6.2. Vázané extrémy

Výklad

Dalším typem extrémů, kterým se budeme zabývat jsou tzv. vázané extrémy. Hledáme extrémy nějaké funkce vzhledem k předem zadaným podmínkám.

Definice 6.2.1.

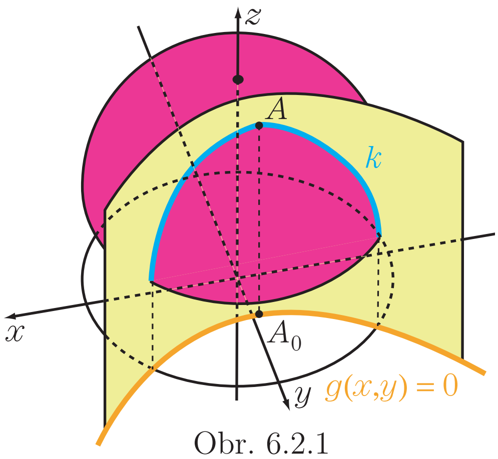
Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \supseteq \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$ má v bodě $A \in \mathrm{D}_f$ **lokální extrém vázaný** m **podmínkami**, $m < n$,

$$g_1(x_1, x_2, \dots x_n) = 0,\ g_2(x_1, x_2, \dots x_n) = 0,\ \dots,\ g_m(x_1, x_2, \dots x_n) = 0,$$

jestliže pro všechny body $X \in \mathcal{O}(A) \subset \mathrm{D}_f$, které vyhovují uvedeným podmínkám, platí jeden ze vztahů:

1. $f(X) \geq f(A)$, pak má funkce f v bodě A **vázané lokální minimum**,
2. $f(X) \leq f(A)$, pak má funkce f v bodě A **vázané lokální maximum**.

Geometrický význam vázaných extrémů. Nechť $z = f(x, y)$, $n = 2$. Buď dána podmínka $g(x, y) = 0$. Hledáme vázané extrémy funkce f vzhledem k podmínce $g(x, y) = 0$. Extrém může nastat pouze v bodech z definičního oboru funkce f, které leží na křivce o rovnici $g(x, y) = 0$. Těmto bodům odpovídají body na ploše $z = f(x, y)$, které tvoří prostorovou křivku k (průsečnice plochy $z = f(x, y)$ s přímou válcovou plochou $g(x, y) = 0$). Lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$ vázané podmínkou $g(x, y) = 0$ jsou z geometrického hlediska lokálními extrémy prostorové křivky k, Obr. 6.2.1.



Obr. 6.2.1

Věta 6.2.1.
Buď dána funkce $f : \mathbb{R}^n \supseteq \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$ a nechť je dáno m, $m < n$, podmínek

$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0.$$

Jestliže má funkce Φ

$$\Phi(x_1, x_2, \dots, x_n, \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_m) = f(x_1, x_2, \dots, x_n) + \sum_{j=1}^{m} \lambda_j g_j(x_1, x_2, \dots, x_n),$$

kde $\lambda_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, m$, ve svém stacionárním bodě lokální extrém, má i funkce f v tomto bodě lokální extrém vázaný podmínkami $g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0$.

Poznámka
Předchozí věta reprezentuje tzv. ***Lagrangeovu metodu*** *hledání vázaného extrému. Funkce Φ se nazývá* ***Lagrangeova funkce****. Reálná čísla λ_j se nazývají* ***Lagrangeovy multiplikátory****. Stacionární body Lagrangeovy funkce Φ určíme jako řešení soustavy rovnic*

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x_i} = 0 \quad i = 1, 2, \dots, n,$$
$$g_j(x_1, x_2, \dots, x_n) = 0 \quad j = 1, 2, \dots, m.$$

Omezme se nyní na funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$. V určitých případech při hledání vázaného extrému nemusíme Lagrangeovu metodu použít.

Poznámka
Jestliže lze z rovnice $g(x, y) = 0$ jednoznačně vyjádřit $y = \varphi(x)$ resp. $x = \psi(y)$, pak lokální extrémy funkce $z = f(x, y)$ vázané podmínkou $g(x, y) = 0$ můžeme určit jako lokální extrémy funkce jedné proměnné $z = f(x, \varphi(x))$ resp. $z = f(\psi(y), y)$.

Řešené úlohy

Příklad 6.2.1. Nalezněte vázané extrémy funkce

$$f(x, y) = x + y,$$

vzhledem k podmínce $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} = 1.$

Řešení: Definiční obor funkce f je $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} - 1 = 0.$

1. Sestavíme Lagrangeovu funkci,

$$\Phi(x, y, \lambda) = f(x, y) + \lambda g(x, y) = x + y + \lambda\left(\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} - 1\right).$$

2. Hledáme lokální extrémy Lagrangeovy funkce Φ. Nejdříve určíme parciální derivace funkce Φ podle proměnných x, y,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 1 - \frac{2\lambda}{x^3}, \quad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 1 - \frac{2\lambda}{y^3}.$$

3. Sestavíme soustavu rovnic pro stacionární body funkce Φ,

$$\begin{array}{rcrcr} \dfrac{\partial\Phi}{\partial x} = 0, & & 1 - \dfrac{2\lambda}{x^3} = 0, & & x^3 - 2\lambda = 0, \\ \dfrac{\partial\Phi}{\partial y} = 0, & \Rightarrow & 1 - \dfrac{2\lambda}{y^3} = 0, & \Rightarrow & y^3 - 2\lambda = 0, \\ g(x, y) = 0, & & \dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{y^2} - 1 = 0, & & x^2 + y^2 - x^2y^2 = 0, \end{array}$$

pro $x \neq 0$, $y \neq 0$.

4. Soustavu vyřešíme. Z první rovnice přímo plyne $x = \sqrt[3]{2\lambda}$. Ze druhé rovnice dostáváme $y = \sqrt[3]{2\lambda}$. Dosadíme do třetí rovnice za x a za y, dostaneme rovnici o jedné neznámé λ,

$$\begin{aligned} \sqrt[3]{(2\lambda)^2} + \sqrt[3]{(2\lambda)^2} - \sqrt[3]{(2\lambda)^2}\sqrt[3]{(2\lambda)^2} &= 0, \\ 2\sqrt[3]{4\lambda^2} - \sqrt[3]{4\lambda^2 4\lambda^2} &= 0, \\ 2\sqrt[3]{4\lambda^2} - 2\sqrt[3]{2\lambda^4} &= 0, \\ \sqrt[3]{2\lambda^4} &= \sqrt[3]{4\lambda^2} \\ 2\lambda^4 &= 4\lambda^2, \\ \lambda^4 - 2\lambda^2 &= 0, \\ \lambda^2(\lambda^2 - 2) &= 0. \end{aligned}$$

Dostáváme řešení ve tvaru:

$$\lambda_1 = \sqrt{2}, \quad \lambda_2 = -\sqrt{2}, \quad \lambda_3 = \lambda_4 = 0.$$

Hodnoty λ_i, $i = 1, 2, 3, 4$ dosadíme do prvních dvou rovnic a vypočítáme x a y. Tedy

$$\begin{aligned}
\lambda_1 &= \sqrt{2} & &\Rightarrow & x &= \sqrt[3]{2\sqrt{2}} = \sqrt[3]{\sqrt{8}} = \sqrt{\sqrt[3]{8}} = \sqrt{2} = y,\\
\lambda_2 &= -\sqrt{2} & &\Rightarrow & x &= \sqrt[3]{-2\sqrt{2}} = -\sqrt[3]{\sqrt{8}} = -\sqrt{\sqrt[3]{8}} = -\sqrt{2} = y,\\
\lambda_3 &= \lambda_4 = 0 & &\Rightarrow & x &= 0 = y.
\end{aligned}$$

Celá soustava byla řešena za podmínky, že $x \neq 0$ a $y \neq 0$. Pro hodnotu $\lambda_3 = \lambda_4 = 0$ se $x = 0$ a $y = 0$, to je ovšem ve sporu s podmínkou a tedy λ_3, λ_4 není řešení naší soustavy rovnic. Řešením soustavy jsou tedy pouze dva stacionární body, a to $A_1 = [\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ pro $\lambda_1 = \sqrt{2}$ a $A_2 = [-\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$ pro $\lambda_2 = -\sqrt{2}$.

5. Sestavíme matici druhých parciálních derivací funkce Φ,

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{6\lambda}{x^4} & 0 \\ 0 & \dfrac{6\lambda}{y^4} \end{pmatrix}.$$

6. Dosadíme do Q jednotlivé stacionární body a odpovídající hodnoty λ,

$$\lambda_1 = \sqrt{2}: \ Q(A_1) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}\sqrt{2} \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = -\sqrt{2}: \ Q(A_2) = \begin{pmatrix} \frac{3}{2}(-\sqrt{2}) & 0 \\ 0 & \frac{3}{2}(-\sqrt{2}) \end{pmatrix}.$$

7. Podle determinantů D_1 a D_2 rozhodneme o charakteru vázaných extrémů.

Stac. bod A_i	D_1	D_2	vázaný extrém $z = \Phi(A_i)$
$A_1 = [\sqrt{2}, \sqrt{2}]$	$\frac{3}{2}\sqrt{2} > 0$	$\frac{9}{2} > 0$	vázané lokální minimum $z = 2\sqrt{2}$
$A_2 = [-\sqrt{2}, -\sqrt{2}]$	$-\frac{3}{2}\sqrt{2} < 0$	$\frac{9}{2} > 0$	vázané lokální maximum $z = -2\sqrt{2}$

Poznámka

Pokud Lagrangeova funkce Φ nemá v některém svém stacionárním bodě extrém, pak to ještě neznamená, že i funkce f nemá v tomto bodě lokální extrém, viz. příklad 6.2.2.

Příklad 6.2.2. Určete vázané extrémy funkce

$$f(x,y) = 27(x+y-1)$$

vzhledem k podmínce $9(x^2+y^2) = 2x^2y^2$.

Řešení: Definičním oborem funkce f je množina $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}^2$, $g(x,y) = 9(x^2+y^2) - 2x^2y^2 = 0$.

1. Sestavíme Lagrangeovu funkci,

$$\Phi(x,y,\lambda) = 27(x+y-1) + \lambda(9(x^2+y^2) - 2x^2y^2).$$

2. Určíme parciální derivace Lagrangeovy funkce Φ podle x, y,

$$\frac{\partial\Phi}{\partial x} = 27 + 18\lambda x - 4\lambda xy^2, \qquad \frac{\partial\Phi}{\partial y} = 27 + 18\lambda y - 4\lambda x^2 y.$$

3. Sestavíme soustavu rovnic pro stacionární body funkce Φ,

$$\begin{aligned} 27 + 18\lambda x - 4\lambda xy^2 &= 0,\\ 27 + 18\lambda y - 4\lambda x^2 y &= 0,\\ 9(x^2+y^2) - 2x^2y^2 &= 0. \end{aligned}$$

4. Soustavu vyřešíme. Odečteme od sebe první dvě rovnice, tj. $\dfrac{\partial\Phi}{\partial y} - \dfrac{\partial\Phi}{\partial x}$, dostáváme

$$2\lambda(y-x)(9+2xy) = 0 \;\Rightarrow\; \lambda = 0 \,\vee\, y = x \,\vee\, y = -\frac{9}{2x}.$$

Jestliže $\lambda = 0$, pak první dvě rovnice nejsou splněny. Proto se v tomto případě nejedná o řešení soustavy. Další dva mezivýsledky postupně dosadíme do třetí rovnice. Uvažujme nejdříve $y = -\dfrac{9}{2x}$,

$$9x^2 + 9\frac{81}{4x^2} - 2x^2\frac{81}{4x^2} = 0, \quad x \neq 0,$$
$$4x^4 - 18x^2 + 81 = 0.$$

Použijeme substituci $x^2 = t$, dostáváme kvadratickou rovnici

$$4t^2 - 18t + 81 = 0.$$

Diskriminant této rovnice $D = (-18)^2 - 16 \cdot 81 < 0$, tzn. rovnice nemá žádné řešení.

Dosaďme nyní $y = x$ do třetí rovnice,

$$9x^2 + 9x^2 - 2x^2x^2 = 0,$$
$$18x^2 + 2x^4 = 0,$$
$$2x^2(9 - x^2) = 0.$$

Dostáváme řešení ve tvaru

$$x_1 = 3, \quad x_2 = -3, \quad x_3 = x_4 = 0.$$

Hodnoty y_i, $i = 1, 2, 3, 4$ získáme z podmínky $y = x$, λ_i vypočítáme z libovolné z prvních dvou rovnic soustavy. Tedy

$$\begin{array}{lllll}
x_1 = 3 & \Rightarrow & y_1 = 3 & \Rightarrow & \lambda_1 = \frac{1}{2}, \\
x_2 = -3 & \Rightarrow & y_2 = -3 & \Rightarrow & \lambda_2 = -\frac{1}{2}, \\
x_3 = x_4 = 0 & \Rightarrow & y_3 = y_4 = 0 & \Rightarrow & \text{řešení neexistuje.}
\end{array}$$

Získali jsme dva stacionární body funkce Φ, $A_1 = [3, 3]$ pro $\lambda_1 = \frac{1}{2}$, $A_2 = [-3, -3]$ pro $\lambda_2 = -\frac{1}{2}$.

5. Sestavíme matici druhých parciálních derivací funkce Φ,

$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y} \\ \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y\partial x} & \dfrac{\partial^2\Phi}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18\lambda - 4\lambda y^2 & -8\lambda xy \\ -8\lambda xy & 18\lambda - 4\lambda x^2 \end{pmatrix}.$$

6. Dosadíme do Q jednotlivé stacionární body a odpovídající hodnoty λ,

$$\lambda_1 = \tfrac{1}{2} : Q(A_1) = \begin{pmatrix} -9 & -36 \\ -36 & -9 \end{pmatrix},$$

$$\lambda_2 = -\tfrac{1}{2} : Q(A_2) = \begin{pmatrix} 9 & 36 \\ 36 & 9 \end{pmatrix}.$$

7. Podle determinantů D_1 a D_2 rozhodneme o charakteru vázaných extrémů.

Stac. bod A_i	D_1	D_2	vázaný extrém $z = \Phi(A_i)$
$A_1 = [3,3]$	$-9 < 0$	$81 - 36^2 < 0$	extrém neexistuje
$A_2 = [-3,-3]$	$9 > 0$	$81 - 36^2 < 0$	extrém neexistuje

Lagrangeova funkce Φ v bodech A_1, A_2 nemá extrém, ovšem to ještě neznamená, že i funkce f v těchto bodech nemá extrém.

8. Využijeme větu **??** Určíme $d^2\Phi$,

$$d^2\Phi = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\partial y}dxdy + \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}dy^2,$$

a tedy

$$d^2\Phi = (18\lambda - 4\lambda y^2)dx^2 - 16\lambda xydxdy + (18\lambda - 4\lambda x^2)dy^2.$$

9. Hodnota $d^2\Phi$ ve stacionárních bodech funkce Φ rozhodne o vázaných extrémech funkce f. Dosadíme postupně do $d^2\Phi$ bod A_1 a bod A_2,

$$d^2\Phi(A_1) = -9dx^2 - 72dxdy - 9dy^2, \quad d^2\Phi(A_2) = 9dx^2 + 72dxdy + 9dy^2.$$

10. Diferencujeme podmínku $g(x,y) = 0$,

$$18xdx + 18ydy + 4xy^2dx + 4x^2ydy = 0 \Rightarrow (18x + 4xy^2)dx + (18x + 4x^2y)dy = 0.$$

Dosadíme za x a y souřadnice stacionárních bodů,

$$A_1 : (18\cdot 3 + 12\cdot 9)dx + (18\cdot 3 + 12\cdot 9)dy = 0 \Rightarrow dy = -dx,$$

$$A_2 : (18\cdot(-3) - 12\cdot 9)dx + (18\cdot(-3) - 12\cdot 9)dy = 0 \Rightarrow dy = -dx.$$

V jistém okolí jak bodu A_1, tak bodu A_2 platí $dy = -dx$. Tento vztah využijeme v bodě 9. a dostáváme

$$A_1 : d^2\Phi(A_1) = 54dx^2 > 0 \Rightarrow \text{vázáné lokální minimum } z = f(A_1) = 135,$$
$$A_2 : d^2\Phi(A_2) = -54dx^2 < 0 \Rightarrow \text{vázáné lokální maximum } z = f(A_2) = -189.$$

Příklad 6.2.3. Určete vázané extrémy funkce

$$f(x, y) = xy - x + y - 1,$$

vzhledem k podmínce $x + y = 1$.

Řešení: Definiční obor funkce $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}^2$.

1. Z podmínky $x + y = 1$ můžeme vypočítat jak x, tak i y. Z podmínky vyjádříme např. y,

$$y = 1 - x.$$

2. Dosadíme $y = 1 - x$ do funkce $z = f(x, y) = xy - x + y - 1$ a dostaneme funkci jedné proměnné x,

$$z = x(1 - x) - x + 1 - x - 1 = -x^2 - x.$$

3. Hledáme extrémy funkce jedné proměnné.

$$z' = -2x - 1 = 0 \;\Rightarrow\; x = -\tfrac{1}{2},$$
$$z'' = -2 < 0.$$

Druhá derivace je záporná pro všechny body definičního oboru funkce jedné proměnné z, a tedy i v bodě $x = -\frac{1}{2}$ je druhá derivace záporná, $z''(-\frac{1}{2}) = -2 < 0$. Funkce z má v bodě $x = -\frac{1}{2}$ ostré lokální maximum. Dopočítáme hodnotu y,

$$y = 1 - (-\tfrac{1}{2}) = \tfrac{3}{2}.$$

Funkce $f(x, y) = xy - x + y - 1$ má v bodě $A = [-\frac{1}{2}, \frac{3}{2}]$ vázané lokální maximum $z = \frac{1}{4}$.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Určete vázané extrémy funkce $f(x,y) = 4x + 2y + 1$ vzhledem k podmínce $y = x^2 + x + \frac{1}{4}$.

2. Určete vázané extrémy funkce $f(x,y) = 12x + y - 3$ vzhledem k podmínce $y = -x^3 + 3$.

3. Určete vázané extrémy funkce $f(x,y) = 3y + 2x^4 + 9x^2 + 6$ vzhledem k podmínce $y = -x^4 + 3x^2 - 2$.

4. Určete vázané extrémy funkce $f(x,y) = e^{x^2+y}$ vzhledem k podmínce $y = -x^3$.

5. Určete vázané extrémy funkce $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$ vzhledem k podmínce $y = x + 3$.

6. Určete vázané extrémy funkce $f(x,y) = \sqrt{4x + y^2 + 5}$ vzhledem k podmínce $y = 2x - 3$.

7. Určete vázané extrémy funkce $f(x,y) = x^3 + y^3$ vzhledem k podmínce $2x + 2y = 1$.

8. Určete vázané extrémy funkce $f(x,y) = -8x + 6y - 5$ vzhledem k podmínce $x^2 + y^2 = 100$.

9. Určete vázané extrémy funkce $f(x,y) = 4x + 3y - 4$ vzhledem k podmínce $(x-1)^2 + (y-2)^2 = 1$.

10. Určete vázané extrémy funkce $f(x,y) = -3x - 9$ vzhledem k podmínce $3y - y^3 = x^2$.

Výsledky úlohy k samostatnému řešení

1. $[-\frac{3}{2}, 1]$ - vázané lokální minimum.

2. $[-2, 11]$ - vázané lokální minimum, $[2, -5]$ - vázané lokální maximum.

3. $[0, -2]$ - vázané lokální minimum, $[3, -56]$ - vázané lokální maximum, $[-3, -56]$ - vázané lokální maximum.

4. $[0, 0]$ - vázané lokální minimum, $[\frac{2}{3}, -\frac{8}{27}]$ - vázané lokální maximum.

5. $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ - vázané lokální minimum.

6. $[1, -1]$ - vázané lokální minimum.

7. $[\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$ - vázané lokální minimum.

8. $[8, -6]$ - vázané lokální minimum, $[-8, 6]$ - vázané lokální maximum.

9. $[\frac{1}{5}, \frac{7}{5}]$ - vázané lokální minimum, $[\frac{9}{5}, \frac{13}{5}]$ - vázané lokální maximum.

10. $[\sqrt{2}, 1]$ - vázané lokální minimum, $[-\sqrt{2}, 1]$ - vázané lokální maximum.