## 4.2. Graf funkce více proměnných

V této kapitole se soustředíme na funkce dvou proměnných. Pouze v tomto případě jsme schopni graf funkcí dvou proměnných zobrazit. Pro funkce tří a více proměnných ztrácí grafické vyjádření smysl.

**Výklad**

**Definice 4.2.1.**

**Grafem** funkce dvou proměnných $z = f(x, y)$ budeme rozumět množinu

$$G_f = \{[x, y, f(x, y)] \mid [x, y] \in \mathrm{D}_f\}.$$

***Poznámka***

1. *Množina $G_f$, tj.* ***graf*** *funkce dvou proměnných, je podmnožinou v $\mathbb{R}^3$. Nejčastěji se budeme setkávat s funkcemi, jejichž graf tvoří v $\mathbb{R}^3$ plochu.*

2. *Zobrazení grafu funkce dvou proměnných je poměrně obtížné. Celý proces si můžeme do jisté míry zjednodušit tím, že zkonstruujeme řezy příslušné plochy rovinami rovnoběžnými se souřadnicovými rovinami. Pro zobrazení grafů funkce dvou proměnných se používá především výpočetní technika.*

Na konkrétním příkladu si ukážeme způsob jak najít graf funkce dvou proměnných. Ještě předtím si zavedeme důležitý pojem, tzv. vrstevnici.

**Definice 4.2.2.**

Řezy grafu funkce dvou proměnných rovinou rovnoběžnou se souřadnicovou rovinou $xy$ (**půdorysnou**) se nazývají **vrstevnice**. **Vrstevnicovým grafem** budeme rozumět průměty vrstevnic do roviny $xy$.

Vrstevnice jsou křivky na grafu funkce dvou proměnných se stejnou funkční hodnotou. S vrstevnicí jste se již určitě setkali. Stačí se podívat na mapu, na které je zobrazena i nadmořská výška (geologické, geografické mapy, apod.). Vrstevnice je křivka, která reprezentuje množinu bodů se stejnou nadmořskou výškou.

## Řešené úlohy

**Příklad 4.2.1.** Určete definiční obor a nalezněte graf funkce

$$z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}.$$

**Řešení:** Nejdříve určíme omezující podmínku na definiční obor. Druhá odmocnina je schopna působit pouze na nezáporná čísla. Tedy,

$$16 - x^2 - y^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad -x^2 - y^2 \geq -16 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 \leq 4^2.$$

Definičním oborem je kruh se středem v počátku a poloměrem 4.

Nalezneme vrstevnice grafu. Budeme hledat řezy grafu funkce s rovinami rovnoběžnými se souřadnicovou rovinou $xy$ (s **půdorysnou**), resp. průměty těchto řezů do půdorysny.

***Poznámka***
*V následujícím textu budeme často ztotožňovat vrstevnici s jejím kolmým průmětem do roviny $xy$.*

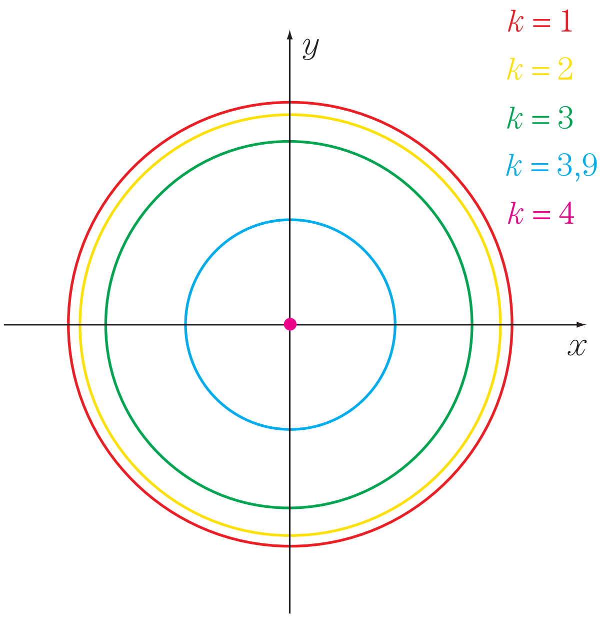
Klademe $z = k$, $k$ je nějaká konstanta, nějaké reálné číslo. Např. pro hodnotu $k = 0$ dostáváme rovnici $z = 0$, což je rovnice roviny $xy$. Pro hodnotu $k = 1$ dostáváme rovnici $z = 1$, což je rovnice roviny, která je rovnoběžná s rovinou $xy$, a jejíž vzdálenost od roviny $xy$ je rovna 1, atd.

Pro $z = k$, $k \geq 0 \wedge k \leq 4$ dostáváme

$$k = \sqrt{16 - x^2 - y^2} \quad \Rightarrow \quad k^2 = 16 - x^2 - y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2 + y^2 = 16 - k^2.$$

Proč volíme $k \geq 0$? Číslo $k$ dosazujeme za $z$ a $z = \sqrt{16 - x^2 - y^2}$, druhá odmocnina z nezáporného čísla bude vždycky číslo nezáporné, hodnota $z$ je nezáporná a tedy i číslo $k$ musí být nezáporné. Navíc $k \leq 4$, protože $k$ může nabývat pouze hodnot z intervalu $\langle 0, 4\rangle$. Pro $k > 4$ bude rozdíl na pravé straně rovnice $x^2 + y^2 = 16 - k^2$ záporný, kružnice se záporným poloměrem nemá smysl.

Vrstevnicemi budou kružnice se středem v počátku a s poloměry $\sqrt{16-k^2}$, $k \in \langle 0,4)$. Pro $k=4$ dostaneme tzv. degenerovanou kružnici s poloměrem 0, tj. bod. V tomto případě se jedná o počátek, bod o souřadnicích $[0,0]$.




Obr. 4.2.1

Navíc budeme ještě hledat řezy grafu funkce rovinami rovnoběžnými se zbývajícími souřadnicovými rovinami. Položme např. $x=k$. Hledáme řezy grafu funkce rovinami rovnoběžnými se souřadnicovou rovinou $yz$, tzv. **nárysnou**. Souřadnice $x$ leží v intervalu $\langle 0,4\rangle$, proto konstanta $k \in \langle 0,4\rangle$,

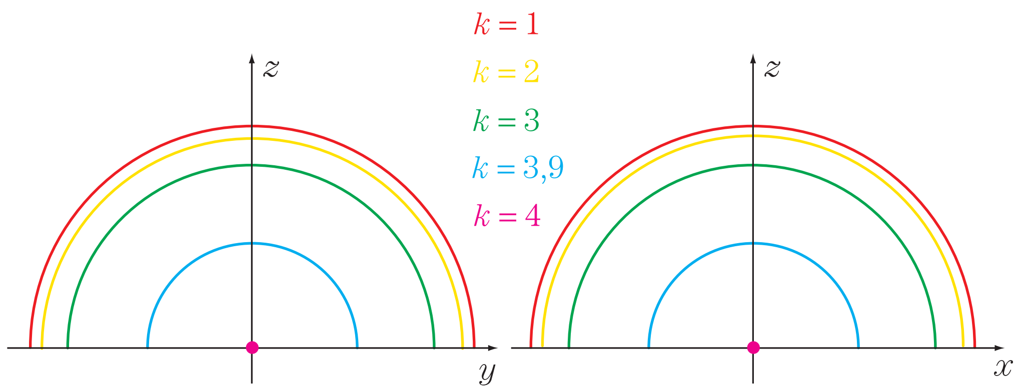
$$z=\sqrt{16-k^2-y^2} \quad \Rightarrow \quad z^2=16-k^2-y^2 \quad \Rightarrow \quad y^2+z^2=16-k^2.$$

Protože $z \geq 0$, poslední rovnice představuje půlkružnice se středy v počátku a poloměry $\sqrt{16-k^2}$, pro hodnotu $k=4$ se jedná o bod $[0,0]$.

Zvolíme-li $y=k$, pak hledáme řezy grafu funkce rovinami rovnoběžnými se souřadnicovou rovinou $xz$, tzv. **bokorysnou**. Dostáváme analogickou posloupnost rovnic jako v předcházejícím případě,

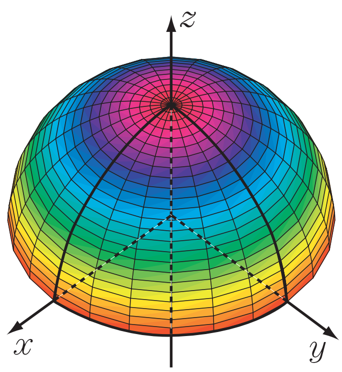
$$z=\sqrt{16-x^2-k^2} \quad \Rightarrow \quad z^2=16-x^2-k^2 \quad \Rightarrow \quad x^2+z^2=16-k^2.$$

Řezy jsou půlkružnice se středem v počátku a poloměrem $\sqrt{16-k^2}$.




Obr. 4.2.2

Nyní již máme dostatek informací pro celkovou představu o grafu této funkce. Grafem je polovina kulové plochy se středem v počátku a poloměrem 4.




Obr. 4.2.3

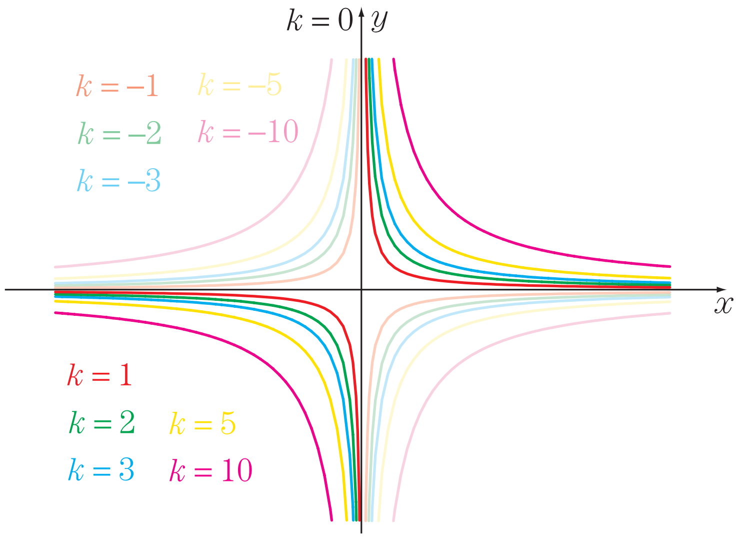
**Příklad 4.2.2.** Určete definiční obor a graf funkce $z = xy$.

**Řešení:** Definičním oborem je celá množina $\mathbb{R}^2$. Podívejme se nyní postupně na jednotlivé řezy.

1. Pro $k \in \mathbb{R}$, $z = k$,

$$k = xy \quad \Rightarrow \quad y = \frac{k}{x}.$$

Vrstevnicemi jsou pro $k \neq 0$ rovnoosé hyperboly a pro $k = 0$ je vrstevnice tvořená souřadnicovými osami, osou $x$ i osou $y$.




Obr. 4.2.4

2. Pro $k \in \mathbb{R}$, $x = k$,

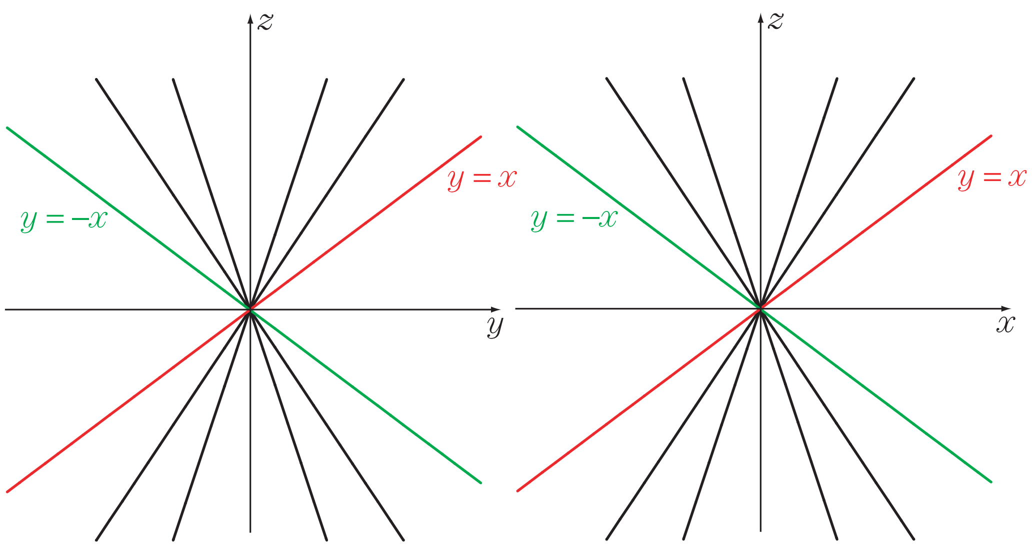
$$z = ky.$$

Řezy jsou přímky procházející počátkem.

3. Pro $k \in \mathbb{R}$, $y = k$,

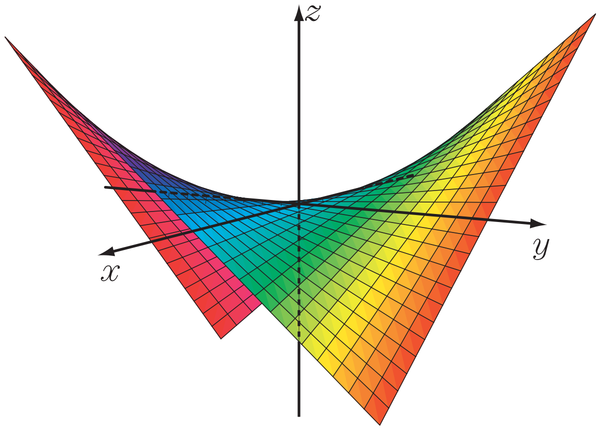
$$z = kx.$$

Řezy jsou přímky procházející počátkem.




Obr. 4.2.5

Jedná se o sedlovou plochu. Její grafické znázornění je poměrně obtížné, nicméně přesto nám řezy poskytnou základní informaci o grafu zadané funkce. Graf zadané funkce je na Obr. 4.2.6




Obr. 4.2.6

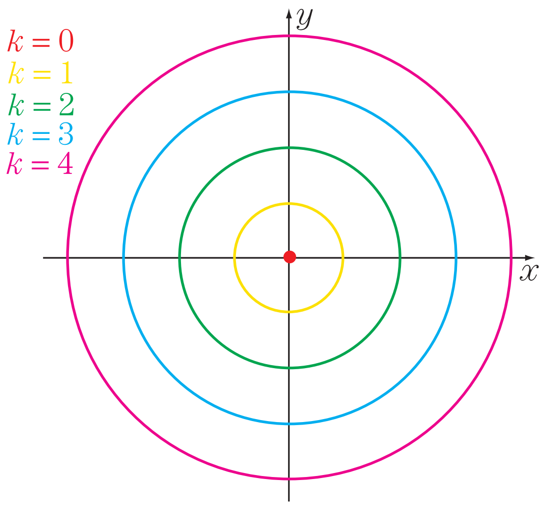
**Příklad 4.2.3.** Určete definiční obor a graf funkce $z = \sqrt{x^2 + y^2}$.

**Řešení:** Definičním oborem je celá množina $\mathbb{R}^2$. Součet v odmocnině bude nezáporný bez ohledu na to, co dosadíme za $x$ resp. $y$. Hledáme řezy.

1. Pro $k \geq 0$, $z = k$,

$$k = \sqrt{x^2 + y^2} \quad \Rightarrow \quad k^2 = x^2 + y^2.$$

Vrstevnicemi jsou kružnice se středem v počátku a poloměry $k$.




Obr. 4.2.7

2. Pro $k \in \mathbb{R}$, $x = k$,

$$z = \sqrt{k^2 + y^2} \;\Rightarrow\; z^2 = k^2 + y^2 \;\Rightarrow\; -y^2 + z^2 = k^2 \;\Rightarrow\; -\frac{y^2}{k^2} + \frac{z^2}{k^2} = 1.$$

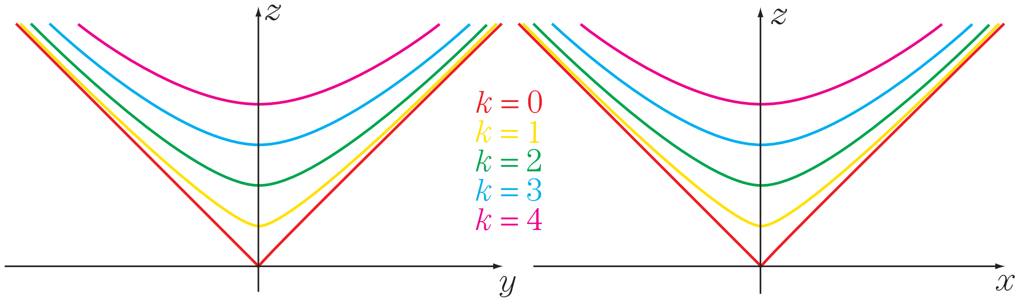
Pro pevně zvolené $k$ je řezem jedno rameno rovnoosé hyperboly. Všimněme si, že pro $k$ připouštíme i hodnotu 0. Ovšem v poslední rovnici bychom pak dělili nulou, což je nepřípustné. Poslední implikace pro $k = 0$ neplatí. V tomto případě je řezem dvojice polopřímek procházejících počátkem $[0, 0]$, tedy

$$z = \sqrt{y^2} \quad\Rightarrow\quad |z| = y \quad\Rightarrow\quad z = \pm y.$$

3. Pro $k \in \mathbb{R}$, $y = k$,

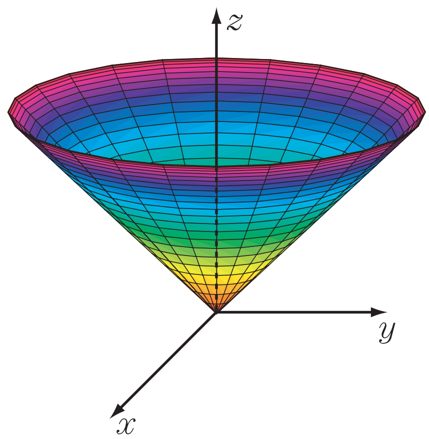
$$z = \sqrt{x^2 + k^2} \;\Rightarrow\; z^2 = x^2 + k^2 \;\Rightarrow\; -x^2 + z^2 = k^2 \;\Rightarrow\; -\frac{x^2}{k^2} + \frac{z^2}{k^2} = 1.$$

Pro řezy platí totéž, co již bylo řečeno v bodě 2.




Obr. 4.2.8

Grafem funkce je jednodílná kuželová plocha.




Obr. 4.2.9

## Úlohy k samostatnému řešení

**1.** Určete definiční obor a nalezněte řez grafu funkce $z = x^2 + 2x + y^2 - 4y + 5$ rovinou $z = 1$.

**2.** Určete definiční obor a nalezněte řezy grafu funkce $z = x^3 - \sqrt{y}$ souřadnicovými rovinami.

**3.** Určete definiční obor a nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = x^2 + y^2 - 4$.

**4.** Určete definiční obor a nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = 2x + 3y - 4$.

**5.** Určete definiční obor a nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = \sqrt{xy}$.

**6.** Určete definiční obor a nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = \dfrac{2x^2}{y^2}$.

**7.** Určete definiční obor a nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = \sqrt{9 - x^2 - 9y^2}$.

**8.** Určete definiční obor a nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = \ln y^2 - \ln x$.

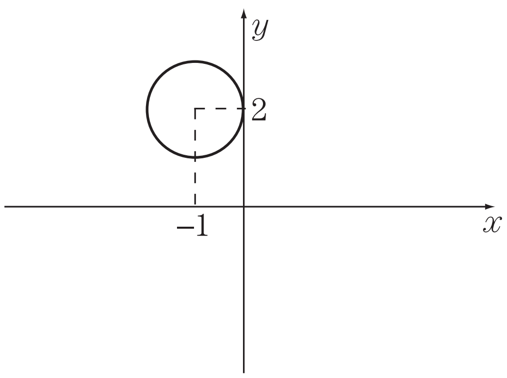
**9.** Určete definiční obor a nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = \dfrac{5x}{x^2 + y^2 + 1}$.

**10.** Určete definiční obor a nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = \dfrac{2y}{x^2} + 1$.

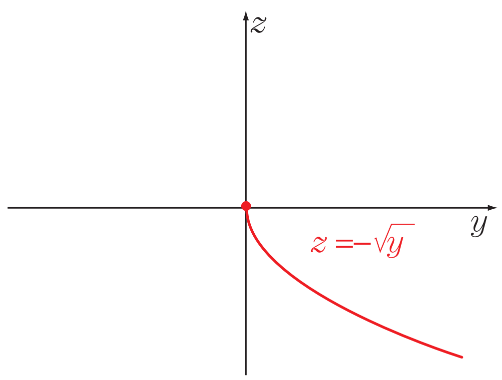
## Výsledky úlohy k samostatnému řešení

**1.** $\mathrm{D}_z = \mathbb{R}^2$, Obr. 4.2.10.

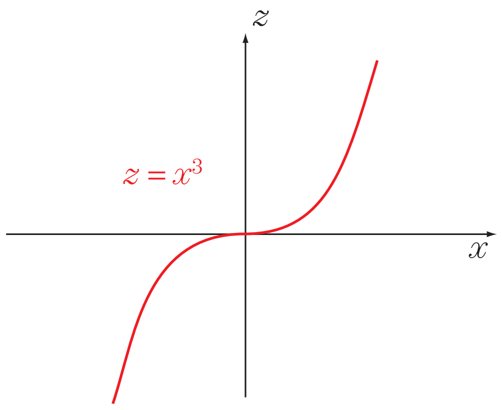
**2.** $D_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq 0\}$, Obr. 4.2.11, Obr. 4.2.12, Obr. 4.2.13.



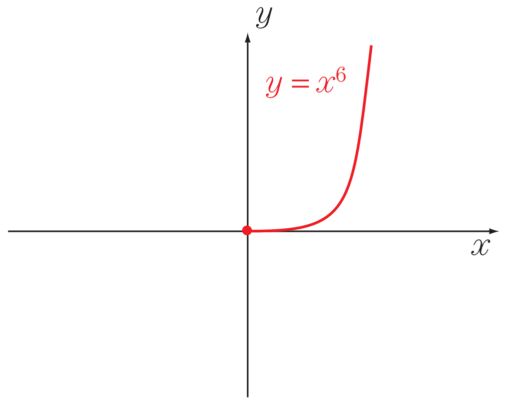

Obr. 4.2.10




Obr. 4.2.11



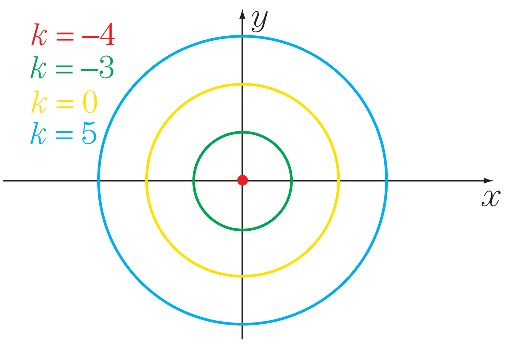

Obr. 4.2.12



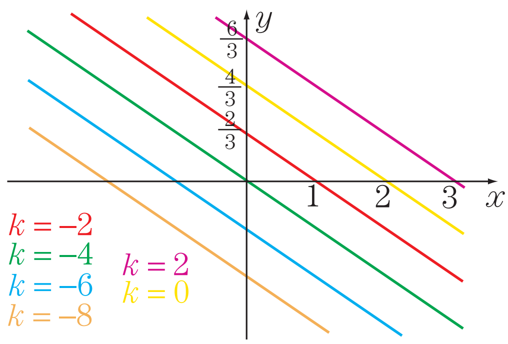

Obr. 4.2.13

**3.** $D_z = \mathbb{R}^2$, $k \geq -4$. Vrstevnice: $[0,0]$, $x^2 + y^2 = 4 + k$, Obr. 4.2.14.

**4.** $D_z = \mathbb{R}^2$, $k \in \mathbb{R}$. Vrstevnice: $y = -\frac{2}{3}x + \frac{4+k}{3}$, Obr. 4.2.15.



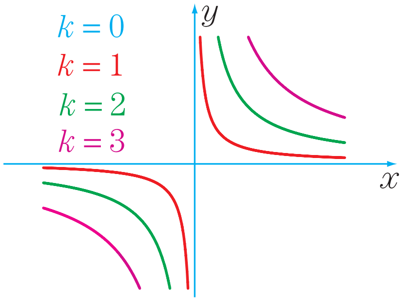

Obr. 4.2.14



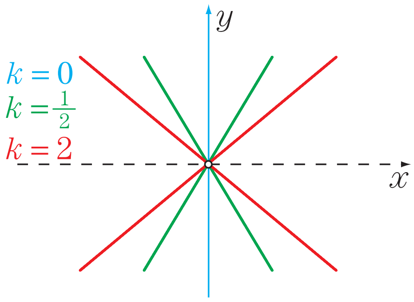

Obr. 4.2.15

**5.** $D_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy \geq 0\}$, $k \geq 0$. Vrstevnice: jedna z vrstevnic je tvořena oběma souřadnicovými osami ($y = 0$, $x = 0$) pro $k = 0$, ostatní vrstevnice mají rovnici $y = \frac{k^2}{x}$ pro $k > 0$, Obr. 4.2.16.

**6.** $D_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \neq 0\}$, $k \geq 0$. Vrstevnice: $x = 0$ pro $k = 0$, $y = \pm\sqrt{\frac{2}{k}}x$ pro $k > 0$. Ze všech vrstevnic vynecháváme bod $[0,0]$, protože neleží v definičním oboru zadané funkce, Obr. 4.2.17.



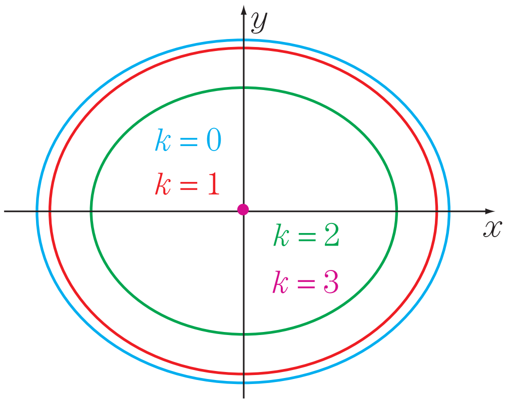

Obr. 4.2.16



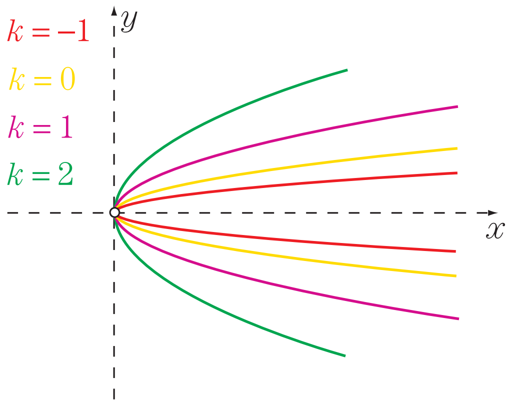

Obr. 4.2.17

**7.** $D_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + 9y^2 \leq 9\}$, $k \in \langle 0,3\rangle$. Vrstevnice: bod $[0,0]$ pro $k = 3$, elipsy $x^2 + 9y^2 = 9 - k^2$ pro $k \in \langle 0,3)$, Obr. 4.2.18.

**8.** $D_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0 \wedge y \neq 0\}$, $k \in \mathbb{R}$. Vrstevnice: paraboly $x = \mathrm{e}^{-k}y^2$, Obr. 4.2.19.



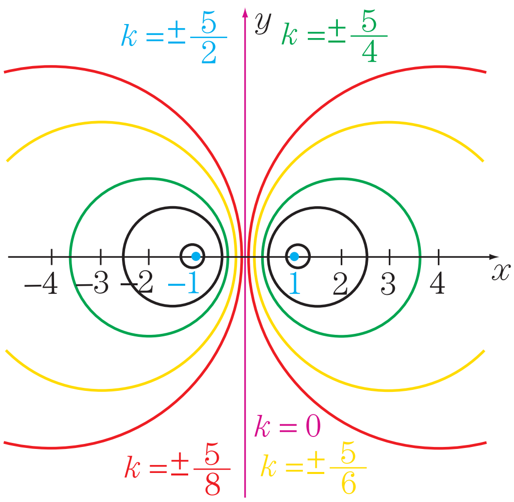

Obr. 4.2.18



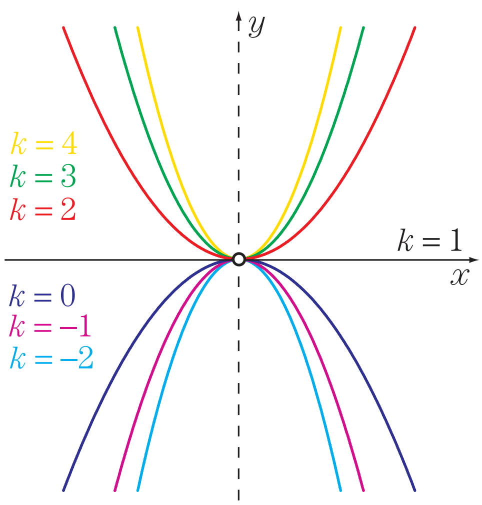

Obr. 4.2.19

**9.** $D_z = \mathbb{R}^2$, $k \in \langle -\frac{5}{2}, \frac{5}{2}\rangle$. Vrstevnice: $x = 0$ pro $k = 0$, kružnice $(x - \frac{5}{2k})^2 + y^2 = \frac{25}{4k^2} - 1$ pro $k \neq 0$, bod $[1,0]$ pro $k = \frac{5}{2}$, $[-1,0]$ pro $k = -\frac{5}{2}$, Obr. 4.2.20.

**10.** $D_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \neq 0\}$, $k \in \mathbb{R}$. Vrstevnice: $y = 0$ pro $k = 1$, paraboly $y = \frac{k-1}{2}x^2$ pro $k \neq 1$. Poznamenejme, že ze všech vrstevnic vynecháváme bod $[0,0]$, protože neleží v definičním oboru zadané funkce, Obr. 4.2.21.




Obr. 4.2.20

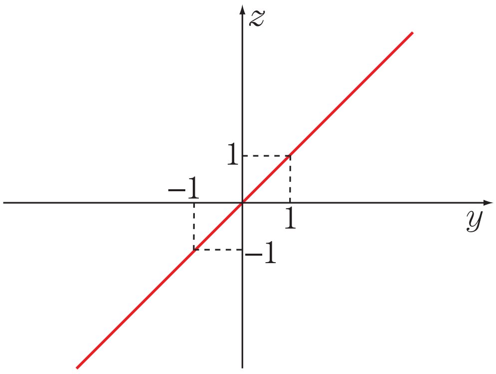



Obr. 4.2.21

## Kontrolní test

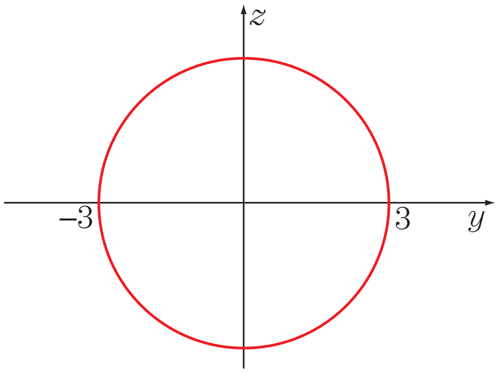
**1.** Nalezněte řez grafu funkce $z = \sqrt{x^2 + y^2 - 9}$ rovinou $x = 3$.

a)



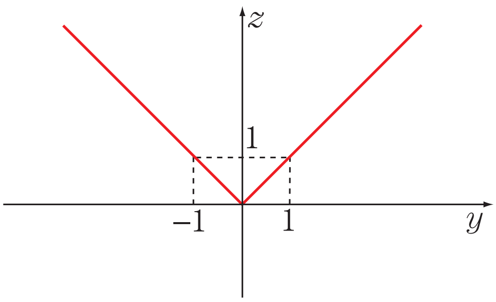

Obr. 4.2.22

b)



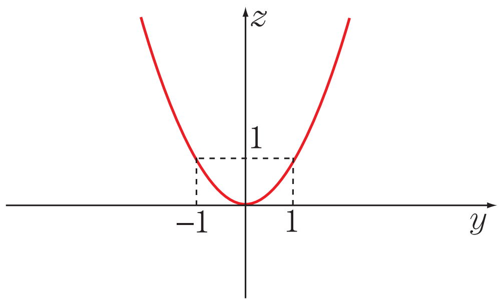

Obr. 4.2.23

c)




Obr. 4.2.24

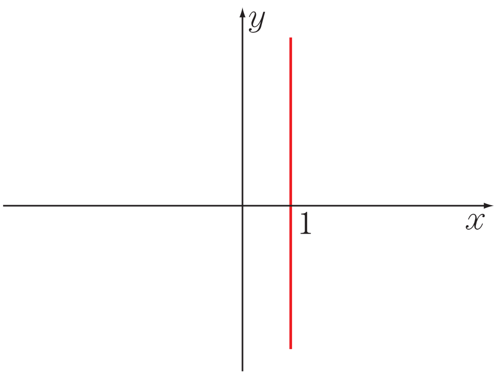
d)




Obr. 4.2.25

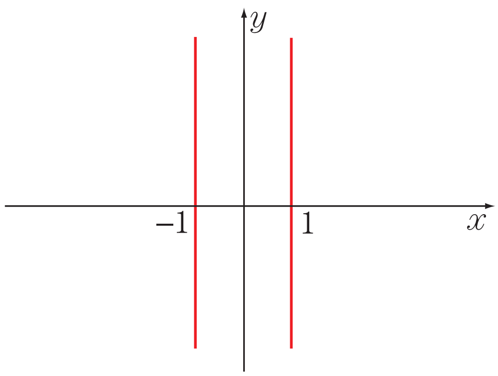
**2.** Nalezněte řez grafu funkce dvou proměnných $z = |x| - 1$ rovinou $z = 0$.

a)



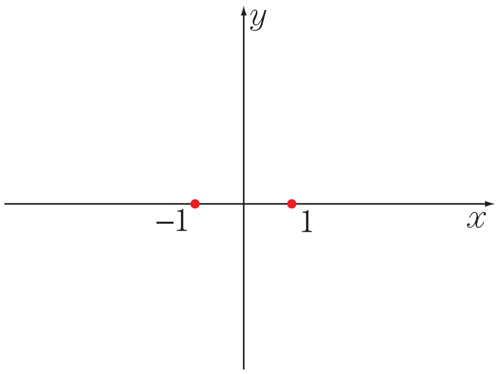

Obr. 4.2.26

b)



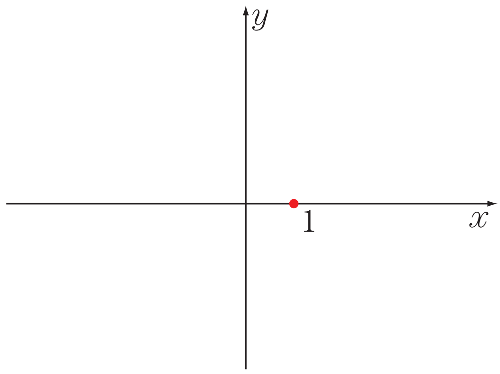

Obr. 4.2.27

c)




Obr. 4.2.28

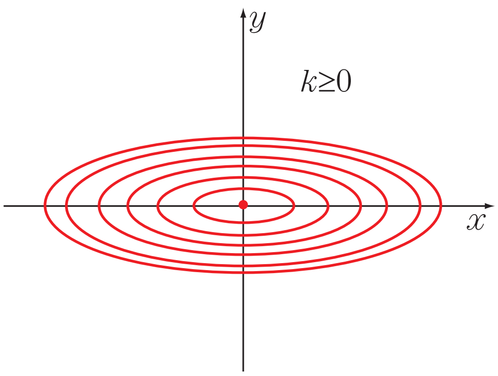
d)




Obr. 4.2.29

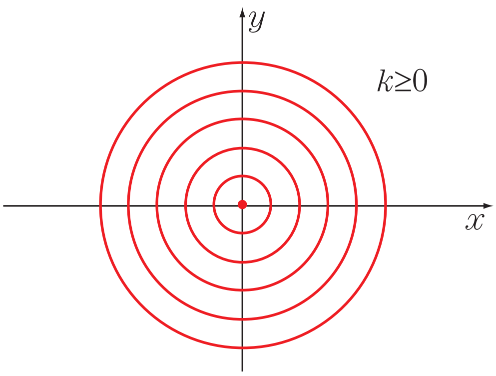
**3.** Nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = x^2 + 4y^2$.

a)



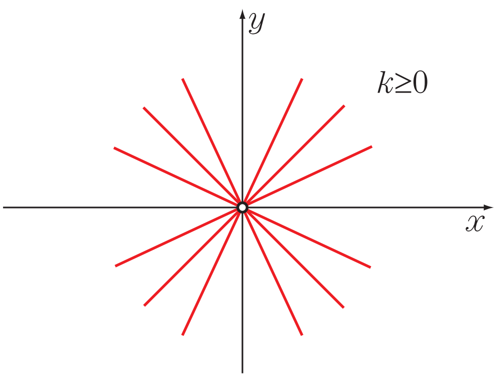

Obr. 4.2.30

b)



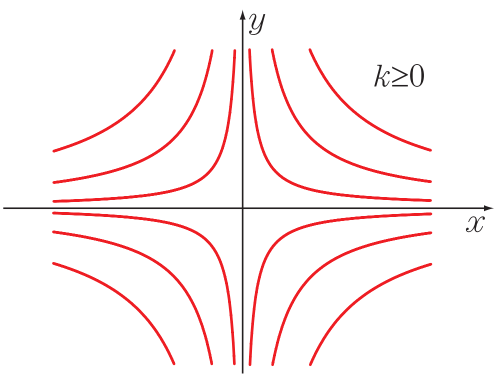

Obr. 4.2.31

c)




Obr. 4.2.32

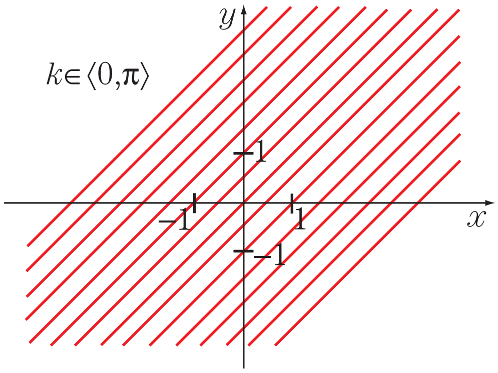
d)




Obr. 4.2.33

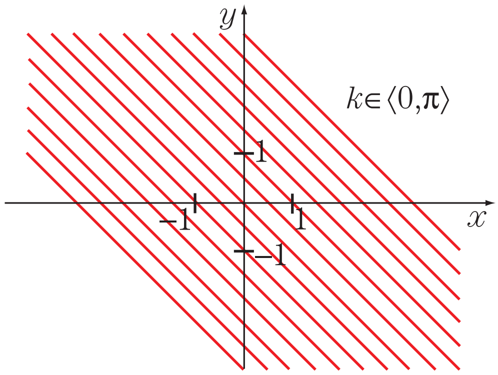
**4.** Nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = \arccos(x - y)$.

a)



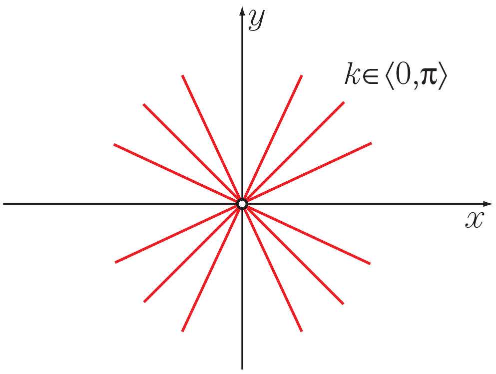

Obr. 4.2.34

b)



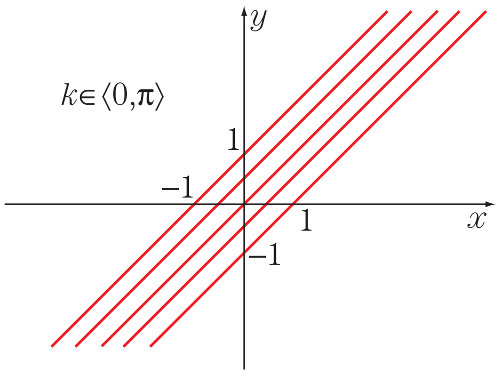

Obr. 4.2.35

c)




Obr. 4.2.36

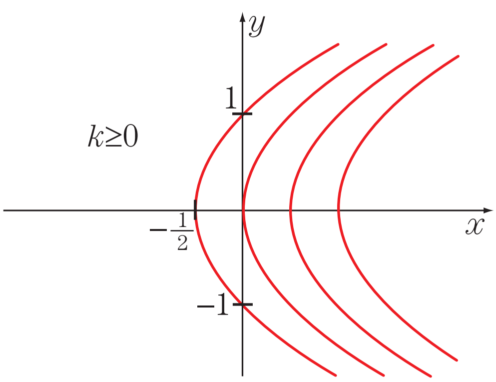
d)




Obr. 4.2.37

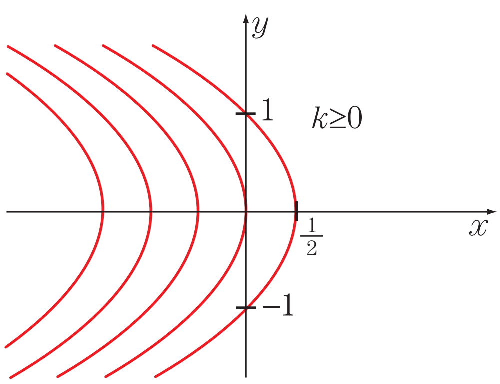
**5.** Nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = \sqrt{2x - y^2 + 1}$.

a)



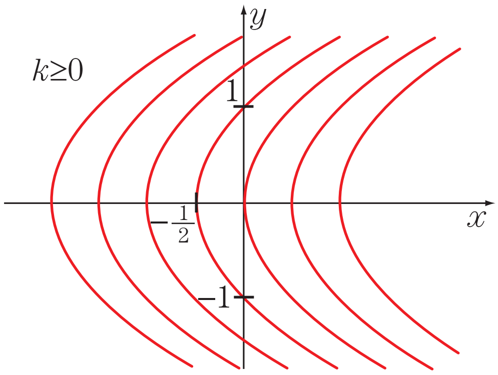

Obr. 4.2.38

b)



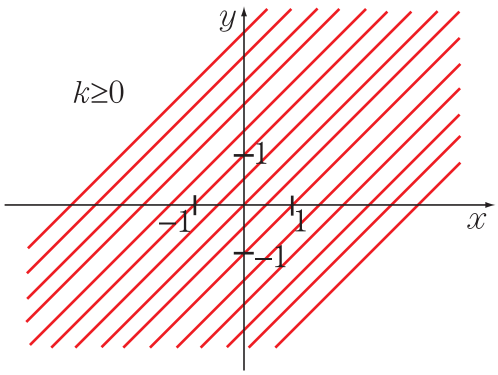

Obr. 4.2.39

c)




Obr. 4.2.40

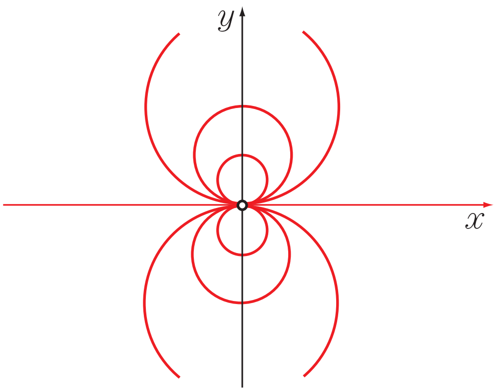
d)




Obr. 4.2.41

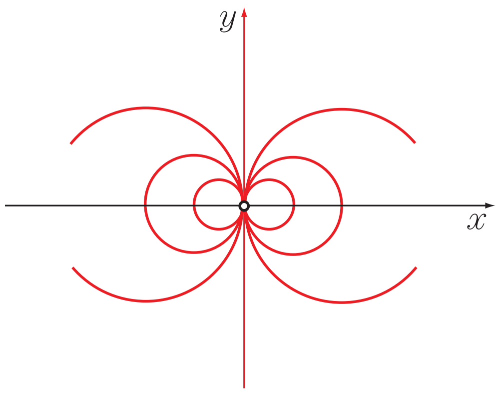
**6.** Nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = \dfrac{2y}{x^2 + y^2}$.

a)



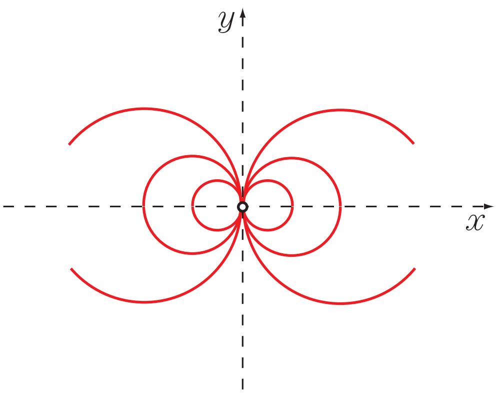

Obr. 4.2.42

b)



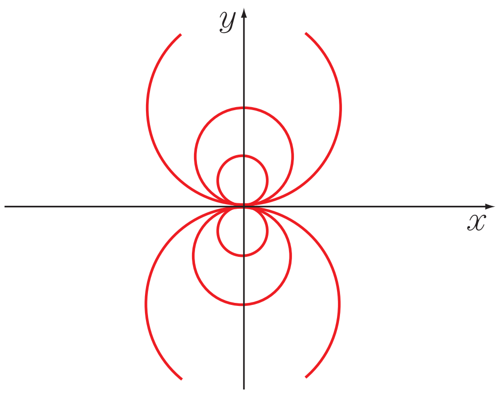

Obr. 4.2.43

c)



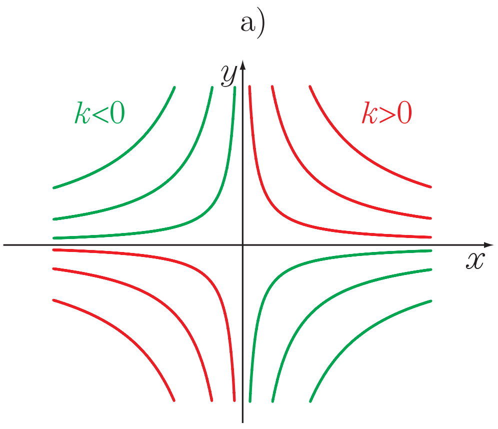

Obr. 4.2.44

d)

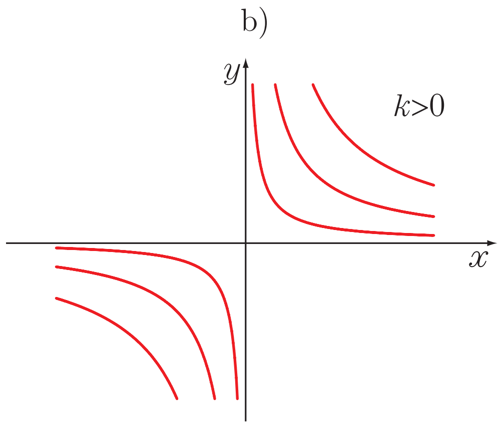



Obr. 4.2.45

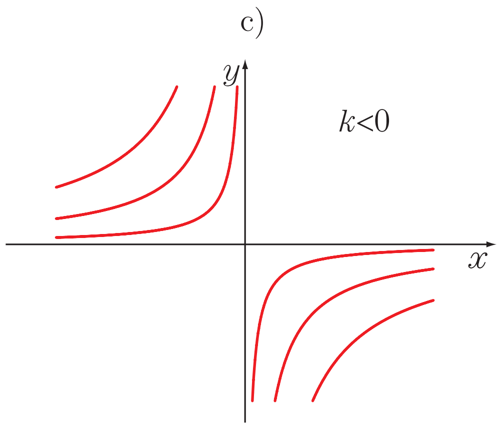
**7.** Nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = x^2 y^2$.



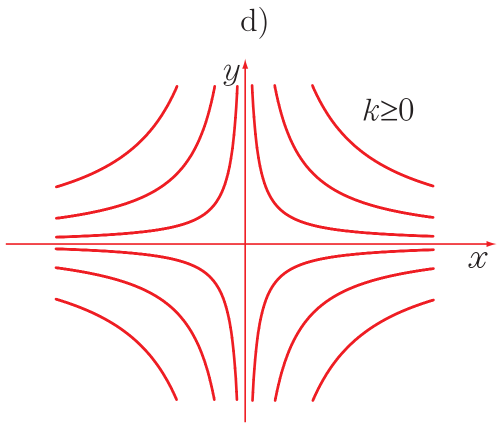

Obr. 4.2.46




Obr. 4.2.47

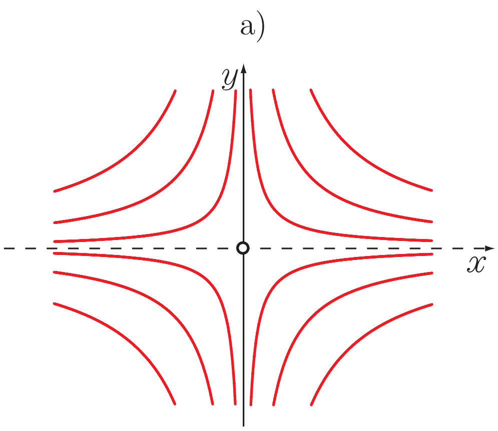



Obr. 4.2.48

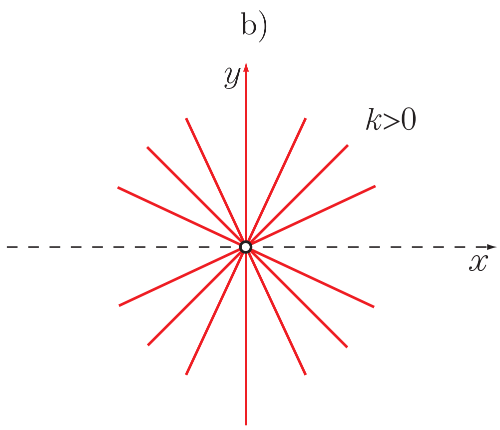



Obr. 4.2.49

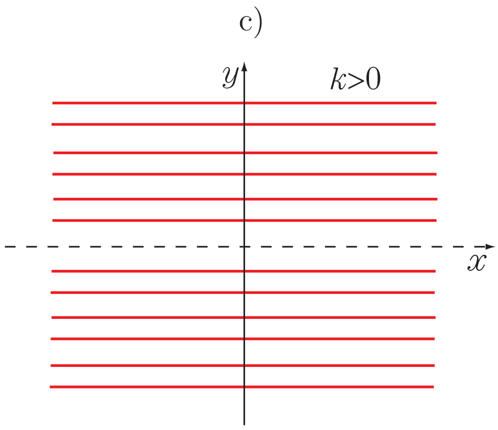
**8.** Nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = e^{\frac{x}{y}}$.



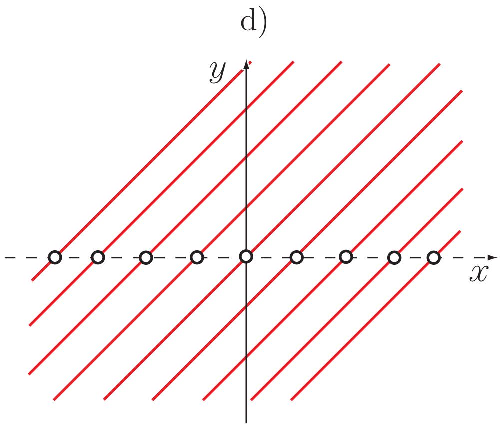

Obr. 4.2.50




Obr. 4.2.51

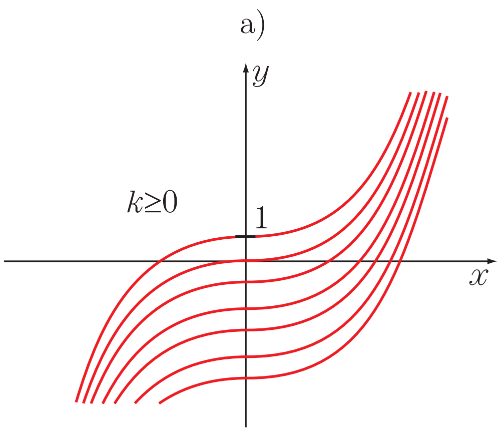



Obr. 4.2.52

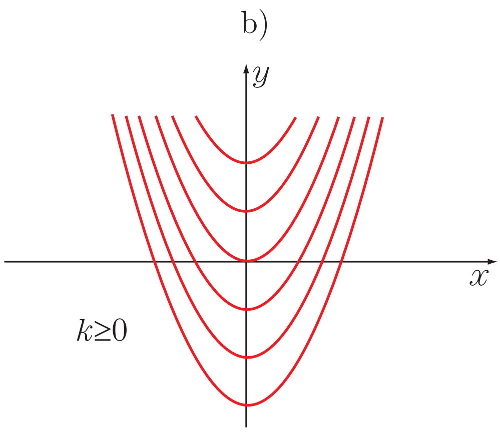



Obr. 4.2.53

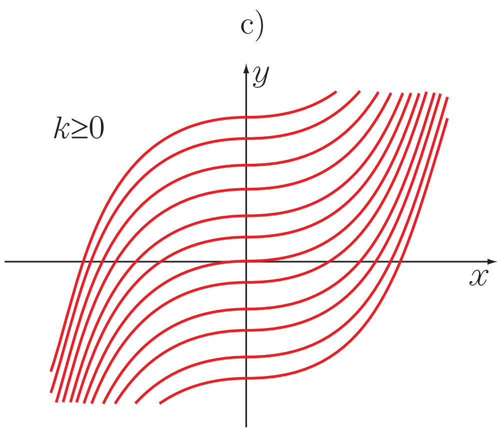
**9.** Nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = (x^3 - y + 1)^2$.



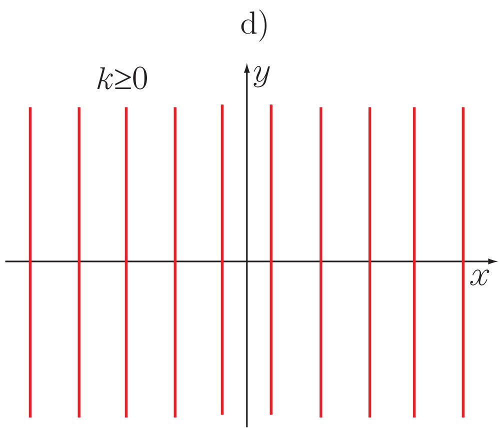

Obr. 4.2.54




Obr. 4.2.55



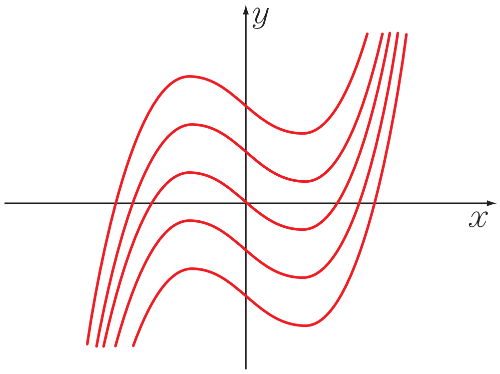

Obr. 4.2.56




Obr. 4.2.57

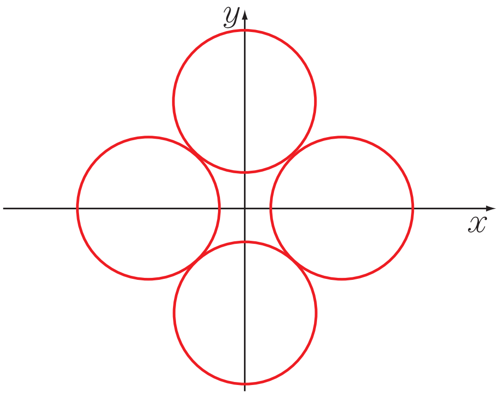
**10.** Nalezněte vrstevnicový graf funkce $z = \dfrac{x^3 - x}{y}$.

a)



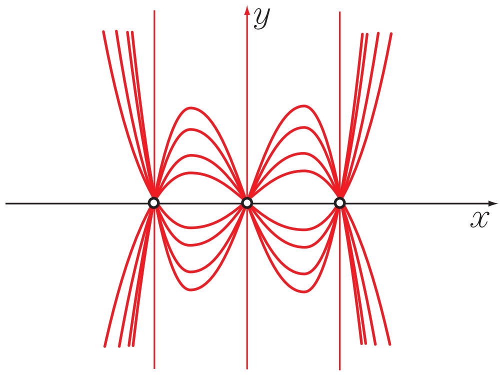

Obr. 4.2.58

b)



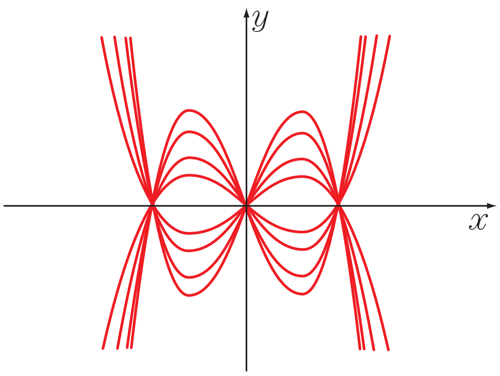

Obr. 4.2.59

c)




Obr. 4.2.60

d)




Obr. 4.2.61

## Výsledky testu

**1.** c), **2.** b), **3.** a), **4.** d), **5.** a), **6.** a), **7.** d), **8.** b), **9.** c), **10.** c).