6. Extrémy funkcí více proměnných

Průvodce studiem

Hledání extrémů je v praxi často řešená úloha. Např. při cestě z bodu A do bodu B se snažíme najít nejkratší cestu. Ve firmách je snaha minimalizovat náklady, maximalizovat zisk. Fyzikální systémy se snaží zaujmout stavy s nejnižší energií.

V této kapitole se budeme zabývat hledáním extremálních hodnot tzv. maxim resp. minim pro funkce více proměnných, především se však soustředíme na funkce dvou proměnných.

Cíle

Lokální extrémy funkcí více proměnných, vázané extrémy, globální extrémy.

Předpokládané znalosti

Lokální a globální extrémy funkcí jedné proměnné.

6.1. Lokální extrémy

Výklad

Definice 6.1.1.

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \supseteq \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$ nabývá v bodě $A \in \mathrm{D}_f$ **lokálního maxima**, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(A) \subseteq \mathrm{D}_f$ bodu A takové, že $\forall X \in \mathcal{O}(A)$ platí $f(X) \leq f(A)$.

Řekneme, že funkce $f : \mathbb{R}^n \supseteq \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$ nabývá v bodě $A \in \mathrm{D}_f$ **lokálního minima**, jestliže existuje okolí $\mathcal{O}(A) \subseteq \mathrm{D}_f$ bodu A takové, že $\forall X \in \mathcal{O}(A)$ platí $f(X) \geq f(A)$.

Poznámka
V případě ostrých nerovností v předcházející definici hovoříme o ***ostrém lokálním maximu*** *resp. o* ***ostrém lokálním minimu.***

Definice 6.1.2.
Řekneme, že bod $A \in \mathbb{R}^n$ je **stacionárním bodem** funkce $f : \mathbb{R}^n \supseteq \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$, jestliže

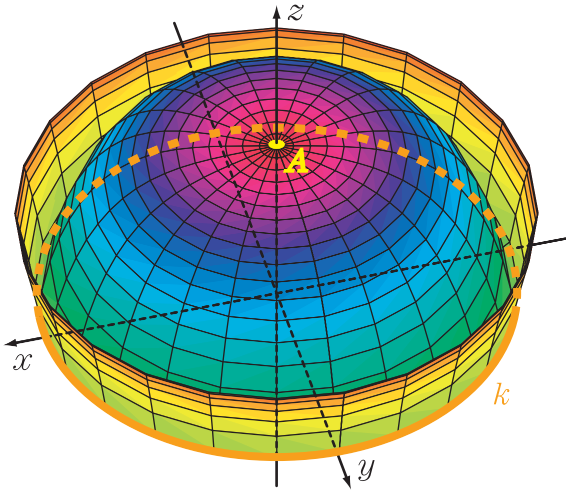
$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Následující **Fermatova věta** vyjadřuje nutnou podmínku pro existenci lokálního extrému.

Věta 6.1.1.
Nechť $f : \mathbb{R}^n \supseteq \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$ má v bodě A lokální extrém a nechť v tomto bodě existují všechny parciální derivace funkce f. Pak bod A je stacionárním bodem funkce f.

Poznámka
1. *Fermatova věta nevylučuje možnost, že lokální extrém existuje i v bodě A, který není stacionárním bodem funkce f, protože v něm některá parciální derivace neexistuje.*
2. *Podmínka pro stacionární bod, tj. $\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = 0$, je ekvivalentní s podmínkou $df(A) = 0$, tj. totální diferenciál funkce f v bodě A je roven nule.*
3. *Rovnost $df(A) = 0$ je pouze nutnou podmínkou pro existenci lokálního extrému, tj. z platnosti této podmínky ještě nevyplývá existence lokálního extrému. Platí-li $df(A) \neq 0$, pak v bodě A lokální extrém neexistuje.*

Na Obr. 6.1.1 je funkce, která má v bodě A ostré lokální maximum, bod A je stacionárním bodem funkce f. V bodě A existuje parciální derivace funkce f podle x i podle y a obě parciální derivace v bodě A mají hodnotu 0. V bodech kružnice k má funkce lokální minima, i když v těchto bodech neexistuje žádná parciální derivace.



Obr. 6.1.1

Věta 6.1.2.

Nechť $f : \mathbb{R}^n \supseteq \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$ je alespoň dvakrát spojitě diferencovatelná (tj. existují spojité parciální derivace alespoň druhého řádu) na okolí bodu $A \in \mathbb{R}^n$. Pak je-li

(a) $d^2f(A) < 0$, funkce f má v bodě A **ostré lokální maximum**,

(b) $d^2f(A) > 0$, funkce f má v bodě A **ostré lokální minimum**.

Uvažujme funkci dvou proměnných $z = f(x, y)$, dvakrát spojitě diferencovatelnou na okolí bodu $A = [x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$, bod A nechť je stacionárním bodem funkce f, tj. $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) = 0 = \dfrac{\partial f}{\partial y}(A)$. Podle předchozí věty o existenci lokálního extrému rozhoduje hodnota totálního diferenciálu druhého řádu funkce f v bodě A, tedy hodnota

$$d^2f(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A)dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)dy^2.$$

Výraz na pravé straně je kvadratická forma (tento pojem nebudeme definovat, teorii kvadratických forem se zabývá lineární a multilineární algebra) pro proměnné dx a dy. Mimo jiné to znamená, že $d^2f(A)$ lze vyjádřit jako součin

$$d^2f(A) = (dx\, dy) \cdot \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ dy \end{pmatrix}.$$

Označme

$$D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A), \quad D_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{vmatrix}$$

hlavní determinanty matice parciálních derivací druhého řádu. Pak pro stacionární bod A funkce f platí:

1. Je-li $D_1 > 0 \wedge D_2 > 0$, pak má funkce f v bodě A **ostré lokální minimum**,
2. Je-li $D_1 < 0 \wedge D_2 > 0$, pak má funkce f v bodě A **ostré lokální maximum**,
3. Je-li $D_2 < 0$, pak pro funkci f v bodě A **extrém neexistuje**.

Na základě předchozích úvah můžeme zformulovat větu, která vyjadřuje postačující podmínku pro existenci ostrého lokálního extrému.

Věta 6.1.3.
Nechť funkce $f : \mathbb{R}^2 \supseteq \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$ je na okolí bodu $A = [x_0, y_0]$ dvakrát spojitě diferencovatelná. Nechť bod A je její stacionární bod. Jestliže

$$D_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A)\right)^2 > 0,$$

pak má funkce f v bodě A ostrý lokální extrém. Je-li navíc $D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) > 0$, jedná se o **ostré lokální minimum**, je-li $D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) < 0$, jedná se o **ostré lokální maximum**.

Poznámka
V případě, že $D_2 = 0$, nelze o existenci lokálního extrému rozhodnout. Tento problém lze v některých případech řešit tak, že vyšetříme lokální chování funkce f na okolí bodu A.

Uvažujme funkci tří proměnných $u = f(x, y, z)$, dvakrát spojitě diferencovatelnou na okolí bodu $A = [x_0, y_0, z_0] \in \mathbb{R}^2$, bod A nechť je stacionárním bodem funkce f, tj. $\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 0, \frac{\partial f}{\partial y}(A) = 0, \frac{\partial f}{\partial z}(A) = 0$. Analogicky, jako pro funkci dvou proměnných, můžeme sestavit matici druhých parciální derivací, resp.

$$d^2f(A) = (dx\,dy\,dz)\cdot\begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(A) \end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{pmatrix}.$$

Označme

$$D_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A),$$

$$D_2 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) \end{vmatrix}, D_3 = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(A) \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(A) & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(A) \end{vmatrix}$$

hlavní determinanty matice parciálních derivací druhého řádu. Pak pro stacionární bod A funkce f platí:

1. Je-li $D_1 > 0 \wedge D_2 > 0 \wedge D_3 > 0$, pak má funkce f v bodě A **ostré lokální minimum**,

2. Je-li $D_1 < 0 \wedge D_2 > 0 \wedge D_3 < 0$, pak má funkce f v bodě A **ostré lokální maximum**,

3. Je-li $D_2 < 0$, pak pro funkci f v bodě A **extrém neexistuje**.

Řešené úlohy

Příklad 6.1.1. Určete lokální extrémy funkce

$$f(x, y) = x^3 - 3xy + 3y^2.$$

Řešení: Funkce je definovaná na celém $\mathbb{R}^2$, $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}^2$. Postup řešení lze rozdělit do následujících kroků:

1. Určíme parciální derivace funkce f prvního řádu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2 - 3y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -3x + 6y.$$

2. Parciální derivace položíme rovny nule, tj. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$. Dostaneme tak soustavu rovnic pro stacionární body funkce f.

$$\begin{aligned} 3x^2 - 3y &= 0, \\ -3x + 6y &= 0. \end{aligned}$$

3. Soustavu rovnic pro stacionární body vyřešíme. Ze druhé rovnice vyjádříme x a dosadíme do rovnice první.

$$\begin{aligned} &x = 2y \Rightarrow 3(2y)^2 - 3y = 0 \Rightarrow 12y^2 - 3y = 0 \Rightarrow y(4y-1) = 0 \Rightarrow \\ &y = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow A_1 = [0,0] \\ &y = \tfrac{1}{4} \Rightarrow -3x + \tfrac{6}{4} = 0 \Rightarrow x = \tfrac{1}{2} \Rightarrow A_2 = \left[\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{4}\right]. \end{aligned}$$

Našli jsme dva stacionární body, bod $A_1 = [0,0]$ a $A_2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]$.

4. Určíme matici parciálních derivací druhého řádu funkce f,

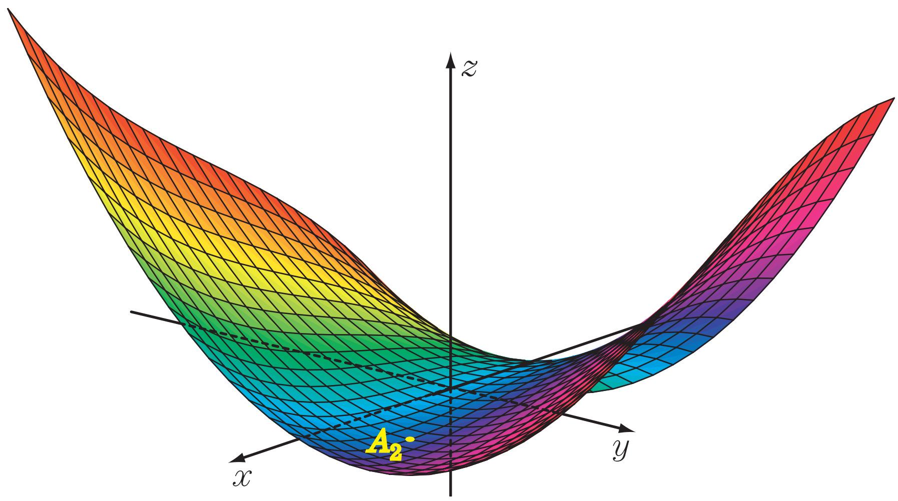
$$Q = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

5. Do matice Q postupně dosadíme jednotlivé stacionární body (tzn. x-ovou souřadnici stacionárního bodu za x, y-ovou souřadnici stacionárního bodu za y).

$$Q(A_1) = \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}, \quad Q(A_2) = \begin{pmatrix} 3 & -3 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}.$$

6. Vypočítáme determinanty D_1, D_2 pro matice $Q(A_1)$, $Q(A_2)$. Hodnoty determinantů rozhodnou o charakteru extrémů.

Stac. bod A_i	D_1	D_2	extrém $z = f(A_i)$
$A_1 = [0,0]$	0	$-9 < 0$	extrém neexistuje
$A_2 = \left[\frac{1}{2}, \frac{1}{4}\right]$	$3 > 0$	$9 > 0$	ostré lokální minimum $z = -\frac{1}{16}$



Obr. 6.1.2

Příklad 6.1.2. Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2+x^2).$$

Řešení: Funkce je definovaná na celém $\mathbb{R}^2$.

1. Určíme parciální derivace prvého řádu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}(-2x)(2y^2+x^2) + \mathrm{e}^{-x^2-y^2}2x = -2x\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2+x^2-1),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \mathrm{e}^{-x^2-y^2}(-2y)(2y^2+x^2) + \mathrm{e}^{-x^2-y^2}4y = -2y\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2+x^2-2).$$

2. Parciální derivace položíme rovny nule, tj. $\dfrac{\partial f}{\partial x} = 0$, $\dfrac{\partial f}{\partial y} = 0$. Dostaneme tak rovnice pro stacionární body funkce f,

$$-2x\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2+x^2-1) = 0,$$
$$-2y\mathrm{e}^{-x^2-y^2}(2y^2+x^2-2) = 0.$$

3. Rovnice pro stacionární body vyřešíme. Výraz $\mathrm{e}^{-x^2-y^2}$ je vždy různý od nuly pro libovolné x, y, můžeme jím proto obě rovnice vykrátit,

$$x(2y^2+x^2-1) = 0,$$
$$y(2y^2+x^2-2) = 0.$$

Položíme-li v první rovnici $x = 0$, dostáváme ze druhé rovnice $y(2y^2 - 2) = 0$ řešení $y = 0$, $y = \pm 1$. Získali jsem tři stacionární body $A_1 = [0, 0]$, $A_2 = [0, 1]$ a $A_3 = [0, -1]$.

Položíme-li ve druhé rovnici $y = 0$, pak z první rovnice $x(x^2 - 1) = 0$ plyne řešení ve tvaru $x = 0$, $x = \pm 1$. Stacionární bod $A_1 = [0, 0]$ jsme již vypočítali, takže na základě předpokladu $y = 0$ jsme získali dva nové stacionární body, bod $A_4 = [1, 0]$ a $A_5 = [-1, 0]$.

Zbývá ještě prověřit možnost, že $x \neq 0$, $y \neq 0$. V tomto případě řešíme soustavu

$$
\begin{aligned}
&2y^2 + x^2 - 1 = 0,\\
&2y^2 + x^2 - 2 = 0.
\end{aligned}
$$

Jestliže obě rovnice od sebe odečteme, dostáváme rovnici $1 = 0$, toto ale neplatí pro žádné x, y. Soustava nemá za tohoto předpokladu řešení. Žádný nový stacionární bod jsme nezískali.

Shrneme-li krok 3, výsledkem naší snahy bylo určení pěti stacionárních bodů: $A_1 = [0, 0]$, $A_2 = [0, 1]$, $A_3 = [0, -1]$, $A_4 = [1, 0]$, $A_5 = [-1, 0]$.

4. Určíme matici parciálních derivací druhého řádu.

$$
Q = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}. \end{pmatrix}, \text{ kde}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= ((-2 + 4x^2)(2y^2 + x^2 - 1) - 4x^2)\mathrm{e}^{-x^2 - y^2},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= 4xy\mathrm{e}^{-x^2 - y^2}(2y^2 + x^2 - 3),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= 4xy\mathrm{e}^{-x^2 - y^2}(2y^2 + x^2 - 3),\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= ((-2 + 4y^2)(2y^2 + x^2 - 2) - 8y^2)\mathrm{e}^{-x^2 - y^2}.
\end{aligned}
$$

5. Do matice parciálních derivací postupně dosadíme stacionární body (tzn. x-ovou souřadnici stacionárního bodu dosadíme za proměnou x, y-ovou za y).

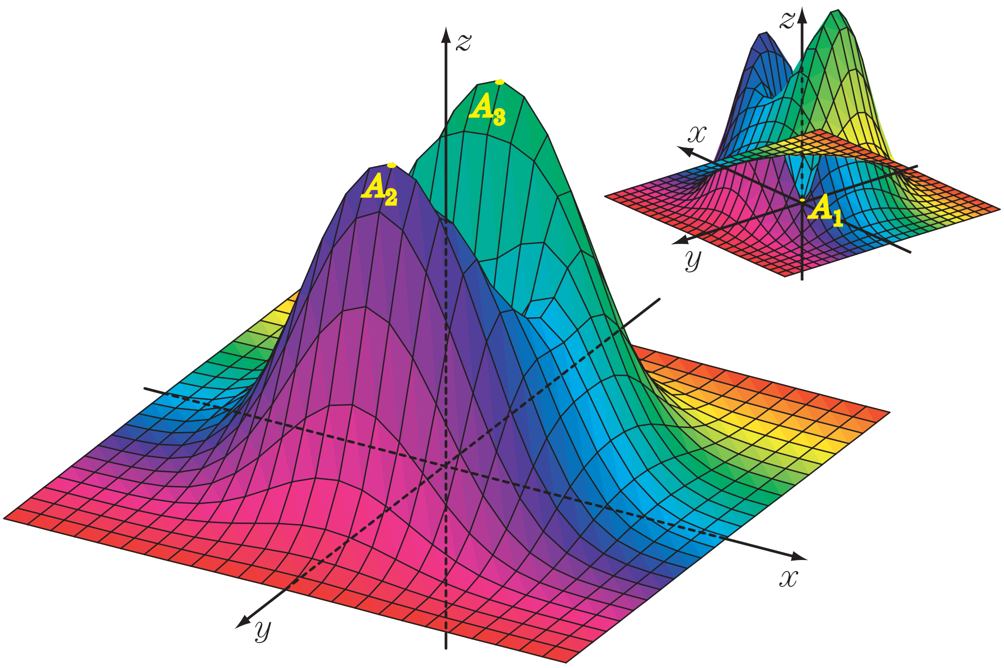
$$Q(A_1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}, Q(A_2) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}, Q(A_3) = \begin{pmatrix} -\frac{2}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & -\frac{8}{\mathrm{e}} \end{pmatrix},$$

$$Q(A_4) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}, Q(A_5) = \begin{pmatrix} -\frac{4}{\mathrm{e}} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\mathrm{e}} \end{pmatrix}.$$

6. Určíme hodnoty D_1, D_2 a rozhodneme o charakteru extrémů.

Stac. bod A_i	D_1	D_2	extrém $z = f(A_i)$
$A_1 = [0, 0]$	$2 > 0$	$8 > 0$	ostré lokální minimum $z = 0$
$A_2 = [0, 1]$	$-\frac{2}{\mathrm{e}} < 0$	$\frac{16}{\mathrm{e}^2} > 0$	ostré lokální maximum $z = \frac{2}{\mathrm{e}}$
$A_3 = [0, -1]$	$-\frac{2}{\mathrm{e}} < 0$	$\frac{16}{\mathrm{e}^2} > 0$	ostré lokální maximum $z = \frac{2}{\mathrm{e}}$
$A_4 = [1, 0]$	$-\frac{4}{\mathrm{e}} < 0$	$-\frac{8}{\mathrm{e}^2} < 0$	extrém neexistuje
$A_5 = [-1, 0]$	$-\frac{4}{\mathrm{e}} < 0$	$-\frac{8}{\mathrm{e}^2} < 0$	extrém neexistuje

V bodě A_1 má funkce f ostré lokální minimum. V bodech A_2, A_3 má funkce f ostrá lokální maxima. V bodech A_4, A_5 funkce f extrém nemá, Obr. 6.1.3.



Obr. 6.1.3

Příklad 6.1.3. Určete lokální extrémy funkce

$$f(x,y) = x^3 + y^3.$$

Řešení: Definičním oborem funkce f je $\mathrm{D}_f = \mathbb{R}^2$.

1. Určíme parciální derivace funkce f.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 3y^2.$$

2. Parciální derivace položíme rovny 0, dostáváme soustavu rovnic pro stacionární body,

$$3x^2 = 0,$$
$$3y^2 = 0.$$

3. Řešením soustavy je jediný stacionární bod $A = [0,0]$.

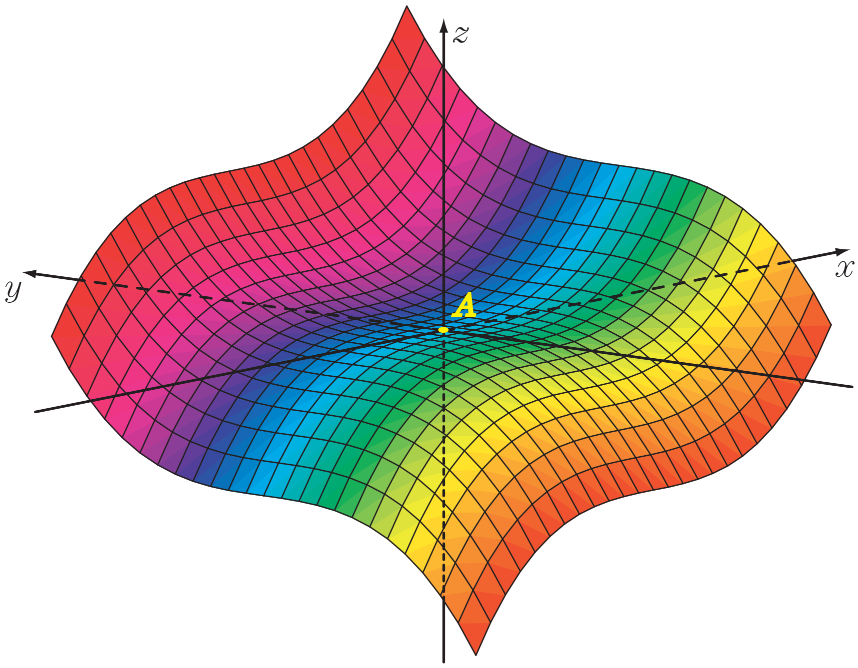
4. Určíme matici parciálních derivací druhého řádu,

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6x & 0 \\ 0 & 6x \end{pmatrix}.$$

5. Do matice Q dosadíme stacionární bod,

$$Q = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

6. Determinant $D_1 = 0$, $D_2 = 0$. Nemůžeme o existenci extrému rozhodnout. Ovšem jaká bude funkční hodnota v bodě A? Dosadíme souřadnice bodu A do funkčního předpisu funkce f, tedy $f(A) = 0$. Jak se funkce chová na okolí bodu $A = [0,0]$. Když dosadíme za x a za y záporná čísla, hodnota z bude záporná, tj. $z < f(A)$. Pokud za x a y do funkčního předpisu dosadíme kladná čísla, hodnota z bude kladná, tj. $z > f(A)$. Na libovolném okolí bodu $[0,0]$ existují body, jejichž funkční hodnota je větší než $f(A)$, ale zároveň existují body, jejichž funkční hodnota je menší než $f(A)$. V bodě $A = [0,0]$ extrém neexistuje.



Obr. 6.1.4

Příklad 6.1.4. Určete lokální extrémy funkce

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + zy - z + y - 2x.$$

Řešení: Postupujeme analogicky jako v případě funkce dvou proměnných. Definičním oborem funkce f je celé $\mathbb{R}^3$.

1. Určíme parciální derivace funkce f,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2y + z + 1, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 2z + y - 1.$$

2. Sestavíme soustavu rovnic pro stacionární body,

$$\begin{aligned} 2x - 2 &= 0, \\ 2y + z + 1 &= 0, \\ 2z + y - 1 &= 0. \end{aligned}$$

3. Řešením soustavy je bod $A = [1, -1, 1]$.

4. Určíme matici parciálních derivací druhého řádu,

$$Q = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} & \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Do matice Q dosadíme stacionární bod $A = [1, -1, 1]$, tedy

$$Q(A) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

6. Determinant $D_1 = 2 > 0$, $D_2 = 4 > 0$, $D_3 = 6 > 0$. V bodě $A = [1, -1, 1]$ má funkce f ostré lokální minimum $z = -2$.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + 6x + 3y^2 - 12y + 11$.

2. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = 3xy - x + 2y$.

3. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 - xy + 3x + y + 3$.

4. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^3 - 12x - 2y^2 - 4y$.

5. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = -\frac{1}{2}x^2 + 5x + \frac{1}{3}y^3 - 9y$.

6. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^5 - 5x + y^3 - 3y$.

7. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 + 3xy - 2x - 3y + 5y^2 + 3$.

8. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = x^2 - 4xy + 4x + \frac{9}{2}y^2 - 15y$.

9. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = (x^2 + 4x)y + y^2$.

10. Nalezněte lokální extrémy funkce $f(x, y) = \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^2 - 6x + \frac{1}{3}y^3 + \frac{1}{2}y^2 - 20y$.

Výsledky úlohy k samostatnému řešení

1. Stacionární bod: $A = [-3, 2]$ - ostré lokální minimum $f(A) = -10$.

2. Stacionární bod: $A = [-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}]$ - extrém neexistuje.

3. Stacionární bod: $A = [1, 5]$ - extrém neexistuje.

4. Stacionární body: $A_1 = [2, -1]$ - extrém neexistuje, $A_2 = [-2, -1]$ - ostré lokální maximum $f(A_2) = 18$.

5. Stacionární body: $A_1 = [5, 3]$ - extrém neexistuje, $A_2 = [5, -3]$ - ostré lokální maximum $f(A_2) = \frac{61}{2}$.

6. Stacionární body: $A_1 = [-1, 1]$ - extrém neexistuje, $A_2 = [1, 1]$ - ostré lokální minimum $f(A_2) = -6$, $A_3 = [1, -1]$ - extrém neexistuje, $A_4 = [-1, -1]$ - ostré lokální maximum $f(A_4) = 6$.

7. Stacionárním bod: $A = [1, 0]$ - ostré lokální minimum $f(A) = 2$.

8. Stacionárním bod: $A = [12, 7]$ - ostré lokální minimum $f(A) = -\frac{57}{2}$.

9. Stacionární body: $A_1 = [0, 0]$ - extrém neexistuje, $A_2 = [-4, 0]$ - extrém neexistuje, $A_3 = [-2, 2]$ - ostré lokální minimum $f(A_3) = -4$.

10. Stacionární body: $A_1 = [2, 4]$ - ostré lokální minimum $f(A_1) = -58$, $A_2 = [2, -5]$ - extrém neexistuje, $A_3 = [-3, 4]$ - extrém neexistuje, $A_4 = [-3, -5]$ - ostré lokální maximum $f(A_4) = \frac{253}{3}$.