při zadaných podmínkách:

a) $y' + \mathrm{e}^y = 0, \quad y(0) = 0$,

b) $(x + y)y' = x - y, \quad y(5) = 2$,

c) $1 + y' = \sqrt{x + y + 1}, \quad y(-2) = 1$.

4. Ověřte, že funkce $y = -x - 1$ je výjimečným řešením rovnice v příkladu 3c). Ukažte, že v bodech ležících na jejím grafu je porušena jednoznačnost řešení.

Výsledky úloh k samostatnému řešení

1. a) $y = C.\sin x$, b) $y = \operatorname{tg}\left(C - \frac{1}{x}\right)$, c) $y^2 = x + 2\ln x + C$,
d) $y - \ln(x + y + 1) = C$.

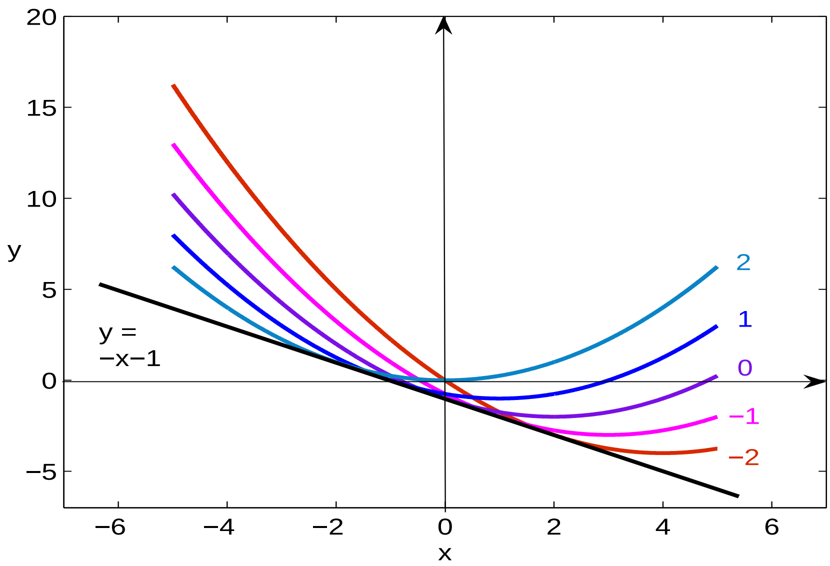
2. a) $y = -\frac{x}{\ln x + C}$, b) $y = xe^{Cx+1}$, c) $y = x(\ln x + C)^2$.

3. a) $y = \ln(1 - x)$, b) $x^2 - 2xy - y^2 = 1$, c) $y = \frac{x^2}{4}$.

4. Dosazením se snadno přesvědčíme, že funkce $y = -x - 1$ zadané rovnici vyhovuje. Nelze ji však získat pro žádnou volbu konstanty C z obecného řešení, kterým je systém parabol

$$y = \left(\frac{x + C}{2}\right)^2 - x - 1\,,$$

proto se jedná o řešení výjimečné. Přímka $y = -x - 1$ je společnou tečnou všech těchto parabol, s nimiž má společný bod dotyku, jímž tedy prochází výjimečné řešení a jedno z partikulárních, takže nastává porušení jednoznačnosti - viz obr. 8.1.1.



Obr. 8.1.1. Integrální křivky k příkladu 4, hodnoty konstanty C a graf výjimečného řešení jsou zřejmé z obrázku.

Kontrolní test

Úloha 1. Při které z podmínek a) – d) má rovnice $(2x^2 - xy)y' = x - 2y$ právě jedno řešení?

a) $y(1) = 2$, b) $y(0) = 1$, c) $y(2) = 1$, d) $y(0) = 2$.

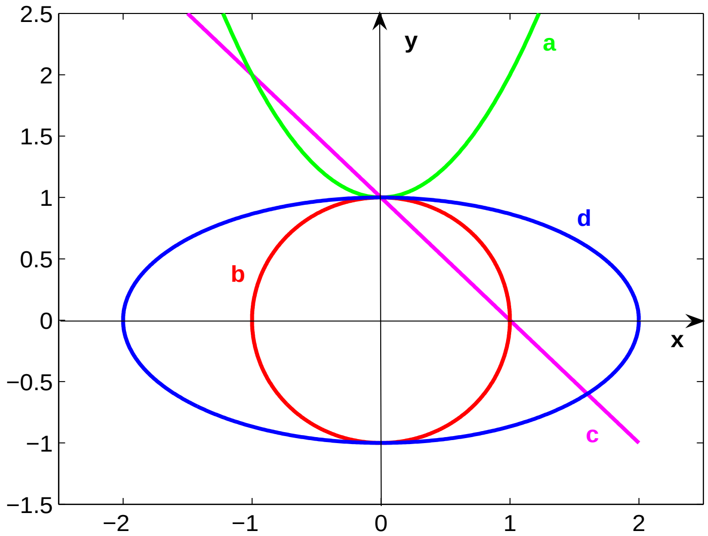
Úloha 2. Označte funkci, která je řešením počáteční úlohy $xy' = 1 + y$, $y(2) = 3$.

a) $y = x + 1$, b) $y = -2x + 7$, c) $y = 3x - 3$, d) $y = 2x - 1$.

Úloha 3. Funkce $y(x)$ je řešením počáteční úlohy $(x - y)y' = 2$, $y(3) = 0$. Určete bod x_0 , v němž tato funkce nabývá hodnoty $y_0 = -2$:

a) $x_0 = \frac{1}{\mathrm{e}}$, b) $x_0 = \mathrm{e}$, c) $x_0 = 1$, d) $x_0 = -\mathrm{e}$.

Úloha 4. Která z křivek a) – d) na obr. 8.4.2 je grafem řešení úlohy $x + 4yy' = 0$, $y(0) = 1$?



Obr. 8.1.2. Křivky k testové úloze č. 4.

Úloha 5. Vyberte funkci, která je partikulárním řešením rovnice $yy' = x$ při podmínce $y(-2) = 4$:

a) $x^2 - y^2 = 12$, b) $xy = 8$, c) $y^2 - x^2 = 12$, d) $xy = -8$.

Úloha 6. Diferenciální rovnice $y' + 1 = \sqrt{x+y}$ má při podmínce $y(0) = 0$

a) partikulární řešení $y = \frac{x^2}{4} - x$, výjimečné řešení $y = -x$,

b) partikulární řešení $y = x^2 - 4x$, výjimečné řešení $xy = 1$,

c) partikulární řešení $y = -x$, výjimečné řešení $y = \frac{x^2}{4} - x$,

d) partikulární řešení $y = 1 - x$, výjimečné řešení $y = \frac{x^2}{4} - x$.

Úloha 7. Rozhodněte, který z následujících výrazů je obecným řešením rovnice

$$(2x - y)y' = 4x - 3y \ .$$

a) $(y - x)^2(y - 4x) = C$, b) $(y - x)(y - 4x)^2 = C$,
c) $(y + x)^2(y - 4x) = C$, d) $(y + x)(y - 4x)^2 = C$.

Úloha 8. Rovnicí $2xyy' = y^2 - x^2$ je určen svazek kružnic, které mají střed na ose x a dotýkají se osy y (a sebe navzájem) v počátku souřadného systému (obr. 8.4.3). Jaký poloměr R má ta z nich, která prochází bodem $[-2, 4]$?

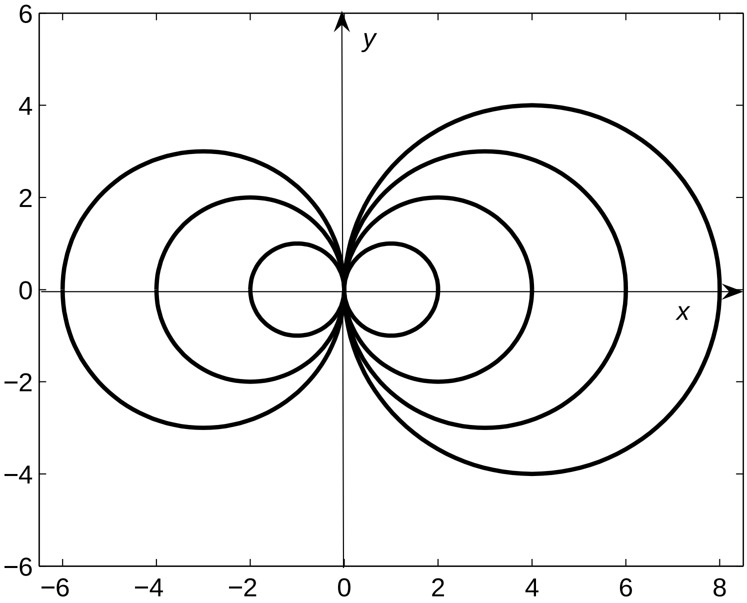
a) $R = 6$, b) $R = 2$, c) $R = 3$, d) $R = 5$.

Úloha 9. Obecné řešení rovnice $y' + \mathrm{e}^y = 1$ obsahuje konstantu C. Její hodnota při podmínce $y(0) = -1$ je

a) $C = 1 - \mathrm{e}$, b) $C = 1 + \mathrm{e}$, c) $C = \mathrm{e} - 1$, d) $C = \mathrm{e}$.

Úloha 10. Rychlost rozpadu radioaktivního prvku je přímo úměrná jeho okamžitému množství. Tuto skutečnost vyjadřuje diferenciální rovnice

$$\frac{dy}{dt} = -\lambda y \ ,$$



Obr. 8.1.3. Svazek kružnic - k úloze 8.

kde $y(t)$ je množství (počet) jader radionuklidu v okamžiku t a λ je tzv. rozpadová konstanta. Poločas rozpadu T radionuklidu je doba, za kterou se počet jader zmenší na polovinu. Vztah mezi rozpadovou konstantou λ a poločasem rozpadu T má tvar

a) $T = \dfrac{\lambda}{2}$, b) $T = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$, c) $T = \dfrac{\lambda}{\ln 2}$, d) $T = \dfrac{2}{\lambda}$.

Výsledky testu

Číslo úlohy	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Správná odpověď	c)	d)	a)	d)	c)	a)	b)	d)	c)	b)