4.3. Limita a spojitost funkce více proměnných

V této kapitole zavedeme pojem limity a spojitosti pro funkci dvou proměnných. Pro funkce tří a více proměnných definujeme tyto pojmy zcela analogicky.

Výklad

Všichni již dobře znáte pojem limity funkce jedné proměnné, $y = f(x)$. Limita funkce $f : \mathbb{R} \supseteq \mathrm{D}_f \to \mathbb{R}$ v nějakém bodě $x_0 \in \mathbb{R}$ charakterizuje chování této funkce resp. funkčních hodnot na okolí bodu x_0. Řekneme, že funkce f má v bodě x_0 limitu $A \in \mathbb{R}$, jestliže „blížíme-li“ se k bodu x_0, pak se funkční hodnoty $f(x)$ „blíží“ k bodu A.

Připomeňme, že funkce f v bodě x_0 nemusí být vůbec definovaná, tj. hodnota $f(x_0)$ neexistuje, a přesto v tomto budě může existovat limita. Výpočet limity funkce jedné proměnné je poměrně snadný. K bodu x_0 se totiž můžeme blížit pouze ze dvou stran, zleva resp. zprava, a to vždy po přímce. Počítáme tak limitu zprava resp. limitu zleva funkce f. Rovnají-li se obě limity, pak říkáme, že limita v bodě x_0 existuje. Není-li tomu tak, pak limita funkce f v bodě x_0 neexistuje.

Hledáme-li limitu funkce $z = f(x, y)$, funkce dvou proměnných, limitní bod $P \in \mathbb{R}^2$. K tomuto bodu se můžeme „blížit“ mnoha způsoby, např. po různých přímkách, křivkách atd. Výpočet limity funkce dvou proměnných je mnohem obtížnější, a proto si ukážeme jen některé dílčí postupy pro výpočet vlastní limity funkce dvou proměnných.

Nejdříve si zavedeme pojem okolí bodu. K úplnému a přesnému zavedení tohoto pojmu by bylo potřeba definovat některé důležité objekty, kterými se zabývá matematická disciplína zvaná Topologie. Pro naše účely to však není nutné. Vystačíme si s následujícím zjednodušením.

Definice 4.3.1.

Nechť $P \in \mathbb{R}^2$ je bod.

Okolím bodu P budeme rozumět otevřený kruh $\mathcal{O}(P) \subset \mathbb{R}^2$ se středem v bodě P.

Otevřeným kruhem rozumíme kruh bez hraniční kružnice.

Prstencovým okolím (resp. **neúplným okolím**) bodu P rozumíme okolí $\mathcal{O}(P)$, ze kterého vyloučíme bod P. Značíme $\mathring{\mathcal{O}}(P) = \mathcal{O}(P) \setminus \{P\}$.

Deltovým okolím bodu P rozumíme otevřený kruh $\mathcal{O}_\delta(P) \subset \mathbb{R}^2$, $\delta > 0, \delta \in \mathbb{R}$, se středem v bodě P a poloměrem δ.

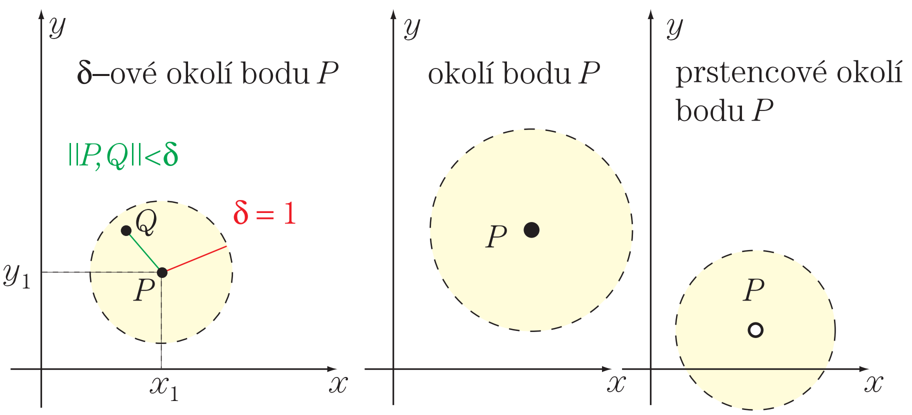
Prstencovým deltovým okolím bodu P rozumíme okolí $\mathcal{O}_\delta(P)$, ze kterého vyloučíme bod P. Značíme $\mathring{\mathcal{O}}_\delta(P)$.

Deltové okolí bodu P si představíme jako otevřený kruh se středem v bodě P a poloměrem δ. Jinými slovy to znamená, že takovým okolím je množina bodů Q, jejichž vzdálenost od P je menší než δ,

$$\mathcal{O}_\delta(P) = \{Q \in \mathbb{R}^2 |\ 0 \leq ||P,Q|| < \delta\}.$$

Připomeňme, že je-li $P = [x_1, y_1]$, $Q = [x_2, y_2]$, pak vzdálenost

$$||P,Q|| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2}.$$



Obr. 4.3.1

Poznámka

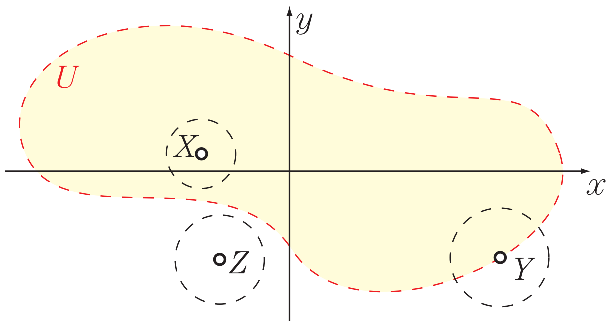
Rozdíl mezi okolím bodu P a deltovým okolím bodu P je jen v tom, že ve druhém případě explicitně specifikujeme poloměr takového okolí. ***Deltové okolí*** *bodu P je tedy okolí bodu P s poloměrem δ.*

Limity musíme počítáme v tzv. **hromadných bodech**. Je to proto, aby jsme se k příslušnému limitnímu bodu mohli „blížit“ .

Definice 4.3.2.

Buď $U \subset \mathbb{R}^2$. Bod $X \in \mathbb{R}^2$ se nazývá **hromadný bod** množiny U, jestliže každé jeho prstencové okolí $\mathring{\mathcal{O}}(X)$ má s množinou U neprázdný průnik, tj. $\mathring{\mathcal{O}}(X) \cap U \neq \emptyset$.

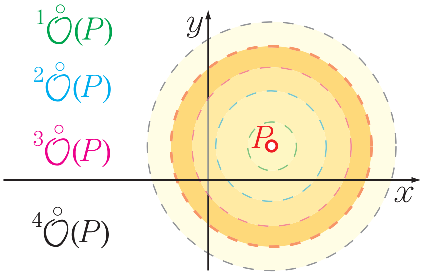
Na Obr. 4.3.2 body X, Y jsou hromadnými body množiny U, bod Z není hromadným bodem množiny U.



Obr. 4.3.2

Skutečně, každé prstencové okolí bodu X obsahuje nějaké body z množiny U, každé prstencové okolí bodu Y obsahuje nějaké body z množiny U. Na druhou stranu existuje prstencové okolí bodu Z takové, že neobsahuje žádný bod z množiny U.

Hledáme-li limitu funkce $z = f(x, y)$ v nějakém bodě $P \in \mathbb{R}^2$, pak bod P musí být hromadným bodem množiny D_f. Pokud tomu tak nebude, nemáme se po čem k bodu P „blížit“ , a nemá tedy smysl takovou limitu počítat. Všimněme si ještě, že hromadný bod množiny vůbec nemusí v dané množině ležet, tj. vůbec nemusí ležet v definičním oboru funkce f. Např. budeme-li uvažovat otevřený kruh se středem v bodě P, bez bodu P. Bod P je hromadným bodem otevřeného kruhu, protože každé prstencové okolí $\mathring{\mathcal{O}}(P)$ obsahuje body z otevřeného kruhu.



Obr. 4.3.3

Definice 4.3.3.

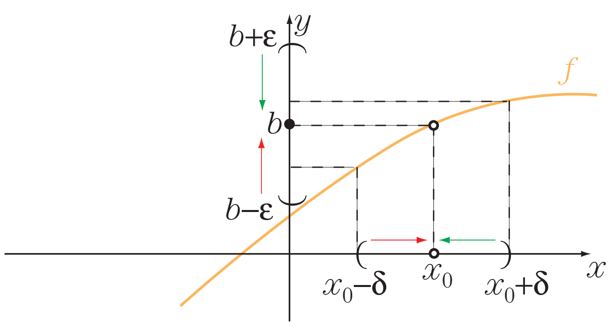
Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ má v hromadném bodě $P = [x_0, y_0]$ **limitu** $a \in R$, jestliže $\forall \varepsilon > 0$ existuje $\delta > 0$ takové, že $\forall X \in \mathring{\mathcal{O}}_\delta(P)$ platí

$$|f(X) - a| < \varepsilon.$$

Volíme následující označení limity funkce,

$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} f(x, y) = a, \ \text{resp.} \lim_{[x,y] \to [x_0, y_0]} f(x, y) = a, \ \text{resp.} \lim_{X \to P} f(X) = a.$$

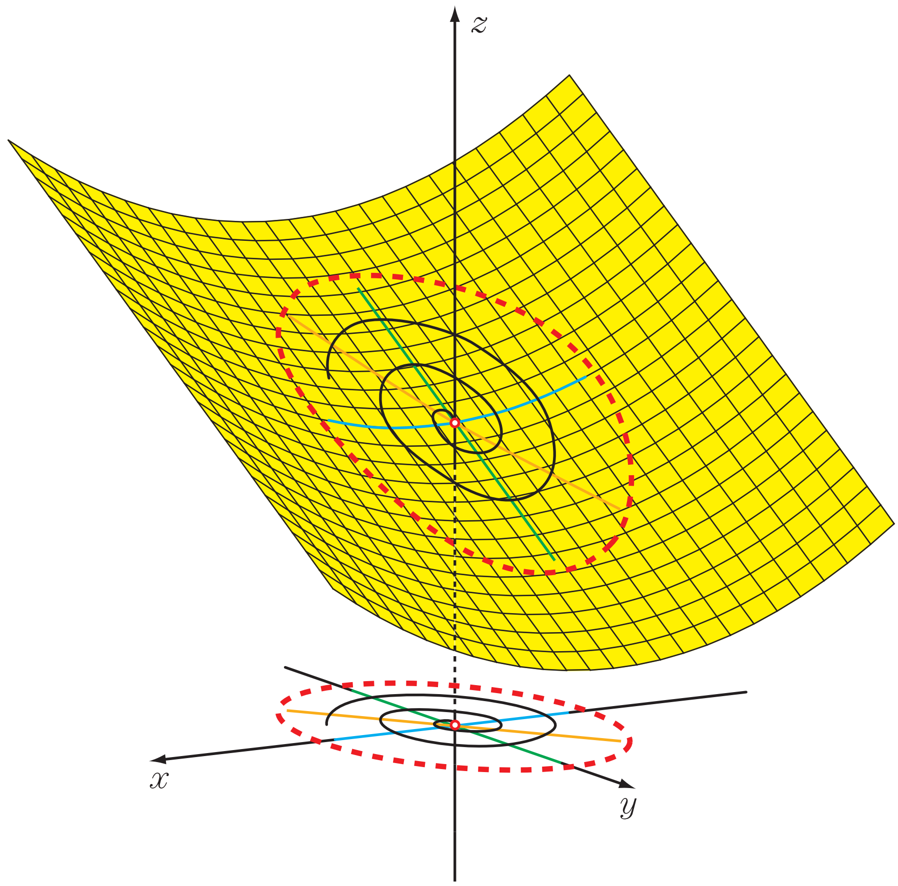
Na Obr. 4.3.4 je zobrazena limita funkce jedné proměnné. Limita funkce f v bodě x_0 existuje, když existují stejné jednostranné limity, tj. blížíme-li se k bodu x_0 zleva, blíží se funkční hodnoty $f(x)$ k číslu b. Totéž platí v případě, že se k bodu x_0 blížíme zprava, funkční hodnoty se blíží opět k číslu b.



Obr. 4.3.4

Stačí prozkoumat právě dvě možnosti, k limitnímu bodu x_0 se můžeme blížit buď zleva nebo zprava, a to vždy po přímce, ose x.

Pro funkci dvou proměnných je situace mnohem složitější. Možností, jak se blížit k limitnímu bodu je velmi mnoho, viz. Obr. 4.3.5.



Obr. 4.3.5

K počátku se můžeme blížit např. po přímkách procházejících počátkem, nebo po spirále atd.

Nejčastěji se při výpočtu limit funkcí dvou proměnných budeme setkávat se třemi případy. Výpočet provedeme dosazením limitního bodu, v podstatě takto vypočítáme limitu jako funkční hodnotu v limitním bodě. Nebo limitu počítáme postupným upravováním funkce. Třetí možností je důkaz neexistence dané limity.

Poznámka

Následující úlohy, a to především úlohy k samostatnému řešení a úlohy obsažené v kontrolním testu, jsou určeny především pro zájemce o tuto problematiku. Podstatné je, aby jste si uvědomili základní rozdíl mezi limitou funkce jedné a limitou funkce více proměnných.

Řešené úlohy

Příklad 4.3.1. Vypočítejte

$$\lim_{[x,y]\to[2,4]} \frac{x+2y}{2x+y}.$$

Řešení: Dosadíme limitní bod, tedy

$$\lim_{[x,y]\to[2,4]} \frac{x+2y}{2x+y} = \frac{2+2\cdot 4}{2\cdot 2+4} = \frac{10}{8} = \frac{5}{4}.$$

Příklad 4.3.2. Vypočítejte

$$\lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{xy+2x+y+2}{xy^2+y^2+x+1}.$$

Řešení: Postupným upravováním dostaneme

$$\lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{xy+2x+y+2}{xy^2+y^2+x+1} = „\tfrac{0}{0}“ = \lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{x(y+2)+(y+2)}{y^2(x+1)+(x+1)}$$
$$= \lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{(y+2)(x+1)}{(x+1)(y^2+1)} = \lim_{[x,y]\to[-1,0]} \frac{y+2}{y^2+1} = 2.$$

Příklad 4.3.3. Vypočítejte

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{2xy}{x^2+y^2}.$$

Řešení: K bodu $[0,0]$ se budeme blížit po přímkách, tj. cestu volíme po přímkách obsahujících bod $[0,0]$. Takové přímky mají rovnice $y = kx$, kde $k \in \mathbb{R}$ je parametr. Bude-li řešení záviset na parametru k, limita neexistuje. Dosadíme a dostáváme

$$\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{2xy}{x^2+y^2} \Rightarrow \lim_{x\to 0} \frac{2kx^2}{x^2+k^2x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2k}{1+k^2} = \frac{2k}{1+k^2}.$$

Limita závisí na parametru k. Pro různé hodnoty k dostáváme různou hodnotu limity. Limita proto neexistuje. Pokud limita nebude záviset na parametru k, pak o existenci limity nemůžeme nic říci. Nevíme, jestli existuje nebo neexistuje. Důvod je ten, že přímky tvoří pouze část možností, jak se k limitnímu bodu můžeme blížit.

Příklad 4.3.4. Vypočítejte

$$\lim_{[x,y]\to[1,2]} \frac{x^2y^2-4}{x^4+y^4-17}.$$

Řešení: K vypočítání této limity použijeme následující **větu o dvojnásobné limitě**.

Věta 4.3.1.

Jestliže existují limity

$$\lim_{x\to x_0}\left(\lim_{y\to y_0} f(x,y)\right) = a_1,\ \lim_{y\to y_0}\left(\lim_{x\to x_0} f(x,y)\right) = a_2,\ \lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x,y) = a,$$

pak $a = a_1 = a_2$.

Prakticky postupujeme tak, že si vybereme jednu proměnnou, např. proměnnou y, druhou pak považujeme za konstantu. Počítáme limitu funkce jedné proměnné, funkce závisející pouze na y. Dostaneme výraz, který již nebude obsahovat proměnnou y, ale pouze x. Nyní x budeme chápat jako proměnnou a vypočítáme limitu z funkce jedné proměnné, funkce závisející pouze na x, získáme hodnotu a_1,

$$\begin{aligned} a_1 &= \lim_{x\to 1}\left(\lim_{y\to 2} \frac{x^2y^2-4}{x^4+y^4-17}\right) = \lim_{x\to 1} \frac{4x^2-4}{x^4+16-17} \\ &= \lim_{x\to 1} \frac{4(x^2-1)}{(x^2+1)(x^2-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{4}{(x^2+1)} = 2. \end{aligned}$$

Totéž uděláme pro obě proměnné v opačném pořadí a dostáváme hodnotu a_2,

$$a_2 = \lim_{y\to 2}\left(\lim_{x\to 1} \frac{x^2y^2-4}{x^4+y^4-17}\right) = \lim_{y\to 2} \frac{y^2-4}{(y^2+4)(y^2-4)} = \lim_{y\to 2} \frac{1}{(y^2+4)} = \frac{1}{8}.$$

Vidíme, že $a_1 \neq a_2$, limita neexistuje. Pozor, jestliže $a_1 = a_2$, pak o existenci limity se opět nedá nic říci. Může, ale také nemusí existovat.

Na závěr kapitoly si nadefinujeme spojitost funkce dvou proměnných.

Definice 4.3.4.

Řekneme, že funkce $z = f(x, y)$ je **spojitá v bodě** $[x_0, y_0] \in \mathrm{D}_f$, jestliže platí

$$\lim_{[x,y]\to[x_0,y_0]} f(x, y) = f(x_0, y_0).$$

Funkce $z = f(x, y)$ je **spojitá**, je-li spojitá v každém bodě svého definičního oboru.

Úlohy k samostatnému řešení

1. Vypočtěte limitu $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[-1,6]} \frac{2x+3y-1}{x^4-y}$.

2. Vypočtěte limitu $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[\frac{\pi}{4},\frac{\pi}{12}]} \sin(x+y)\cdot\cos(x-y)$.

3. Vypočtěte limitu $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[-1,4]} \frac{x^3+1}{y(x+1)}$.

4. Ukažte, že neexistuje limita $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x(y+1)}{2x+3y}$.

5. Ukažte, že neexistuje limita $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[1,4]} \frac{x^2-1}{y-4}$.

6. Ukažte, že neexistuje limita $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^3-y^2}{xy-y^3}$.

7. Ukažte, že neexistuje limita $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[-1,-3]} \frac{y^3-x^3+26}{x+y+4}$.

8. Ukažte, že neexistuje limita $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[-\frac{1}{2},-\frac{1}{2}]} \frac{2x+1}{x+y+1}$.

9. Ukažte, že neexistuje limita $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x^2+x}{xy+y}$.

10. Ukažte, že neexistuje limita $\displaystyle\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{(x^2+y+1)(x^2-y+1)-1}{y}$.

Výsledky úlohy k samostatnému řešení

1. -3.

2. $\frac{3}{4}$.

3. $\lim_{[x,y]\to[-1,4]} \frac{(x+1)(x^2-x+1)}{y(x+1)} = \lim_{[x,y]\to[-1,4]} \frac{x^2-x+1}{y} = \frac{3}{4}$.

4. $(y = kx)$, $\lim_{x\to 0} \frac{x(kx+1)}{x(2+3k)} = \lim_{x\to 0} \frac{kx+1}{2+3k} = \frac{1}{2+3k}$.

5. $(y-4 = k(x-1))$, $\lim_{x\to 1} \frac{(x-1)(x+1)}{k(x-1)} = \lim_{x\to 1} \frac{x+1}{k} = \frac{2}{k}$.

6. $(y = kx)$, $\lim_{x\to 0} \frac{x^2(x-k^2)}{x^2(k-k^3x)} = \lim_{x\to 0} \frac{x-k^2}{k(1-k^2x)} = -k$.

7. $\lim_{x\to -1}(\lim_{y\to -3} \frac{y^3-x^3+26}{x+y+4}) = \lim_{x\to -1} \frac{-x^3-1}{x+1} = \lim_{x\to -1} \frac{-(x+1)(x^2-x+1)}{x+1} = \lim_{x\to -1} -(x^2-x+1) = -3$, $\lim_{y\to -3}(\lim_{x\to -1} \frac{y^3-x^3+26}{x+y+4}) = \lim_{y\to -3} \frac{y^3+27}{y+3} = \lim_{y\to -3} \frac{(y+3)(y^2-3y+9)}{y+3}) = \lim_{y\to -3} y^2-3y+9 = 27$, $-3 \neq 27$.

8. $(y+\frac{1}{2} = k(x+\frac{1}{2}))$, $\lim_{x\to -\frac{1}{2}} \frac{2x+1}{\frac{1}{2}(2x+1)(k+1)} = \frac{2}{k+1}$.

9. $\lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x(x+1)}{y(x+1)} = \lim_{[x,y]\to[0,0]} \frac{x}{y}$, $(y = kx)$, $\lim_{x\to 0} \frac{x}{kx} = \frac{1}{k}$.

10. $(y = kx^2)$, $\lim_{x\to 0} \frac{(x^2+kx^2+1)(x^2-kx^2+1)-1}{kx^2} = \lim_{x\to 0} \frac{x^2(x^2-k^2x^2+2)}{kx^2} = \lim_{x\to 0} \frac{(x^2-k^2x^2+2)}{k} = \frac{2}{k}$.

Kontrolní test

1. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[\frac{\pi}{6},\frac{\pi}{6}]} (\tan y + 2\cot(x+y))$.

a) $3\sqrt{3}$ b) $\sqrt{3}$ a) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ d) neexistuje

2. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x^3-y}{x+1}$.

a) 0 b) neexistuje c) 1 d) 2

3. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[1,2]} \dfrac{x+y^3}{y-x^3}$.

a) 0 b) 9 c) neexistuje d) $-\frac{9}{7}$

4. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[-1,1]} \dfrac{x^2+2xy+y^2}{x+y}$.

a) 2 b) neexistuje c) 0 d) 1

5. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x+y^3}{y-x^3}$.

a) $-\frac{9}{7}$ b) 0 c) 9 d) neexistuje

6. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[4,2]} \dfrac{2x-8}{y-2}$.

   a) neexistuje b) -2 c) 0 d) -1

7. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x(y-1)}{y}$.

   a) -1 b) 0 c) neexistuje d) 2

8. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[2,-3]} \dfrac{(x-2)(y+1)}{x+y+1}$.

   a) neexistuje b) -2 c) 0 d) $\frac{1}{2}$

9. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[5,8]} \dfrac{5y-8x}{x-5}$.

   a) 5 b) 8 c) 13 d) neexistuje

10. Vypočtěte limitu $\lim\limits_{[x,y]\to[0,0]} \dfrac{x^2}{y}$.

    a) 3 b) 1 c) neexistuje d) 0

Výsledky testu

1. b), **2.** a), **3.** b), **4.** c), **5.** d) ($y = \frac{1}{k}$), **6.** a) ($y = \frac{2}{k}$), **7.** c) ($y = \frac{-1}{k}$), **8.** a) ($y = \frac{-2}{k+1}$), **9.** d) ($y = 5k - 8$), **10.** c) (volíme $y = kx^2$, dostáváme $y = \frac{1}{k}$).

Kontrolní otázky

Otázka 1. Co je to funkce více proměnných?

Otázka 2. Uveďte příklad funkce dvou proměnných, funkce tří proměnných.

Otázka 3. Jak hledáme graf funkce dvou proměnných?

Otázka 4. K čemu se používá vrstevnice?

Otázka 5. Co rozumíme okolím bodu?

Otázka 6. Srovnejte definice limity funkce jedné proměnné a limity funkce dvou proměnných.

Otázka 7. Co je to hromadný bod množiny?

Otázka 8. Proč hledáme limity v hromadných bodech?

Otázka 9. S jakými obtížemi se setkáváme při hledání limit funkcí dvou proměnných?

Otázka 10. Kdy je funkce dvou proměnných spojitá.

Shrnutí lekce

Σ

V první části kapitoly jsme se seznámili s problematikou funkcí více proměnných. Naučili jsme se hledat definiční obor, pracovali jsme především s funkcemi dvou proměnných. Pro funkce tří a více proměnných hledáme definiční obor analogicky, tj. snažíme se najít omezující podmínky a specifikovat na základě těchto podmínek množinu bodů, ve kterých je taková funkce definovaná, ve kterých má smysl.

Ukázali jsme si způsob jak hledat grafy funkcí dvou proměnných. Grafy funkcí tří a více proměnných se již ovšem nedají graficky znázornit v trojrozměrném prostoru.

Zjistili jsme, že limita funkce dvou proměnných je přímým zobecněním limity funkce jedné proměnné. Diskutovali jsme některé problémy, které nás čekají při konkrétním hledání limit. Zavedli jsme si pojem spojité funkce dvou proměnných.