5.3. Implicitní funkce a její derivace

Výklad

Podívejme se na následující problém. Uvažujme množinu M bodů $[x, y] \in \mathbb{R}^2$, které splňují rovnici $F(x, y) = 0$,

$$M = \{[x, y] \in \mathrm{D}_F \mid F(x, y) = 0\},$$

kde $z = F(x, y)$ je nějaká funkce dvou proměnných. Je-li $F(x, y) = x^2+y^2-1$, pak množina M je jednotková kružnice se středem v počátku, jinými slovy množina bodů z $\mathbb{R}^2$, které splňují rovnici $x^2 + y^2 - 1 = 0$.

Chceme zkoumat chování této funkce na okolí bodu $A = [x_0, y_0] \in M$, resp. hledat tečnu v bodě A. Pokud na okolí bodu A je množina M grafem nějaké funkce $y = f(x)$ jedné proměnné, tedy $F(x, y) = y - f(x) = 0$, řešíme úlohu pomocí derivací funkce f podle x, f', resp. f''. V podstatě postupujeme tak, že z rovnice $F(x, y) = 0$ vyjádříme y jako funkci proměnné x.

Existuje ovšem řada rovnic pro množinu resp. křivku M, ze kterých se y nedá rozumně vyjádřit, vypočítat. Např. z rovnice křivky $x^2 + y^3 + xy = 0$ nemůžeme jednoznačně vyjádřit y, a tedy předchozí postup selhává.

V této kapitole si ukážeme způsob, jak se s touto obtíží vypořádat.

Definice 5.3.1.

Buď $z = F(x, y)$ funkce dvou proměnných. Uvažujme křivku

$$M = \{[x, y] \in \mathrm{D}_F \mid F(x, y) = 0\}.$$

Nechť $A = [x_0, y_0] \in M$ je bod, $\mathcal{O}_\delta(A) \subset \mathbb{R}^2$ deltové okolí bodu A, $\delta > 0$. Jestliže je rovnicí $F(x, y) = 0$ na intervalu $(x_0-\delta, x_0+\delta)$ určena funkce $y = f(x)$ taková, že platí

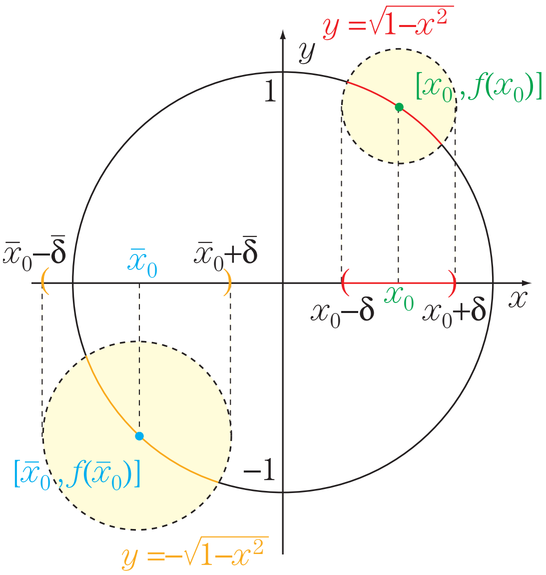
$$F(x, f(x)) = 0 \quad \forall x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta),$$

pak říkáme, že funkce f je na okolí bodu A definována **implicitně** rovnicí $F(x, y) = 0$.

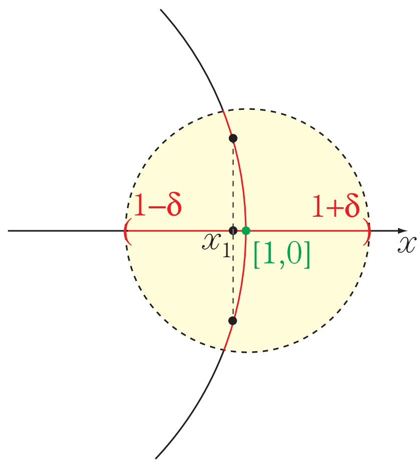
Vraťme se k našemu příkladu. Hledejme pro rovnici $F(x,y) = x^2 + y^2 - 1 = 0$ funkci $y = f(x)$. Pokusíme se z této rovnice vyjádřit y,

$$x^2 + y^2 - 1 = 0 \Rightarrow y^2 = 1 - x^2 \Rightarrow |y| = \sqrt{1 - x^2} \text{ pro } x \in \langle -1, 1\rangle.$$

Rovnicí $x^2 + y^2 - 1 = 0$ jsou na intervalu $(-1, 1)$ určeny dvě implicitní funkce $y = \sqrt{1 - x^2}$ v případě bodů ležících na horní půlkružnici, a $y = -\sqrt{1 - x^2}$ v případě bodů ležících na spodní půlkružnici. V krajních bodech intervalu $\langle -1, 1\rangle$, tj. v bodech $[-1, 0]$ a $[1, 0]$ ležících na kružnici M implicitní funkce neexistuje, protože libovolné deltové okolí těchto bodů obsahuje jak horní tak spodní část kružnice, a tedy na tomto okolí nemůže existovat implicitní funkce.



Obr. 5.3.1



Obr. 5.3.2

Na obrázku Obr. 5.3.1 vidíme, že na deltovém okolí bodu $[x_0, f(x_0)]$ existuje implicitní funkce $y = \sqrt{1 - x^2}$ daná rovnicí $x^2 + y^2 - 1 = 0$, bod $[x_0, f(x_0)]$ leží na horní půlkružnici. Také na okolí bodu $[\bar{x}_0, f(\bar{x}_0)]$ existuje implicitní funkce $y = -\sqrt{1 - x^2}$, daná rovnicí $x^2 + y^2 - 1 = 0$, bod $[\bar{x}_0, f(\bar{x}_0)]$ leží na spodní půlkružnici. Naopak na Obr. 5.3.2 vidíme, že na okolí bodu $[1, 0]$ implicitní funkce neexistuje. Číslu x_1 odpovídají dvě funkční hodnoty, to je spor s definicí funkce jedné proměnné, která říká, že ke každému $x \in \mathrm{D}_f$ musí existovat jediné $f(x)$.

Hledejme např. implicitní funkci vzhledem k rovnici $3x - 2y + 4 = 0$. Snažíme se z rovnice vyjádřit y, tedy

$$5x - 2y + 8 = 0 \Rightarrow y = \frac{5}{2}x + 4 \text{ pro } x \in \mathbb{R}.$$

V tomto případě existuje jediná implicitní funkce $y = \frac{5}{2}x + 4$, která je dána rovnicí $5x - 2y + 8 = 0$.

Poznámka

Ne ke každé rovnici $F(x, y) = 0$ existuje jediná implicitní funkce.

Existenci jediné implicitní funkce řeší následující věta.

Věta 5.3.1.

Nechť funkce $z = F(x, y)$ je spojitá na okolí bodu $A = [x_0, y_0]$ a $F(A) = 0$. Nechť F má v bodě A spojitou parciální derivaci $\frac{\partial F}{\partial y}(A)$ a platí $\frac{\partial F}{\partial y}(A) \neq 0$. Pak existuje okolí bodu A, na kterém je rovnicí $F(x, y) = 0$ definována jediná spojitá implicitní funkce $y = f(x)$.

Poznámka

Podmínka $\frac{\partial F}{\partial y}(A) \neq 0$ je podmínkou pouze postačující pro existenci implicitní funkce. Uvažujme rovnici $y^3 - x = 0$. Pak $F(x, y) = y^3 - x$ a platí

$$\frac{\partial F}{\partial y}(0, 0) = 3y^2\Big|_{[0,0]} = 0.$$

Přesto na okolí bodu $[0, 0]$ existuje jediná implicitní funkce $y = \sqrt[3]{x}$ určená rovnicí $y^3 - x = 0$.

Následující věta řeší otázku jak implicitní funkce derivovat.

Věta 5.3.2.

Nechť jsou splněny předpoklady věty 5.3.1. Nechť má funkce $z = F(x, y)$ spojité parciální derivace. Pak má implicitní funkce f, která je na okolí bodu $A = [x_0, y_0]$ daná rovnicí $F(x, y) = 0$, derivaci f' v bodě x_0 a platí

$$f'(x_0) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, y_0)}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, y_0)}.$$

Poznámka

Pro výpočet derivace také můžeme použít následující postup. V rovnici $F(x,y)=0$ prohlásíme y za funkci proměnné x, celou rovnici pak derivujeme podle x. Vyjádříme derivaci y podle x, viz. řešené úlohy.

Pro výpočet druhé derivace implicitní funkce $y=f(x)$ v bodě $A=[x_0,y_0]$ dané rovnicí $F(x,y)=0$ lze použít vztah

$$f''(x_0)=\frac{1}{\left(\frac{\partial F}{\partial y}(A)\right)^3}\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial F}{\partial x}(A) & \frac{\partial F}{\partial y}(A) \\ \frac{\partial F}{\partial x}(A) & \frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(A) & \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(A) \\ \frac{\partial F}{\partial y}(A) & \frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}(A) & \frac{\partial^2 F}{\partial y^2}(A)\end{vmatrix}.$$

Položme si nyní otázku, jak najít **tečnu k implicitní funkci**. Tečna t ke grafu funkce $y=f(x)$ v bodě $A=[x_0,y_0=f(x_0)]$ je dána rovnicí

$$y-y_0=f'(x_0)(x-x_0).$$

Dosadíme do rovnice za derivaci f' výraz uvedený ve větě 5.3.2. Dostáváme

$$y-y_0=-\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(A)}{\frac{\partial F}{\partial y}(A)}(x-x_0).$$

Rovnice tečny ke grafu implicitní funkce pak bude mít tvar

$$t:\quad \frac{\partial F}{\partial x}(A)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(A)(y-y_0)=0.$$

Normála n implicitní funkce v bodě A je určena bodem A a směrem $\vec{s}_n$, $\vec{s}_n\perp\vec{s}_t$.

Věta 5.3.3.

Nechť $y=f(x)$ je implicitní funkce určená rovnicí $F(x,y)=0$ v bodě A. **Tečna** k implicitní funkci v bodě A bude určena rovnicí

$$t:\quad \frac{\partial F}{\partial x}(A)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(A)(y-y_0)=0.$$

Normála k implicitní funkci v bodě A bude určena rovnicí

$$n:\quad \frac{\partial F}{\partial y}(A)(x-x_0)-\frac{\partial F}{\partial x}(A)(y-y_0)=0.$$

Podívejme se nyní na případ funkce tří proměnných. Analogicky jako v případě funkce dvou proměnných zformulujeme dvě důležité věty.

Věta 5.3.4.

Nechť funkce $u = F(x, y, z)$ je spojitá na okolí bodu $\boldsymbol{A} = [x_0, y_0, z_0]$ a $F(\boldsymbol{A}) = 0$. Nechť F má v bodě $\boldsymbol{A}$ spojitou parciální derivaci $\frac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{A})$ a platí $\frac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{A}) \neq 0$. Pak existuje okolí bodu $\boldsymbol{A}$, na kterém je rovnicí $F(x, y, z) = 0$ definována jediná spojitá implicitní funkce $z = f(x, y)$.

Věta 5.3.5.

Nechť jsou splněny předpoklady věty 5.3.4. Nechť má funkce $u = F(x, y, z)$ spojité parciální derivace. Pak má implicitní funkce f, která je na okolí bodu $\boldsymbol{A} = [x_0, y_0, z_0]$ daná rovnicí $F(x, y, z) = 0$, derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(A)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(A)$, $A = [x_0, y_0]$ a platí

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{A})}{\frac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{A})}, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(A) = -\frac{\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{A})}{\frac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{A})}.$$

Parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial x}$ implicitní funkce $z=f(x, y)$ dané rovnicí $F(x, y, z)=0$ lze určit následujícím způsobem: v rovnici $F(x, y, z) = 0$ považujeme y za konstantu, z je funkcí proměnných x, y. Rovnici derivujeme podle x a vyjádříme derivaci z podle x, viz. řešené příklady. Parciální derivaci $\frac{\partial f}{\partial y}$ určíme analogicky. V rovnici $F(x, y, z) = 0$ prohlásíme x za konstantu, z bude funkcí proměnných x, y. Rovnici derivujeme podle y a vyjádříme derivaci z podle y.

Jak budeme hledat **tečnou rovinu** k ploše $F(x, y, z) = 0$? Tečná rovina k ploše $z = f(x, y)$ má v bodě $\boldsymbol{A} = [x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)]$ rovnici

$$z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(A)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(A)(y - y_0).$$

Je-li rovnicí $F(x, y, z) = 0$ na okolí bodu $\boldsymbol{A}$ daná nějaká implicitní funkce, pak

$$z - z_0 = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{A})}{\frac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{A})}(x - x_0) - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{A})}{\frac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{A})}(y - y_0).$$

Tečná rovina τ je pak dána rovnicí

$$\tau: \frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{A})(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{A})(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{A})(z-z_0)=0.$$

Věta 5.3.6.

Nechť $z=f(x,y)$ je implicitní funkce určená rovnicí $F(x,y,z)=0$ a bodem $\boldsymbol{A}=[x_0,y_0,z_0]$. **Tečná rovina** ke grafu implicitní funkce $z=f(x,y)$ v bodě $\boldsymbol{A}$ bude určena rovnicí

$$\tau: \frac{\partial F}{\partial x}(\boldsymbol{A})(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(\boldsymbol{A})(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(\boldsymbol{A})(z-z_0)=0.$$

Poznámka

Všimněte si, že na levé straně rovnice tečné roviny vystupuje diferenciál funkce F v bodě $\boldsymbol{A}$.

Řešené úlohy

Příklad 5.3.1. Vypočítejte y', y'' implicitní funkce dané rovnicí

$$(x^2+y^2)^2-3x^2y-y^3=0$$

v bodě $[0,1]$.

Řešení:

1. Nejdříve při určení y' vyjdeme z věty 5.3.2.

$$F(x,y)=(x^2+y^2)^2-3x^2y-y^3,$$

vypočítáme jednotlivé parciální derivace funkce F podle proměnných x a y v bodě $[0,1]$,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(0,1)=(2(x^2+y^2)2x-6xy)\Big|_{[0,1]}=0,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(0,1)=(2(x^2+y^2)2y-3x^2-3y^2)\Big|_{[0,1]}=1.$$

Dosadíme do vzorce pro derivaci implicitní funkce a dostáváme

$$y'(0) = f'(0) = -\frac{4x^3 + 4xy^2 - 6xy}{4x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 3y^2}\bigg|_{[0,1]} = -\frac{0}{1} = 0.$$

2. Jiný způsob jak najít y'. V rovnici $(x^2+y^2)^2 - 3x^2y - y^3 = 0$ prohlásíme y za funkci proměnné x a rovnici derivujeme podle x. Nechť $y = y(x)$, pak

$$2(x^2+y^2)(2x+2yy') - 3(2xy + x^2y') - 3y^2y' = 0.$$

Aby bylo zcela jasné, jak jsme k předcházející rovnici dospěli, rozeberme si podrobně, jak se derivují funkce v této rovnici, konkrétně $-3x^2y$ a $-y^3$. Znovu zdůrazněme, že jsme předpokládali závislost y na x, tedy $y = y(x)$. Derivujeme $-3x^2y$ podle pravidla o součinu dvou funkcí proměnné x,

$$(-3x^2y)' = -3(x^2y)' = -3[(x^2)'y + x^2(y)'] = -3(2xy + x^2y').$$

Zde derivace y podle x není nula, protože jsme předpokládali, že y závisí na x. Derivace y podle x se bude značit standardně, y'.

Derivujeme $-y^3$ podle pravidla o derivaci složené funkce,

$$(-y^3)' = -(y^3)' = -3y^2y'.$$

Řekněme, že si pro lepší názornost zvolíme nějakou konkrétní závislost y na x, např. nechť $y = \sin x$. Tedy $-y^3 = \sin^3 x$. Jak bude vypadat derivace v tomto konkrétním případě?

$$\begin{aligned}(-y^3)' &= -(y^3)' \overset{y=\sin x}{=} -(\sin^3 x)' = -3\sin^2 x \cos x \\ &= -3\sin^2 x(\sin x)' \overset{\sin x = y}{=} -3y^2(y)' = -3y^2y'.\end{aligned}$$

Vraťme se k původní úloze. Poté co jsme rovnici derivovali podle x, stačí nyní vyjádřit z této derivované rovnice y',

$$\begin{aligned}&4x^3 + 4yy' + 4xy^2 + 2y^3y' - 6xy - 3x^2y' - 3y^2y' = 0,\\ &(4x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 3y^2)y' = -4x^3 - 4xy^2 + 6xy,\\ &y' = -\frac{4x^3 + 4xy^2 - 6xy}{4x^2y + 4y^3 - 3x^2 - 3y^2},\end{aligned}$$

dosadíme bod $[0,1]$ a dostaneme výsledek

$$y'(0) = -\frac{0}{1} = 0.$$

Příklad 5.3.2. Vypočítejte y', y'', implicitní funkce $y = f(x)$ určené rovnicí

$$x^2 + xy + y^2 - 3 = 0$$

v bodě $[1,1]$.

Řešení:

1. Využijeme větu 5.3.2. Ze zadání dostáváme $F(x,y) = x^2 + xy + y^2 - 3$.

$$y'(1) = -\left.\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}}\right|_{[1,1]} = -\left.\frac{2x+y}{x+2y}\right|_{[1,1]} = -\frac{3}{3} = -1.$$

Pro určení druhé derivace využijeme vztah uvedený za větou 5.3.2. Vypočítáme jednotlivé hodnoty parciálních derivací a determinant matice vytvořené z těchto hodnot. Tedy,

$$y''(1) = f''(1) = \left.\frac{1}{(x+2y)^3}\right|_{[1,1]} \begin{vmatrix} 0 & (2x+y)\big|_{[1,1]} & (x+2y)\big|_{[1,1]} \\ (2x+y)\big|_{[1,1]} & 2\big|_{[1,1]} & 1\big|_{[1,1]} \\ (x+2y)\big|_{[1,1]} & 1\big|_{[1,1]} & 2\big|_{[1,1]} \end{vmatrix},$$

$$y''(1) = \frac{1}{3^3} \begin{vmatrix} 0 & 3 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{vmatrix} = \frac{1}{27}(-18) = -\frac{2}{3}.$$

2. Totéž můžeme získat i jiným způsobem. Budeme předpokládat v rovnici implicitní funkce závislost y na x, rovnici derivujeme podle x a vyjádříme y'.

$$2x + y + xy' + 2yy' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{2x+y}{x+2y} \Rightarrow y'(1) = -\frac{3}{3} = -1.$$

K získání druhé derivace implicitní funkce y'' musíme rovnici implicitní funkce derivovat dvakrát podle x a vyjádřit y''. Rovnici implicitní funkce jsme již jednou derivovali, stačí ji derivovat ještě jednou podle x,

$$(2x + y + xy' + 2yy' = 0)' \Rightarrow 2 + y' + y' + xy'' + 2y'y' + 2yy'' = 0,$$
$$2 + 2y' + 2(y')^2 + (x + 2y)y'' = 0 \Rightarrow y'' = -\frac{2 + 2y' + 2(y')^2}{x + 2y}$$
$$y''(1) = -\frac{2 + 2 \cdot (-1) + 2(-1)^2}{1 + 2 \cdot 1} = -\frac{2}{3}.$$

Příklad 5.3.3. Nalezněte derivaci funkce $y = f(x)$ dané implicitně rovnicí

$$x \sin y + \cos 2y = \cos y.$$

Řešení:

1. S využitím věty 5.3.2. a pro $F(x, y) = x \sin y - \cos y + \cos 2y$ dostáváme

$$y' = -\frac{\frac{\partial F}{\partial x}}{\frac{\partial F}{\partial y}} = -\frac{\sin y}{x \cos y + \sin y - 2 \sin 2y}, \quad x \cos y + \sin y - 2 \sin 2y \neq 0.$$

2. Předpokládejme v rovnici implicitní funkce závislost y na x, derivujme rovnici podle x a vyjádřeme y'. Tedy

$$\sin y + x \cos y y' + \sin y y' - 2 \sin 2y y' = 0 \Rightarrow y' = -\frac{\sin y}{x \cos y + \sin y - 2 \sin 2y},$$

přičemž

$$x \cos y + \sin y - 2 \sin 2y \neq 0.$$

Příklad 5.3.4. Nalezněte parciální derivace prvého řádu funkce $z = f(x, y)$ dané implicitně rovnicí

$$4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz + x - 4 = 0$$

v bodě $[1, 1, 1]$.

Řešení:

1. Využijeme větu 5.3.5. Pro $F(x, y, z) = 4x^2 + 2y^2 - 3z^2 + xy - yz + x - 4$

dostáváme

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = \frac{\partial f}{\partial x}(1,1) = -\left.\frac{\dfrac{\partial F}{\partial x}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}\right|_{[1,1,1]} = -\left.\frac{8x+y+1}{-6z-y}\right|_{[1,1,1]} = -\frac{10}{-7} = \frac{10}{7}.$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = \frac{\partial f}{\partial y}(1,1) = -\left.\frac{\dfrac{\partial F}{\partial y}}{\dfrac{\partial F}{\partial z}}\right|_{[1,1,1]} = -\left.\frac{4y+x-z}{-6z-y}\right|_{[1,1,1]} = -\frac{4}{-7} = \frac{4}{7}.$$

2. Stejný výsledek získáme také tak, že v rovnici implicitní funkce $F(x,y,z) = 0$ nejdříve prohlásíme y za konstantu, z bude funkcí x, y. Rovnici derivujeme podle x a vyjádříme derivaci z podle x. Tentýž postup platí i pro určení derivace z podle y jen s tím rozdílem, že v rovnici pro implicitní funkci $F(x,y,z) = 0$ prohlásíme za konstantu proměnnou x a rovnici derivujeme podle y.

$$\frac{\partial}{\partial x}(4x^2+2y^2-3z^2+xy-yz+x-4=0) \Rightarrow 8x-6z\frac{\partial z}{\partial x}+y+1-y\frac{\partial z}{\partial x} = 0,$$
$$8x+y+1+(-6z-y)\frac{\partial z}{\partial x} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{8x+y+1}{-6z-y}.$$

Dosadíme bod $[1,1,1]$, určíme tak hodnotu $\dfrac{\partial z}{\partial x}(1,1)$,

$$\frac{\partial z}{\partial x}(1,1) = -\left.\frac{8x+y+1}{-6z-y}\right|_{[1,1,1]} = -\frac{10}{-4} = \frac{10}{7}.$$

Analogicky vypočítáme derivaci z podle y v bodě $[1,1]$.

$$\frac{\partial}{\partial y}(4x^2+2y^2-3z^2+xy-yz+x-4=0) \Rightarrow 4y-6z\frac{\partial z}{\partial y}+x-z-y\frac{\partial z}{\partial y} = 0,$$
$$4y+x-z+(-6z-y)\frac{\partial z}{\partial y} = 0 \Rightarrow \frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{4y+x-z}{-6z-y}.$$

Dosadíme bod $[1,1,1]$, určíme tak hodnotu $\dfrac{\partial z}{\partial y}(1,1)$,

$$\frac{\partial z}{\partial y}(1,1) = -\left.\frac{4y+x-z}{-6z-y}\right|_{[1,1,1]} = -\frac{4}{-7} = \frac{4}{7}.$$

Příklad 5.3.5. Nalezněte tečnu a normálu v bodě $[1,1]$ funkce $y = f(x)$ určené implicitně rovnicí

$$xy + \ln y - 1 = 0.$$

Řešení: Pro nalezeni tečny využijeme větu 5.3.3. Vypočítejme nejdříve obě parciální derivace funkce $F(x,y) = xy + \ln y - 1$,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,1) = y\Big|_{[1,1]} = 1,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,1) = x + \frac{1}{y}\Big|_{[1,1]} = 2.$$

Dosadíme,

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(x-x_0) + \frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(y-y_0) = 0 \Rightarrow 1(x-1) + 2(y-1) = 0,$$

rovnice tečny pak bude mít tvar

$$t: \quad x + 2y - 3 = 0.$$

Pro určení rovnice normály dosadíme do

$$\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)(x-x_0) - \frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0)(y-y_0) = 0 \Rightarrow 2(x-1) - 1(y-1) = 0,$$

rovnice normály pak bude mít tvar

$$n: \quad 2x - y - 1 = 0.$$

Příklad 5.3.6. Nalezněte rovnici tečné roviny v bodě $[1,-2,4]$ ke grafu implicitní funkce $z = f(x,y)$ určené rovnicí

$$x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 2x - 12y + 8z - 7 = 0.$$

Řešení: Pro nalezeni rovnice tečny využijeme vetu 5.3.6. Nejdříve určíme hodnoty jednotlivých parciálních derivací funkce

$$F(x,y,z) = x^2 + 3y^2 - 4z^2 + 2x - 12y + 8z - 7$$

v bodě $[1,-2,4]$.

$$\frac{\partial F}{\partial x}(1,-2,4) = 2x + 2\Big|_{[1,-2,4]} = 4,$$
$$\frac{\partial F}{\partial y}(1,-2,4) = 6y - 12\Big|_{[1,-2,4]} = -24,$$
$$\frac{\partial F}{\partial z}(1,-2,4) = -8z + 8\Big|_{[1,-2,4]} = -24.$$

Dosadíme do rovnice tečné roviny

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x_0,y_0,z_0)(x-x_0)+\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0,z_0)(y-y_0)+\frac{\partial F}{\partial z}(x_0,y_0,z_0)(z-z_0)=0$$

$$\Rightarrow\ 4(x-1)-24(y+2)-24(z-4)=0\ \Rightarrow\ 4x-24y-24z+44=0.$$

Rovnice tečné roviny pak bude

$$\tau:\quad x-6y-6z+11=0.$$

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte derivaci implicitní funkce y dané rovnicí $x^2+y^2+y^3-xy=3$.

2. Vypočtěte derivaci implicitní funkce y dané rovnicí $\cot(3y)=x^2y$.

3. Vypočtěte derivaci implicitní funkce y dané rovnicí $2^{xy}-3^{x+y}=4$ v bodě $A=[1,2]$.

4. Vypočtěte derivace y', y'' implicitní funkce y dané rovnicí $\sin^2(xy)=0$ v bodě $[1,\pi]$.

5. Vypočtěte parciální derivace implicitní funkce z dané rovnicí $\dfrac{x+2y+3z}{y+z}=x$.

6. Určete parciální derivace implicitní funkce z dané rovnicí $\mathrm{e}^{x^2y+2y^2z+3xz^2}=4$.

7. Vypočtěte parciální derivace implicitní funkce z v bodě $A=[\frac{\pi^2}{8},5,0]$ dané rovnicí $\cos\sqrt{2x}+y^2z^3+2y=z$.

8. Nalezněte tečnou rovinu a normálu ke grafu funkce y zadané implicitně rovnicí $\dfrac{x+y}{x-y}=2$ v bodě $A=[3,1]$.

9. Nalezněte rovnici tečné roviny ke grafu funkce z zadané implicitně rovnicí $\sqrt{xy}-z+\ln(x^2+y^2)=0$ v bodě $[2,2,?]$.

10. Nalezněte rovnici tečné roviny ke grafu funkce z zadané implicitně rovnicí $\ln(\cos(x^2+y^2+z^2))=5x+3yz+6z$ v bodě $A=[0,0,0]$.

Výsledky úlohy k samostatnému řešení

1. $\frac{\partial F}{\partial x}=2x-y$, $\frac{\partial F}{\partial y}=2y+3y^2-x$, $y'=\frac{y-2x}{2y+3y^2-x}$.

2. $\frac{\partial F}{\partial x} = -2xy$, $\frac{\partial F}{\partial y} = -\frac{3}{\sin^2(3y)} - x^2$, $y' = -\frac{2xy\sin^2(3y)}{3+x^2\sin^2(3y)}$.

3. $\frac{\partial F}{\partial x} = y2^{xy}\ln 2 - 3^{x+y}\ln 3$, $\frac{\partial F}{\partial y} = x2^{xy}\ln 2 - 3^{x+y}\ln 3$, $y' = -\frac{y2^{xy}\ln 2 - 3^{x+y}\ln 3}{x2^{xy}\ln 2 - 3^{x+y}\ln 3}$, $y'(A) = -\frac{8\ln 2 - 27\ln 3}{4\ln 2 - 27\ln 3}$.

4. $\frac{\partial F}{\partial x} = 2y\sin(xy)\cos(xy)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2x\sin(xy)\cos(xy)$, $y' = -\frac{y}{x}$, $y'' = \frac{-y'x+y}{x^2}$, $y'(1) = -\pi$, $y''(1) = 2\pi$.

5. $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{1-y-z}{y+z}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-x-z}{(y+z)^2}$, $\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{-x+y}{(y+z)^2}$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{(1-y-z)(y+z)}{x-y}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{x+z}{y-x}$.

6. $\frac{\partial F}{\partial x} = \mathrm{e}^{x^2y+2y^2z+3xz^2}(2xy+3z^2)$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \mathrm{e}^{x^2y+2y^2z+3xz^2}(x^2+4yz)$, $\frac{\partial F}{\partial z} = \mathrm{e}^{x^2y+2y^2z+3xz^2}(2y^2+6xz)$, $\frac{\partial z}{\partial x} = -\frac{2xy+3z^2}{2(y^2+3xz)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{x^2+4yz}{2(y^2+3xz)}$.

7. $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{-\sin\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = 2yz^3+2$, $\frac{\partial F}{\partial z} = 3y^2z^2-1$, $\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\sin\sqrt{2x}}{\sqrt{2x}(3y^2z^2-1)}$, $\frac{\partial z}{\partial y} = -\frac{2yz^3+2}{3y^2z^2-1}$, $\frac{\partial z}{\partial x}(A) = -\frac{2}{\pi}$, $\frac{\partial z}{\partial y}(A) = 2$.

8. $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{-2y}{(x-y)^2}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{2x}{(x-y)^2}$, $\tau: -\frac{1}{2}(x-3)+\frac{3}{2}(y-1)=0$, $\tau: x-3y=0$, $n: 3x+y-10=0$.

9. $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{y}{2\sqrt{xy}} + \frac{2x}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{x}{2\sqrt{xy}} + \frac{2y}{x^2+y^2}$, $\frac{\partial F}{\partial z} = -1$, $\frac{\partial F}{\partial x}(A) = 1$, $\frac{\partial F}{\partial y}(A) = 1$, $\frac{\partial F}{\partial z}(A) = -1$, $z(2,2) = 2+\ln 8 = 2+3\ln 2$, $\tau:\ x+y-z-2+3\ln 2 = 0$.

10. $\frac{\partial F}{\partial x} = \frac{-2x\sin(x^2+y^2+z^2)}{\cos(x^2+y^2+z^2)} - 5$, $\frac{\partial F}{\partial y} = \frac{-2y\sin(x^2+y^2+z^2)}{\cos(x^2+y^2+z^2)} - 3z$, $\frac{\partial F}{\partial z} = \frac{-2z\sin(x^2+y^2+z^2)}{\cos(x^2+y^2+z^2)} - 3y - 6$, $\frac{\partial F}{\partial x}(A) = -5$, $\frac{\partial F}{\partial y}(A) = 0$, $\frac{\partial F}{\partial z}(A) = -6$, $\tau:\ 5x+6z=0$.

Kontrolní test

1. Vypočtěte derivaci implicitní funkce y dané rovnicí $y^2 + e^{x+y} = x^3$.

a) $y' = \dfrac{3x^2 - \mathrm{e}^{x+y}}{y(2+e^{x+y})}$ b) $y' = \dfrac{-3x^2 - \mathrm{e}^{x+y}}{y^2+e^{x+y}}$

c) $y' = \dfrac{3x^2 - \mathrm{e}^{x+y}}{2y+e^{x+y}}$ d) $y' = \dfrac{-3x^2 - \mathrm{e}^{x+y}}{2y+xe^{x+y}}$

2. Vypočtěte derivaci implicitní funkce y dané rovnicí $\sin(xy) + 2x^2 = y^2$.

a) $y' = -\dfrac{y\sin(xy)+4x}{x\sin(xy)-2y}$ b) $y' = -\dfrac{y\cos(xy)+4x}{x\cos(xy)-2y}$

c) $y' = \dfrac{\cos(xy)+4x}{\cos(xy)-2y}$ d) $y' = \dfrac{\sin(xy)+4x}{\sin(xy)-2y}$

3. Vypočtěte derivaci implicitní funkce y dané rovnicí $x^2\ln y = y^2\ln x$ v bodě $[\mathrm{e},\mathrm{e}]$.

a) $y'(\mathrm{e}) = -1$, b) $y'(\mathrm{e}) = 1$, c) $y'(\mathrm{e}) = -2$, d) $y'(\mathrm{e}) = 2$.

4. Vypočtěte derivace y', y'' v bodě $[\frac{\pi}{12}, \frac{\pi}{12}]$ implicitní funkce y dané rovnicí $\cos(4x - y) = x$.

a) $y'(A) = 2\sqrt{2}$, $y''(A) = 1$ b) $y'(A) = 1 + \sqrt{2}$, $y''(A) = -\sqrt{2}$

c) $y'(A) = 4 + \sqrt{2}$, $y''(A) = -4\sqrt{2}$ d) $y'(A) = 2$, $y''(A) = 4\sqrt{2}$

5. Vypočtěte parciální derivace implicitní funkce z dané rovnicí $\ln(x^2y^3 + z^4) = 3$.

a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{xy^3}{2z^3}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{3x^2y^2}{4z^3}$

b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-\ln(2xy^3)}{\ln(4z^3)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-\ln(3x^2y^2)}{\ln(4z^3)}$

c) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{xy^3 - 3}{2z^3}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{3x^2y^2 - 3}{2z^3}$

d) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{-2xy^3 - z^4}{x^2y^3 + z^3}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{-3x^2y^2 - y^4}{x^2y^3 + z^3}$

6. Vypočtěte parciální derivace implicitní funkce z dané rovnicí $\arctan(x + y) + \arctan(y + z) = x + y + z$.

a) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{(x+y)^2(1+(y+z)^2)}{(y+z)^2(1+(x+y)^2)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{1-(x+y)^2(y+z)^2}{(y+z)^2(1+(x+y)^2)}$

b) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{(x+y)^2(1+(y+z)^2)}{(y+z)^2(1+(x+y)^2)}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{1-(x+y)^2(y+z)^2}{(y+z)^2(1+(x+y)^2)}$

c) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{(x+y)^2}{(y+z)^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{(x+y)^2+(y+z)^2}{(y+z)^2}$

d) $\dfrac{\partial z}{\partial x} = -\dfrac{1+(y+z)^2}{1+(x+y)^2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y} = -\dfrac{2+(x+y)^2+(y+z)^2}{(1+(x+y)^2)(1+(y+z)^2)}$

7. Vypočtěte parciální derivace implicitní funkce z v bodě $A = [3, 0, -2]$ dané rovnicí $x^2yz^3 + z^4 = x^3y^3$.

a) $\dfrac{\partial z}{\partial x}(A) = \dfrac{9}{32}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(A) = -\dfrac{3}{2}$ b) $\dfrac{\partial z}{\partial x}(A) = 0$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(A) = -\dfrac{9}{4}$

c) $\dfrac{\partial z}{\partial x}(A) = \dfrac{3}{2}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(A) = 0$ d) $\dfrac{\partial z}{\partial x}(A) = \dfrac{9}{4}$, $\dfrac{\partial z}{\partial y}(A) = -\dfrac{9}{32}$

8. Nalezněte tečnou rovinu a normálu ke grafu funkce y v bodě $A = [-1, -1]$

zadané implicitně rovnicí $3^{xy} = y\ln 3 + x\ln 3$.

a) $\tau : x\ln 3 + y + 2 = 0,$
$n : x - y - 2 = 0.$

b) $\tau : x + y\ln 3 + 2 = 0,$
$n : x + y = 0.$

c) $\tau : x\ln 3 + y\ln 3 + 2 = 0,$
$n : x - y + 2 = 0.$

d) $\tau : x + y + 2 = 0,$
$n : x - y = 0.$

9. Nalezněte rovnici tečné roviny ke grafu funkce z v bodě $[2, 1, ?]$ zadané implicitně rovnicí $x + y - xz + yz = 0$.

a) $\tau : 2x - 4y - z - 3 = 0$

b) $\tau : -4x + 2y - z + 3 = 0$

c) $\tau : 4x - 2y - z - 3 = 0$

d) $\tau : -2x + 4y - z + 3 = 0.$

10. Nalezněte rovnici tečné roviny ke grafu funkce z v bodě $[-1, 3, 2]$ zadané implicitně rovnicí $\ln(xy + z^2) = 2$.

a) $\tau : 4x - y - z + 9 = 0$

b) $\tau : 3x - y + 4z - 2 = 0$

c) $\tau : 2x + y - 4z + 7 = 0$

d) $\tau : x + y + z - 4 = 0$

Výsledky testu

1. c), **2.** b), **3.** b), **4.** c), **5.** a), **6.** a), **7.** b), **8.** d), **9.** d), **10.** b).

Kontrolní otázky

Otázka 1. Jak definujeme parciální derivace a jaký je jejich geometrický význam?

Otázka 2. Sami navrhněte funkci tří proměnných a vypočítejte všechny parciální derivace až do třetího řádu této funkce.

Otázka 3. Co je to totální diferenciál funkce více proměnných?

Otázka 4. Porovnejte totální diferenciál funkce jedné proměnné s totálním diferenciálem funkce dvou proměnných z hlediska jejich geometrického významu.

Otázka 5. Jak hledáme tečnou rovinu a normálu k funkci dvou proměnných?

Otázka 6. Co je to Taylorův polynom?

Otázka 7. Co je to implicitní funkce?

Otázka 8. Uveďte postačující podmínku pro existenci implicitní funkce.

Otázka 9. Jak derivujeme implicitní funkce?

Otázka 10. Jak se hledá tečna a normála k implicitní funkci?

Shrnutí lekce

Σ

V rámci této kapitoly jsme se seznámili s důležitými pojmy diferenciálního počtu funkcí více proměnných. Především je nutné dobře zvládnout část věnovanou parciálním derivacím. Pomocí nich pak můžeme pracovat i s dalšími pojmy. Podkapitola věnovaná totálnímu diferenciálu nám dává návod jak hledat tečnou rovinu a normálu k dané ploše. V poslední části kapitoly jsme se seznámili s implicitními funkcemi a naučili jsme se tyto funkce derivovat.