5. Diferenciální počet funkcí více proměnných

Průvodce studiem

V této kapitole se budeme zabývat diferenciálním počtem pro funkce více proměnných, především budeme pracovat s funkcemi dvou proměnných. Ukážeme si, jak se zobecňuje pojem derivace funkce jedné proměnné a jaký je pak geometrický význam derivace funkce dvou proměnných. Seznámíme se s totálním diferenciálem funkce více proměnných a s implicitními funkcemi a jejich derivacemi.

Cíle

Parciální derivace, parciální derivace vyšších řádů, smíšené parciální derivace, totální diferenciál, tečná rovina, normála, Taylorův polynom, implicitní funkce.

Předpokládané znalosti

Diferenciální počet funkcí jedné proměnné, tj. derivace funkce, geometrický význam derivace funkce v bodě, totální diferenciál funkce jedné proměnné, Taylorův polynom.

5.1. Parciální derivace

Zavedeme pojem parciální derivace pro funkce dvou proměnných a ukážeme, jak se definuje parciální derivace funkce n-proměnných.

Podobně jako derivaci funkce jedné proměnné, definujeme parciální derivace funkce více proměnných jako „jisté “ limity.

Definice 5.1.1.

Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $A = [x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ **parciální derivaci** (prvého řádu) **podle** x, jestliže existuje (vlastní) limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0 + h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ má v bodě $A = [x_0, y_0] \in \mathbb{R}^2$ **parciální derivaci** (prvého řádu) **podle** y, jestliže existuje (vlastní) limita

$$\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0, y_0 + h) - f(x_0, y_0)}{h}.$$

Všimněme si, že obě limity jsou limity funkce jedné proměnné. Počítáme limitu funkce, která závisí pouze na parametru h, jen h se mění.

Poznámka

1. *Obvyklá označení pro parciální derivaci funkce f podle x v bodě $A = [x_0, y_0]$ jsou:*

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \quad \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0), \quad f_x(x_0, y_0), \quad f'_x(x_0, y_0), \quad \frac{\partial f}{\partial x}(A), \quad \frac{\partial z}{\partial x}(A), \ \textit{atd.}$$

2. *Parciální derivace funkce $z = f(x, y)$, tj. $\dfrac{\partial f}{\partial x}$, resp. $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ jsou opět funkcemi proměnných (x, y) se stejným nebo menším definičním oborem.*

3. *Parciální derivaci pro funkci n proměnných definujeme následujícím způsobem: Nechť $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ je funkce n proměnných, $A = [\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n] \in \mathbb{R}^n$, pak*

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(A) = \lim_{h\to 0} \frac{f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots \bar{x}_{i-1}, \bar{x}_i + h, \bar{x}_{i+1}, \ldots, \bar{x}_n) - f(\bar{x}_1, \bar{x}_2, \ldots, \bar{x}_n)}{h}.$$

Parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x^i}$ je definována jako „obyčejná“ derivace funkce podle proměnné x_i, a lze tedy očekávat, že pro parciální derivaci budou platit stejná pravidla jako pro derivaci funkce jedné proměnné.

Věta 5.1.1.

Nechť $f : \mathbb{R}^n \supseteq \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$, $g : \mathbb{R}^n \supseteq \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$ mají parciální derivaci podle proměnné x_i na $Q \subseteq \mathrm{D}_f \cap \mathrm{D}_g$, $i = \{1, 2, \dots n\}$, $X = [x_1, x_2, \dots x_n]$. Pak platí:

1. Pravidlo pro derivování součtu resp. rozdílu dvou funkcí n-proměnných:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f(X) \pm g(X)) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) \pm \frac{\partial g}{\partial x_i}(X),$$

2. Pravidlo pro derivování součinu dvou funkcí n-proměnných:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}(f(X) \cdot g(X)) = \frac{\partial f}{\partial x_i}(X) \cdot g(X) + f(X) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(X),$$

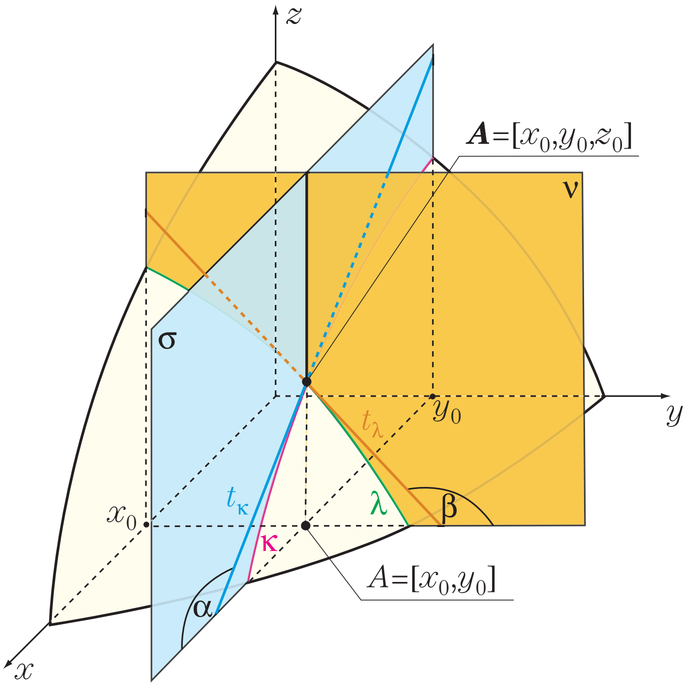
3. Pravidlo pro derivování podílu dvou funkcí n-proměnných:

$$\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{f(X)}{g(X)}\right) = \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i}(X) \cdot g(X) - f(X) \cdot \frac{\partial g}{\partial x_i}(X)}{g^2(X)}.$$

Jak budeme postupovat při parciálním derivování v konkrétních příkladech? Postupujeme tak, že proměnné, podle kterých se nederivuje, považujeme za konstanty. Proměnná, podle které derivujeme, je pak nezávislá proměnná.

Již víme jaký geometrický význam má derivace funkce jedné proměnné. Derivace funkce jedné proměnné v daném bodě je **směrnice** tečny ke grafu funkce jedné proměnné v tomto bodě. Jak to bude vypadat v případě derivací funkcí dvou proměnných, jaký bude jejich **geometrický význam**?

Nechť $f : \mathbb{R}^2 \supseteq \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$ je funkce dvou proměnných x, y. Nechť σ je rovina daná rovnicí $y = y_0$. Rovina σ je rovnoběžná se souřadnicovou rovinou xz (xz je dána rovnicí $y = 0$). Průnikem roviny σ s grafem funkce $z = f(x, y)$ je křivka κ. Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial x}(A)$, $A = [x_0, y_0]$, je směrnice ($\tan\alpha$) tečny t_κ ke křivce κ v bodě $\boldsymbol{A} = [x_0, y_0, z_0 = f(x_0, y_0)]$. Analogicky uvažujme rovinu ν danou rovnicí $x = x_0$. Rovina ν je rovnoběžná se souřadnicovou rovinou yz (yz je dána rovnicí $x = 0$). Průnikem roviny ν s grafem funkce $z = f(x, y)$ je křivka λ. Parciální derivace $\frac{\partial f}{\partial y}(A)$ je směrnice ($\tan\beta$) tečny t_λ ke křivce λ v bodě $\boldsymbol{A}$, Obr. 5.1.



Poznámka
Pro jednoduchost bod z definičního oboru funkce f budeme značit velkým písmenem, např. $A \in \mathrm{D}_f$. Jemu odpovídající bod na grafu funkce f budeme značit tučně, tj. $\boldsymbol{A}$.

Definice 5.1.2.

Parciální derivace druhého řádu funkce $z = f(x, y)$ jsou definovány vztahy:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right), \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right).$$

Parciální derivace $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}, \dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ nazýváme **smíšené parciální derivace**.

Analogicky definujeme parciální derivace druhého řádu pro funkce více proměnných a také parciální derivace vyšších řádů. Pořadí proměnných ve jmenovateli určuje pořadí jednotlivých parciálních derivací.

Následující **Schwarzova věta** charakterizuje tzv. „záměnnost“ smíšených parciálních derivací.

Věta 5.1.2.
Jsou-li smíšené parciální derivace $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ spojité v bodě $A = [x_0, y_0]$, pak jsou si v tomto bodě rovny, tj.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(A).$$

Poznámka
Za obdobných předpokladů věta platí i pro parciální derivace vyšších řádů, také pro funkce více proměnných. Např. nechť $u = f(x, y, z)$. Jsou-li $\dfrac{\partial^4 u}{\partial y^2 \partial z \partial x}$ a $\dfrac{\partial^4 u}{\partial x \partial y^2 \partial z}$ v bodě $[x_0, y_0, z_0]$ spojité, pak jsou si v tomto bodě rovny.

Řešené úlohy

Příklad 5.1.1. Určete všechny parciální derivace funkce

$$f(x, y) = 3x^4y^2 - 5 \operatorname{arctan} x^2.$$

Řešení: Jedná se o funkci dvou proměnných x, y. Hledáme tedy parciální derivace $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ a $\dfrac{\partial f}{\partial y}$.

1. Nejdříve budeme derivovat zadanou funkci podle x, proměnnou y budeme považovat za konstantu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 12x^3y^2 - \frac{5}{1+x^4}2x = 12x^3y^2 - \frac{10x}{1+x^4}.$$

2. Derivujeme podle y, nyní x budeme považovat za konstantu:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 6x^4y.$$

Příklad 5.1.2. Určete všechny parciální derivace funkce

$$g(x, y, z) = 3x^2 + \frac{x-y}{x+y} - \mathrm{e}^{x-2y+3z}.$$

Řešení: Postupně zadanou funkci derivujeme podle jednotlivých proměnných.

1. Derivujeme podle x, proměnné y, z považujeme za konstanty:

$$\begin{aligned}\frac{\partial g}{\partial x} &= 6x + \frac{1\cdot(x+y)-(x-y)\cdot 1}{(x+y)^2} - \mathrm{e}^{x-2y+3z}\cdot 1\\ &= 6x + \frac{2y}{(x+y)^2} - \mathrm{e}^{x-2y+3z}.\end{aligned}$$

2. Derivujeme podle y, proměnné x, z považujeme za konstanty:

$$\frac{\partial g}{\partial y} = \frac{-1\cdot(x+y)-(x-y)\cdot 1}{(x+y)^2} - \mathrm{e}^{x-2y+3z}\cdot(-2) = \frac{-2x}{(x+y)^2} + 2\mathrm{e}^{x-2y+3z}.$$

3. Derivujeme podle z, proměnné x, y považujeme za konstanty:

$$\frac{\partial g}{\partial z} = -\mathrm{e}^{x-2y+3z}\cdot 3 = -3\mathrm{e}^{x-2y+3z}.$$

Příklad 5.1.3. Určete hodnoty všech parciálních derivací funkce

$$f = x\mathrm{e}^{-x^2y}$$

v bodě $A=[1,-1]$.

Řešení: Vypočítáme jednotlivé parciální derivace zadané funkce a určíme jejich funkční hodnotu v bodě A přímým dosazením:

1. Derivujeme podle x, proměnnou y považujeme za konstantu, a poté do derivace funkce f podle x, což je opět funkce proměnných x, y, dosadíme bod A:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(A) = \mathrm{e}^{-x^2y} + x\mathrm{e}^{-x^2y}(-2xy)\Big|_{A=[1,-1]} = \mathrm{e}^{-x^2y}(1-2x^2y)\Big|_{A=[1,-1]} = 3\mathrm{e}.$$

2. Derivujeme podle y, proměnnou x považujeme za konstantu, a poté do derivace funkce f podle y dosadíme bod A:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(A) = x\mathrm{e}^{-x^2y}(-x^2)\Big|_{A=[1,-1]} = -x^3\mathrm{e}^{-x^2y}\Big|_{A=[1,-1]} = -\mathrm{e}.$$

Příklad 5.1.4. Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce

$$z = x^2y + \frac{y^3}{x^4}.$$

Řešení: Nejdříve vypočítáme parciální derivace prvého řádu:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy - \frac{4y^3}{x^5}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x^2 + \frac{3y^2}{x^4}.$$

Derivujeme ještě jednou podle x i podle y funkce $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2y + \frac{20y^3}{x^6},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{6y}{x^4},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 2x - \frac{12y^2}{x^5},\\
\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 2x - \frac{12y^2}{x^5}.
\end{aligned}$$

Příklad 5.1.5. Vypočítejte $\frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y}$, je-li

$z = y^2 \sin x.$

Řešení: Zadanou funkci z budeme postupně derivovat dvakrát podle x a poté podle y:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = y^2 \cos x, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = -y^2 \sin x, \quad \frac{\partial^3 z}{\partial x^2 \partial y} = -2y \sin x.$$

Úlohy k samostatnému řešení

1. Určete všechny parciální derivace funkce $f(x,y) = \sin(x^2 + y^2)$.

2. Určete všechny parciální derivace funkce $f(x,y) = \tan(x^3 y)$ v bodě $A = [0, \pi]$.

3. Určete všechny parciální derivace funkce $f(x,y,z) = \mathrm{e}^{xyz} + \mathrm{e}^{x+2y+3z} + x^y + y^z$.

4. Určete všechny parciální derivace funkce

$f(x,y,z) = \sin x \cos y + \sin(x+y)\cos(y+z) + \sin z$ v bodě $A = [0, \frac{\pi}{3}, \frac{\pi}{2}]$.

5. Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce

$f(x,y) = y \arcsin \sqrt{x} + \sqrt{(2x+3y)^3}$.

6. Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce $f(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ v bodě $A = [1, -1]$.

7. Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce $f(x,y,z) = x^2y^3z^3 + x^4y^5 - xy^7z - z^6 + y^2z^2$.

8. Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce $f(x,y,z) = \arcsin y + (x^3 + y^2 + z)\mathrm{e}^z$ v bodě $A = [2, \frac{1}{2}, 0]$.

9. Vypočtěte parciální derivaci $\dfrac{\partial^4 f}{\partial y \partial x \partial x \partial y}$ funkce $f(x,y) = 2x\mathrm{e}^y + 3y\mathrm{e}^x$.

10. Vypočtěte parciální derivaci $\dfrac{\partial^5 f}{\partial y \partial z \partial x \partial z \partial x}$ funkce $f(x,y,z) = \cos(2x)\cos(4y)\cos(3z)$.

Výsledky úlohy k samostatnému řešení

1. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2x\cos(x^2+y^2)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 2y\cos(x^2+y^2)$.

2. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{3x^2y}{\cos^2(x^3y)}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x^3}{\cos^2(x^3y)}$, $\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(A) = 0$.

3. $\frac{\partial f}{\partial x} = yz\mathrm{e}^{xyz} + \mathrm{e}^{x+2y+3z} + yx^{y-1}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = xz\mathrm{e}^{xyz} + 2\mathrm{e}^{x+2y+3z} + x^y\ln x + zy^{z-1}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = xy\mathrm{e}^{xyz} + 3\mathrm{e}^{x+2y+3z} + y^z\ln y$.

4. $\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x\cos y + \cos(x+y)\cos(y+z)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = -\sin x\sin y + \cos(x+y)\cos(y+z) - \sin(x+y)\sin(y+z)$, $\frac{\partial f}{\partial z} = -\sin(x+y)\sin(y+z) + \cos z$, $\frac{\partial f}{\partial x}(A) = \frac{1}{4}(2-\sqrt{3})$, $\frac{\partial f}{\partial y}(A) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\frac{\partial f}{\partial z}(A) = -\frac{\sqrt{3}}{4}$.

5. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y}{2\sqrt{1-x}\sqrt{x}} + 3\sqrt{2x+3y}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \arcsin\sqrt{x} + \frac{9}{2}\sqrt{2x+3y}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{y(1-2x)}{4[x(1-x)]^{\frac{3}{2}}} + 3(2x+3y)^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{27}{4}(2x+3y)^{-\frac{1}{2}}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{1}{2\sqrt{1-x}\sqrt{x}} + \frac{9}{2}(2x+3y)^{-\frac{1}{2}}$.

6. $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2x(x^2-3y^2)}{(x^2+y^2)^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{2y(3x^2-y^2)}{(x^2+y^2)^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x(3y^2-x^2)}{(x^2+y^2)^3}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = -\frac{1}{2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A) = -\frac{1}{2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = \frac{1}{2}$.

7. $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^3z^3 + 4x^3y^5 - y^7z$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 3x^2y^2z^3 + 5x^4y^4 - 7xy^6z + 2yz^2$, $\frac{\partial f}{\partial z} = 3x^2y^3z^2 - xy^7 - 6z^5 + 2y^2z$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2y^3z^3 + 12x^2y^5$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 6x^2yz^3 + 20x^4y^3 - 42xy^5z + 2z^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 6x^2y^3z - 30z^4 + 2y^2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 6xy^2z^3 + 20x^3y^4 - 7y^6z$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} = 6xy^3z^2 - y^7$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = 9x^2y^2z^2 - 7xy^6 + 4yz$.

8. $\frac{\partial f}{\partial x} = 3x^2\mathrm{e}^z$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{1}{\sqrt{1-y^2}} + 2y\mathrm{e}^z$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \mathrm{e}^z + (x^3+y^2+z)\mathrm{e}^z$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 6x\mathrm{e}^z$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = y(1-y^2)^{-\frac{3}{2}} + 2\mathrm{e}^z$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = (2+x^3+y^2+z)\mathrm{e}^z$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z} = 3x^2\mathrm{e}^z$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z} = 2y\mathrm{e}^z$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = 12$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = \frac{4\sqrt{3}}{9} + 2$, $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(A) = \frac{41}{4}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A) = 0$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(A) = 12$, $\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(A) = 1$.

9. $\frac{\partial^4 f}{\partial y\partial x\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(2x\mathrm{e}^y+3y\mathrm{e}^x)}{\partial y}\right)\right)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(2x\mathrm{e}^y+3\mathrm{e}^x)}{\partial x}\right)\right)$

$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(2\mathrm{e}^y+3\mathrm{e}^x)}{\partial x}\right) = \frac{\partial(3\mathrm{e}^x)}{\partial y} = 0.$

10. $\frac{\partial^5 f}{\partial y \partial z \partial x \partial z \partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial(\cos(2x)\cos(4y)\cos(3z))}{\partial x}\right)\right)\right)\right)$

$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial(-2\sin(2x)\cos(4y)\cos(3z))}{\partial z}\right)\right)\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial(6\sin(2x)\cos(4y)\sin(3z))}{\partial x}\right)\right)$

$= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial(12\cos(2x)\cos(4y)\sin(3z))}{\partial z}\right) = \frac{\partial(36\cos(2x)\cos(4y)\cos(3z))}{\partial y}$

$= -144\cos(2x)\sin(4y)\cos(3z).$

Kontrolní test

1. Určete všechny parciální derivace funkce $f(x,y) = x\sin^2(xy^2)$.

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \sin^2(xy^2) + 2xy^2\cos(xy^2)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2y\cos(xy^2)$

b) $\frac{\partial f}{\partial x} = 2xy^2\sin(xy^2)\cos(xy^2)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2y\sin(xy^2)\cos(xy^2)$

c) $\frac{\partial f}{\partial x} = \sin^2(y^2) + 2xy^2\sin(y^2)\cos(y^2)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2y\sin(2xy)\cos(2xy)$

d) $\frac{\partial f}{\partial x} = \sin^2(xy^2) + 2xy^2\sin(xy^2)\cos(xy^2)$, $\frac{\partial f}{\partial y} = 4x^2y\sin(xy^2)\cos(xy^2)$

2. Určete všechny parciální derivace funkce $f(x,y) = x^2\ln y$ v bodě $A = [3,1]$.

a) $\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(A) = 9$ b) $\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 6$, $\frac{\partial f}{\partial y}(A) = 9$

c) $\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 0$, $\frac{\partial f}{\partial y}(A) = 3$ d) $\frac{\partial f}{\partial x}(A) = 6$, $\frac{\partial f}{\partial y}(A) = 3$

3. Určete všechny parciální derivace funkce $f(x,y,z) = \arcsin(xy^2) - \arccos(xz^3)$.

a) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2}{\sqrt{1-xy^2}} - \frac{z^3}{\sqrt{1-xz^3}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy}{\sqrt{1-xy^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-3xz^2}{\sqrt{1-xz^3}}$

b) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2}{\sqrt{1-x^2y^4}} + \frac{z^3}{\sqrt{1-x^2z^6}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy}{\sqrt{1-x^2y^4}}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{3xz^2}{\sqrt{1-x^2z^6}}$

c) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2}{\sqrt{1-x^2y^4}} - \frac{z^3}{\sqrt{1-x^2z^6}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy}{\sqrt{1-x^2y^4}}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{-3xz^2}{\sqrt{1-x^2z^6}}$

d) $\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y^2}{\sqrt{1-xy^2}} + \frac{z^3}{\sqrt{1-xz^3}}$, $\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{2xy}{\sqrt{1-xy^2}}$, $\frac{\partial f}{\partial z} = \frac{3xz^2}{\sqrt{1-xz^3}}$

4. Určete všechny parciální derivace funkce $f(x,y,z) = (x+y+z)(3x+4y+5z)$ v bodě $A = [-1,2,-2]$.

a) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) = 1,\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(A) = 2,\quad \dfrac{\partial f}{\partial z}(A) = 3$

b) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) = -8,\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(A) = -9,\quad \dfrac{\partial f}{\partial z}(A) = -10$

c) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) = 7,\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(A) = 6,\quad \dfrac{\partial f}{\partial z}(A) = 5$

d) $\dfrac{\partial f}{\partial x}(A) = 11,\quad \dfrac{\partial f}{\partial y}(A) = 11,\quad \dfrac{\partial f}{\partial z}(A) = 11$

5. Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce $f(x,y) = x^y$.

a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2},\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^y \ln(x^2),\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = yx^{y-1}\ln x$

b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 x^{y-1},\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^y \ln^2 x,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x^{y-1}(1 - y\ln x)$

c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y(y-1)x^{y-2},\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = x^y (\ln x)^2,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x^{y-1}(y\ln x + 1)$

d) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^2 x^{y-2},\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = yx^{y-1}\ln x,\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = x^{y-1}(y\ln x + 1)$

6. Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce $f(x,y) = \ln \dfrac{x}{y}$ v bodě $A = [4,5]$.

a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = -\dfrac{1}{16},\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = \dfrac{1}{25},\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = 0$

b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = \dfrac{1}{16},\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = -\dfrac{1}{25},\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = 1$

c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = \dfrac{1}{4},\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = \dfrac{1}{5},\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = 0$

d) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A) = -\dfrac{1}{4},\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A) = -\dfrac{1}{5},\quad \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(A) = 1$

7. Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce $f(x,y,z) = yz \arctan x$.

a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \dfrac{2yz}{\cos^3 x},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{2z}{\cos^3 x},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \dfrac{2y}{\cos^3 x},$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \arctan x$

b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 0,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0,\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \dfrac{z}{1+x^2},\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = \dfrac{y}{1+x^2},$
$\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} = \dfrac{x}{1+x^2}$

c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{2yz\sin x}{\cos^3 x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{2z\sin x}{\cos^3 x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=\dfrac{2y\sin x}{\cos^3 x}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=\arctan x$

d) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}=\dfrac{-2xyz}{(1+x^2)^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=0$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}=\dfrac{z}{1+x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}=\dfrac{y}{1+x^2}$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}=\arctan x$

8. Určete všechny parciální derivace druhého řádu funkce

$f(x,y,z)=z\mathrm{e}^{xz}+y\mathrm{e}^{xy}$ v bodě $A=[1,2,3]$.

a) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)=27\mathrm{e}^3+8\mathrm{e}^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)=3\mathrm{e}^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(A)=4\mathrm{e}^3$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A)=7\mathrm{e}^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(A)=14\mathrm{e}^3$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(A)=0$

b) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)=8\mathrm{e}^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}=(A)6\mathrm{e}^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}=(A)3\mathrm{e}^3$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A)=8\mathrm{e}^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(A)=12\mathrm{e}^3$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(A)=5\mathrm{e}^3$

c) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)=27\mathrm{e}^3+8\mathrm{e}^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)=4\mathrm{e}^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(A)=5\mathrm{e}^3$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A)=8\mathrm{e}^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(A)=15\mathrm{e}^3$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(A)=0$

d) $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x^2}(A)=27\mathrm{e}^3$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y^2}(A)=9\mathrm{e}^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(A)=16\mathrm{e}^3$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(A)=8\mathrm{e}^2$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x\partial z}(A)=7\mathrm{e}^3$, $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}(A)=2\mathrm{e}^2$

9. Vypočtěte parciální derivaci $\dfrac{\partial^4 f}{\partial y\partial x\partial x\partial y}$ funkce $f(x,y)=\ln(x+2y)$.

a) $\dfrac{24}{(x+2y)^3}$ b) $-\dfrac{24}{(x+2y)^4}$ c) $\dfrac{6}{(x+2y)^3}$ d) $-\dfrac{6}{(x+2y)^4}$

10. Vypočtěte parciální derivaci $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x\partial y\partial y}$ funkce $f(x,y)=\sqrt{(5x-4y)^7}$.

a) 0 b) $\frac{105}{8}\sqrt{5x-4y}$ c) $1050\sqrt{5x-4y}$ d) $\sqrt{21(5x-4y)^4}$

Výsledky testu

1. d), **2.** a), **3.** b), **4.** b), **5.** c), **6.** a), **7.** d), **8.** c), **9.** b), **10.** c)