5.2. Totální diferenciál, tečná rovina, Taylorův polynom

Definice 5.2.1.

Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ je v bodě $A = [x_0, y_0]$ **diferencovatelná**, nebo má v tomto bodě **totální diferenciál**, jestliže je možné její přírůstek Δz na nějakém okolí bodu A vyjádřit jako

$$\Delta z \equiv f(x_0 + h, y_0 + k) - f(x_0, y_0) = \mathcal{A}h + \mathcal{B}k + \rho\tau(h, k),$$

kde $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ jsou konstanty, $\rho = \sqrt{h^2 + k^2}$ a

$$\lim_{[h,k]\to[0,0]} \tau(h, k) = 0.$$

Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ je **diferencovatelná**, je-li diferencovatelná v každém bodě svého definičního oboru.

Číslo h představuje **přírůstek** na ose x, číslo k **přírůstek** na ose y.

Věta 5.2.1.

Je-li funkce $z = f(x, y)$ v bodě $A = [x_0, y_0]$ diferencovatelná, má v A parciální derivace prvého řádu, přičemž

$$\mathcal{A} = \frac{\partial f}{\partial x}(A), \quad \mathcal{B} = \frac{\partial f}{\partial y}(A).$$

Poznámka

Obvykle se používá označení $h = dx$, $k = dy$, tedy přírůstek funkce Δz můžeme vyjádřit jako

$$\Delta z = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy + \rho\tau(dx, dy).$$

Definice 5.2.2.

Je-li funkce $z = f(x, y)$ diferencovatelná, nazývá se výraz

$$dz = df(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy$$

totální diferenciál funkce $z = f(x, y)$.

Poznámka

Ekvivalentně lze totální diferenciál definovat takto: řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ je ***diferencovatelná*** *na okolí bodu $A = [x_0, y_0]$, jestliže existují reálná čísla $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ taková, že platí*

$$\lim_{[h,k]\to[0,0]} \frac{f(x_0 + h, y_0 + h) - f(x_0, y_0) - (\mathcal{A}h + \mathcal{B}k)}{\sqrt{h^2 + k^2}} = 0.$$

Lineární výraz $\mathcal{A}h + \mathcal{B}k$ proměnných h, k se nazývá ***totální diferenciál*** *funkce $z = f(x, y)$ v bodě $A = [x_0, y_0]$. Označujeme $df(A)(h, k)$, příp. $df(A)$, $dz(A)$ nebo $df(x_0, y_0)$, $dz(x_0, y_0)$.*

Z existence parciálních derivací neplyne spojitost funkce v daném bodě. Parciální derivace poskytují pouze informaci o tom, jak se funkce chová ve směrech rovnoběžných se souřadnými osami. Vlastnost diferencovatelnosti funkce však spojitost zaručí.

Věta 5.2.2.

Je-li funkce $z = f(x, y)$ v bodě $A = [x_0, y_0]$ diferencovatelná, pak je v tomto bodě spojitá.

Věta 5.2.3.

Jsou-li $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ spojité v bodě $A = [x_0, y_0]$, pak $z = f(x, y)$ je v A diferencovatelná (a tedy i spojitá).

Poznámka

Diferenciál lze mimo jiné využít k přibližnému výpočtu funkčních hodnot,

$$f(x, y) \approx f(x_0, y_0) + df(x_0, y_0).$$

Poznámka

1. *Pro funkci n-proměnných, $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$, je totálním diferenciálem výraz*

$$df = \frac{\partial f}{\partial x_1}dx_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}dx_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}dx_n.$$

2. ***Totálním diferenciálem druhého řádu*** *funkce $z = f(x, y)$ je výraz*

$$\begin{aligned} d^2f = d(df) &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right) \\ &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dx + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy\right)dy \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}dy\right)dx + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy\right)dy \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}dx^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}dxdy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}dy^2. \end{aligned}$$

3. *Totální diferenciály vyšších řádů a pro funkce tří a více proměnných se definují analogicky.*

Rovina v $\mathbb{R}^3$ o rovnici $z = \mathcal{A}x + \mathcal{B}y + \mathcal{C}$ se nazývá **tečnou rovinou** τ ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $\boldsymbol{A} = [x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)]$, jestliže

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} \frac{f(x, y) - \mathcal{A}x - \mathcal{B}y - \mathcal{C}}{\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}} = 0.$$

Jestliže má tato rovina procházet bodem $\boldsymbol{A}$, pak bod $\boldsymbol{A}$ musí splňovat rovnici roviny, tj. $f(x_0, y_0) = \mathcal{A}x_0 + \mathcal{B}y_0 + \mathcal{C}$. Vyjádříme $\mathcal{C} = f(x_0, y_0) - \mathcal{A}x_0 - \mathcal{B}y_0$ a dosadíme do rovnice roviny

$$\begin{aligned} z &= \mathcal{A}x + \mathcal{B}y + \mathcal{C} = \mathcal{A}x + \mathcal{B}y + f(x_0, y_0) - \mathcal{A}x_0 - \mathcal{B}y_0 \\ &= \mathcal{A}(x - x_0) + \mathcal{B}(y - y_0) + f(x_0, y_0). \end{aligned}$$

Tato rovina je tečnou rovinou, jestliže existuje totální diferenciál v bodě $A = [x_0, y_0]$, tj. $\mathcal{A} = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$, $\mathcal{B} = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)$. Tečná rovina k funkci $z = f(x, y)$ v bodě $\boldsymbol{A} = [x_0, y_0, f(x_0, y_0)]$ je pak určena rovnicí

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Je obvyklé rovnici roviny vyjadřovat také jako

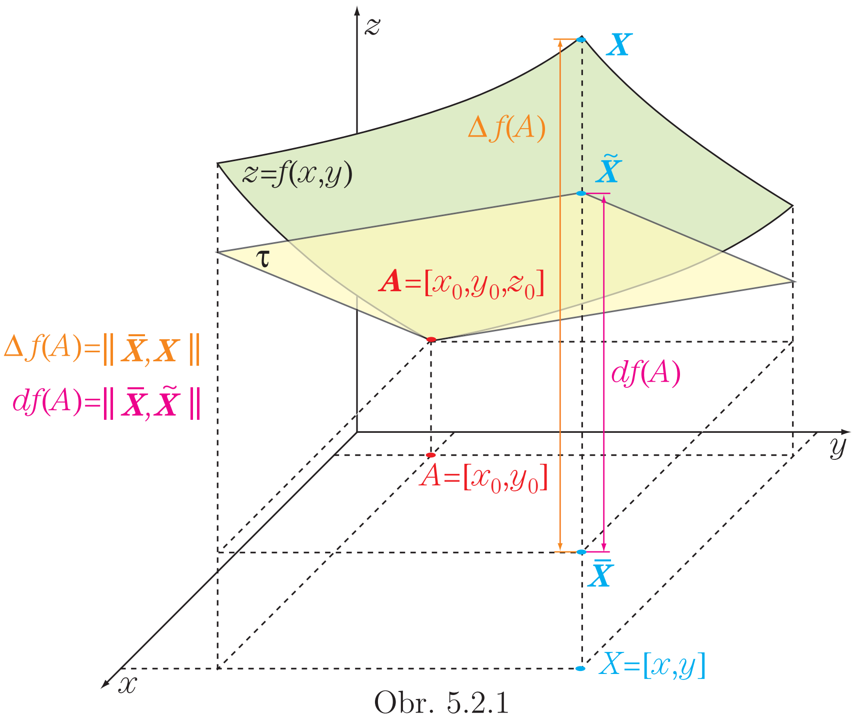
$$\tau : z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0),$$

připomeňme, že $z_0 = f(x_0, y_0)$.

Geometrický význam totálního diferenciálu. V předchozí rovnici pro tečnou rovinu τ výraz na pravé straně odpovídá diferenciálu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $A = [x_0, y_0]$, tedy

$$df(A) = z - z_0.$$

Hodnota diferenciálu funkce $z = f(x, y)$ v bodě A je rovna přírůstku $z - z_0$ tečné roviny τ k ploše o rovnici $z = f(x, y)$ v bodě $\boldsymbol{A} = [x_0, y_0, z_0]$ při přechodu z bodu $A = [x_0, y_0]$ do bodu $X = [x, y]$, libovolného bodu z okolí bodu A, ve kterém je funkce $z = f(x, y)$ diferencovatelná.



Obr. 5.2.1

Věta 5.2.4.

Nechť je funkce $z = f(x, y)$ diferencovatelná v bodě $A = [x_0, y_0]$. Pak v bodě $\boldsymbol{A} = [x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)]$ existuje **tečná rovina** ke grafu funkce $z = f(x, y)$ určená rovnicí

$$\tau : z - z_0 = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Přímka n jdoucí bodem $\boldsymbol{A}$ kolmo k tečné rovině se nazývá **normála plochy**, normála grafu funkce $z = f(x, y)$. Její směrový vektor je kolineární s normálovým vektorem roviny, tedy $\vec{s}_n = \vec{n} = \left(\frac{\partial f}{\partial x}(A), \frac{\partial f}{\partial y}(A), -1\right)$.

Věta 5.2.5.

Normála ke grafu funkce $z = f(x, y)$ v bodě $\boldsymbol{A}$ je určena parametrickými rovnicemi:

$$\begin{aligned} n:\ x &= x_0 + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)t, \\ y &= y_0 + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)t, \quad t \in \mathbb{R} \\ z &= z_0 - t. \end{aligned}$$

Na závěr kapitoly si zavedeme Taylorův polynom pro funkce více proměnných.

Věta 5.2.6.

Nechť funkce $y = f(x_1, x_2, \ldots x_n)$ je na okolí bodu $A \in \mathrm{D}_f$ alespoň $(m+1)$-krát spojitě diferencovatelná. Pak v bodě $X \in \mathcal{O}(A)$ platí

$$\begin{aligned} f(X) &= f(A) + \frac{df(A)}{1!} + \frac{d^2 f(A)}{2!} + \cdots + \frac{d^m f(A)}{m!} + R_m, \text{ kde} \\ R_m &= \frac{d^{m+1} f(A + \kappa(X - A))}{(m+1)!}, \kappa \in (0, 1). \end{aligned}$$

Definice 5.2.3.

Výraz z předchozí věty nazýváme **Taylorovým rozvojem** funkce f na okolí bodu A.

Hodnota R_m se nazývá **Lagrangeův zbytek** Taylorova rozvoje. Polynom

$$T_m(X) = f(A) + \frac{df(A)}{1!} + \frac{d^2 f(A)}{2!} + \cdots + \frac{d^m f(A)}{m!},$$

kde $dx_i = x_i - a_i$, $A = [a_1, a_2, \ldots a_n]$, se nazývá **Taylorův polynom** $m-$**tého řádu** funkce f v bodě A.

Je-li $A = [0, 0, \ldots 0]$, hovoříme o **MacLaurinovu polynomu**.

Řešené úlohy

Příklad 5.2.1. Prověřte diferencovatelnost funkce

$$f(x, y) = x^2 - 2xy - 3y^2$$

v bodě $A = [-1, 1]$ a nalezněte její totální diferenciál v bodě A.

Řešení: Využijeme větu 5.2.3., spojité parciální derivace funkce f v bodě A zaručí diferencovatelnost funkce f v bodě A. Nejdříve vypočítáme parciální derivace funkce f,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x - 2y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2x - 6y.$$

Tyto funkce jsou spojité na celém svém definičním oboru a tedy i v bodě A. Funkce f je diferencovatelná v bodě A.

Nalezneme totální diferenciál funkce f v bodě $A = [x_0, y_0] = [-1, 1]$,

$$\begin{aligned}
df &= \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = (2x - 2y)dx + (-2x - 6y)dy \\
df(A) &= \frac{\partial f}{\partial x}\Big|_A (x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}\Big|_A (y - y_0) \\
&= (2x - 2y)\Big|_{[-1,1]}(x + 1) + (-2x - 6y)\Big|_{[-1,1]}(y - 1) \\
&= -4(x + 1) - 4(y - 1) = -4x - 4y.
\end{aligned}$$

Příklad 5.2.2. Vypočítejte přibližně $f(1,11; 0,58)$, je-li $f(x, y) = x^3 + 4y^3$.

Řešení: Budeme uvažovat bod $[1; 0,5]$, tj. $x_0 = 1$, $y_0 = 0,5$, $f(1; 0,5) = 1,5$. Vypočítáme totální diferenciál (přírůstek na tečné rovině k zadanému bodu) v tomto bodě, přičemž $dx = 0,11$, $dy = 0,08$. Využijeme-li následující vztah pro totální diferenciál

$$df(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)dx + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)dy,$$

obdržíme

$$df(1;0,5) = (3x^2)\Big|_{[1;0,5]} \cdot 0,11 + (12y^2)\Big|_{[1;0,5]} \cdot 0,08$$
$$= 3 \cdot 0,11 + 12 \cdot 0,5^2 \cdot 0,08 = 0,57.$$

Využijeme vztah $f(x,y) \approx f(x_0,y_0) + df(x_0,y_0)$, tedy

$$f(1,11;0,58) \approx f(1;0,5) + df(1;0,5) = 1,5 + 0,57 = 2,07.$$

Přesně je $f(1,11;0,58) = 2,148\,079$. Rozdíl mezi oběma výsledky je dán tím, že jsme v prvním případě uvažovali přírůstek funkce na tečné rovině.

Ještě poznamenejme, že pokud používáme desetinná čísla, pak je vhodné jednotlivé komponenty bodů od sebe oddělit středníkem.

Příklad 5.2.3. Nalezněte totální diferenciál funkce

$$f(x,y) = \arctan \frac{x-y}{x+y}.$$

Řešení: Vypočítáme parciální derivace funkce f,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{1}{1+\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2} \frac{x+y-(x-y)}{(x+y)^2}$$
$$= \frac{(x+y)^2}{x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2} \frac{2y}{(x+y)^2} = \frac{y}{x^2+y^2},$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{1+\left(\frac{x-y}{x+y}\right)^2} \frac{-(x+y)-(x-y)}{(x+y)^2}$$
$$= \frac{(x+y)^2}{x^2+2xy+y^2+x^2-2xy+y^2} \frac{-2x}{(x+y)^2} = \frac{-x}{x^2+y^2}.$$

Dosadíme do formule pro totální diferenciál, definice 5.2.2., a dostáváme

$$df = \frac{\partial f}{\partial x}dx + \frac{\partial f}{\partial y}dy = \frac{y}{x^2+y^2}dx + \frac{-x}{x^2+y^2}dy = \frac{ydx - xdy}{x^2+y^2}.$$

Příklad 5.2.4. Nalezněte rovnici tečné roviny a normály ke funkce

$$z = 2x^2 + y^2$$

v bodě $\boldsymbol{A} = [1, 1, ?]$.

Řešení: Dosadíme do rovnic pro tečnou rovinu a normálu ke grafu funkce f, věta 5.2.4. a 5.2.5. Bod $\boldsymbol{A} = [x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)] = [1, 1, 3]$,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 4x\Big|_{[1,1]} = 4, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(A) = 2y\Big|_{[1,1]} = 2.$$

Dosadíme do rovnice tečné roviny a dostáváme

$$\tau : z - 3 = 4(x - 1) + 2(y - 1) \Rightarrow \tau : 4x + 2y - z - 3 = 0.$$

Normála pak bude mít rovnice

$$n : x = 1 + 4t, \quad y = 1 + 2t, \quad z = 3 - t.$$

Příklad 5.2.5. Nalezněte diferenciál druhého řádu funkce

$$f(x, y) = y \sin x + x \cos y.$$

Řešení: Vypočítáme parciální derivace druhého řádu a dosadíme do formule pro diferenciál druhého řádu.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y \sin x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cos x - \sin y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x \cos y.$$

Totálním diferenciálem druhého řádu pak bude

$$d^2 f = -y \sin x dx^2 + 2(\cos x - \sin y) dx dy - x \cos y dy^2.$$

Příklad 5.2.6. Nalezněte Taylorův polynom druhého řádu funkce

$$f(x, y) = 3x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 3y + 1$$

v bodě $A = [1, 2]$.

Řešení: Dosadíme do formule pro Taylorův polynom, definice 5.2.3. Nejdříve vypočítáme $df(A)$ a $d^2 f(A)$,

$$f(A) = -4$$

$$df(A) = (6x - 2y - 2)\Big|_{[1,2]}(x - 1) + (-2x + 2y - 3)\Big|_{[1,2]}(y - 2) = -y + 2,$$

$$
\begin{aligned}
d^2f(A) &= 6\Big|_{[1,2]}(x-1)^2 + 2(-2)\Big|_{[1,2]}(x-1)(y-2) + 2\Big|_{[1,2]}(y-2)^2 \\
&= 6x^2 - 12x + 6 - 4xy + 8x + 4y - 8 + 2y^2 - 8y + 8 \\
&= 6x^2 + 2y^2 - 4x - 4xy - 4y + 6.
\end{aligned}
$$

Taylorův polynom pak bude mít vyjádření ve tvaru

$$
\begin{aligned}
T_2(X) &= -4 + \frac{-y+2}{1!} + \frac{6x^2 + 2y^2 - 4x - 4xy - 4y + 6}{2!} \\
&= -4 - y + 2 + 3x^2 + y^2 - 2x - 2xy - 2y + 3 \\
&= 3x^2 - 2xy + y^2 - 2x - 3y + 1.
\end{aligned}
$$

Úlohy k samostatnému řešení

1. Určete přibližně hodnotu $f(2,08; 1,99)$, je-li $f(x,y) = \sqrt{xy}$.

2. Určete totální diferenciál funkce $f(x,y) = \tan(x^2 + y^2)$.

3. Určete totální diferenciál funkce $f(x,y) = (x^3 + y^3)\sin(xy)$.

4. Určete totální diferenciál funkce $f(x,y) = \ln(\sin(xy^2))$.

5. Určete totální diferenciál funkce $f(x,y) = \mathrm{e}^{x^2y^2-4}$ v bodě $A = [-1, 2]$.

6. Určete tečnou rovinu a normálu k funkci $f(x,y) = x^2y^3 + x^3y^2 + x$ v bodě $\boldsymbol{A} = [1, -1, ?]$.

7. Určete tečnou rovinu a normálu k funkci $f(x,y) = \ln(x^2 - 3y)$ v bodě $\boldsymbol{A} = [2, 1, ?]$.

8. Určete tečnou rovinu a normálu k funkci $f(x,y) = \sqrt{x^2 + xy + 1}$ v bodě $\boldsymbol{A} = [0, 4, ?]$.

9. Určete totální diferenciál druhého řádu funkce $f(x,y) = \dfrac{xy}{x+y}$.

10. Nalezněte Taylorův polynom druhého řádu funkce $f(x,y) = \ln\left(\dfrac{1}{xy}\right)$ v bodě $A = [-2, -3]$.

Výsledky úlohy k samostatnému řešení

1. $2,035$.

2. $df = \frac{2x}{\cos^2(x^2+y^2)}dx + \frac{2y}{\cos^2(x^2+y^2)}dy$.

3. $df = (3x^2\sin(xy)+y(x^3+y^3)\cos(xy))dx+(3y^2\sin(xy)+x(x^3+y^3)\cos(xy))dy$.

4. $df = \frac{\cos(xy^2)}{\sin(xy^2)}(y^2dx + 2xydy)$.

5. $df(A) = -8x + 4y - 16$.

6. $\tau: 2x + y - z = 0,\ n: x = 1 + 2t,\ y = -1 + t,\ z = 1 - t$.

7. $\tau: 4x - 3y - z - 5 = 0,\ n: x = 2 + 4t,\ y = 1 - 3t,\ z = -t$.

8. $\tau: 2x - z + 1 = 0,\ n: x = 2t,\ y = 4,\ z = 1 - t$.

9. $d^2f = \frac{-2}{(x+y)^3}(y^2dx^2 - 2xydxdy + x^2dy^2)$.

10. $T_2 = \ln\frac{1}{6} + 3 + x + \frac{2}{3}y + \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{18}y^2$.

Kontrolní test

1. Určete přibližně hodnotu $f(3,01;2,9)$, je-li $f(x,y) = \ln\dfrac{x}{y}$.

a) $\frac{11}{300}$ b) $-0,03$ c) $\frac{11}{100}$ d) $-0,09$

2. Určete totální diferenciál funkce $f(x,y) = (x\sin y)^7$.

a) $df = 7(x\sin y)^6(xdx + \sin ydy)$

b) $df = 7(x\sin y)^6(\sin ydx + x\sin ydy)$

c) $df = 7(x\sin y)^6(xdx + \cos ydy)$

d) $df = 7(x\sin y)^6(\sin ydx + x\cos ydy)$

3. Určete totální diferenciál funkce $f(x,y) = \ln(x^2 + y^2)$.

a) $df = \dfrac{2}{x^2+y^2}(xdx + ydy)$ b) $df = \dfrac{2}{x^2+y^2}(ydx + xdy)$

c) $df = \dfrac{2}{x^2+y^2}(dx + dy)$ d) $df = \dfrac{2}{x^2+y^2}(\ln(2x)dx+\ln(2y)dy)$

4. Určete totální diferenciál funkce $f(x,y) = \arcsin\dfrac{x}{y}$.

a) $df = \dfrac{1}{\sqrt{1-x^2}}\left(dx - \dfrac{x}{y}dy\right)$ b) $df = \dfrac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}(-dx + dy)$

c) $df = \dfrac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\left(dx - \dfrac{x}{y}dy\right)$ d) $df = \dfrac{1}{\sqrt{y^2-x^2}}\left(\dfrac{1}{y}dx + xdy\right)$

5. Určete totální diferenciál funkce $f(x,y) = x\mathrm{e}^{3x+4y}$ v bodě $A = [4, -3]$.

a) $df(A) = 13x - 12y - 88$ b) $df(A) = 12x - 12y - 84$

c) $df(A) = 13x + 16y - 4$ d) $df(A) = 12x + 16y$

6. Určete tečnou rovinu a normálu k funkci $f(x,y) = \sin(3x - 2y)$ v bodě $\boldsymbol{A} = [0, 0, ?]$.

a) $\tau:\ 3x - 2y - z + 1 = 0,\ n:\ x = 3t,\ y = -2t,\ z = 1 - t$

b) $\tau:\ 3x - 2y - z = 0,\ n:\ x = 3t,\ y = -2t,\ z = -t$

c) $\tau:\ x + y - z = 0,\ n:\ x = t,\ y = t,\ z = -t$

d) $\tau:\ x + y - z + 1 = 0,\ n:\ x = t,\ y = t,\ z = 1 - t$

7. Určete tečnou rovinu k funkci $f(x,y) = x^5y - y^3$ v bodě $\boldsymbol{A} = [-1, 2, ?]$.

a) $\tau:\ 10x - 13y - z + 26 = 0$ b) $\tau:\ 10x - 11y - z + 22 = 0$

c) $\tau:\ 20x - 13y - z + 26 = 0$ d) $\tau:\ 10x - 11y - z + 22 = 0$

8. Určete tečnou rovinu k funkci $f(x,y) = \sqrt{2x} - \sqrt{3y} - x$ v bodě $\boldsymbol{A} = [2, 3, ?]$.

a) $\tau:\ x + 2y + 4z = 0$ b) $\tau:\ y + 2z - 3 = 0$

c) $\tau:\ x + y + 2z + 1 = 0$ d) $\tau:\ x + 2y + 4z - 1 = 0$

9. Určete totální diferenciál druhého řádu funkce $f(x,y) = \sin(5x + 2y)$.

a) $d^2f = -\sin(5x + 2y)(25dx^2 + 20dxdy + 4dy^2)$

b) $d^2f = -\sin(5x + 2y)(25dx^2 + 10dxdy + 4dy^2)$

c) $d^2f = \sin(5x + 2y)(5dx^2 + 20dxdy + 2dy^2)$

d) $d^2f = \sin(5x + 2y)(5dx^2 + 10dxdy + 2dy^2)$

10. Nalezněte Taylorův polynom druhého řádu funkce $f(x,y) = 3x^2y + 4xy^2 + x^3$ v bodě $A = [2, -1]$.

a) $T_2 = 24 - 16x + 20y + 4xy + 6x^2 + 16y^2$

b) $T_2 = 8 - 8x + 16y + 6xy + 3x^2 + 8y^2$

c) $T_2 = 16 - 12x + 12y + 8xy + 6x^2 + 16y^2$

d) $T_2 = 4 - 4x + 4y + 4xy + 3x^2 + 8y^2$

Výsledky testu

1. a), **2.** d), **3.** a), **4.** c), **5.** c), **6.** b), **7.** a), **8.** c), **9.** a), **10.** d).