Funkce více proměnných

Funkce více proměnných se v matematice začaly používat v rámci rozvoje analytické geometrie v prostoru s počátkem 18. stol.

I vy sami jste se již určitě s funkcemi více proměnných setkali. Již na střední škole se řeší úloha, jak vypočítat objem a povrch základních geometrických těles, např. krychle, koule, kvádru, atd. Položme si jednoduchou otázku. Jak se vypočítá objem kvádru? Odpověď na tuto otázku je dobře známá. Pro objem kvádru o hranách $a > 0$, $b > 0$, $c > 0$ platí vztah

$$V = a \cdot b \cdot c.$$

Zároveň jsme si uvedli první příklad funkce více proměnných, konkrétně v tomto případě funkce tří proměnných. Skutečně, na V můžeme nahlížet jako na funkci tří proměnných a, b a c. Za a, b a c dosazujeme konkrétní kladná reálná čísla, která mezi sebou násobíme. Výsledkem je opět číslo kladné reálné, které má význam objemu příslušného kvádru. Pro zápis této skutečnosti budeme používat analogické schéma jako pro funkci jedné proměnné ($f : \mathbb{R} \supseteq A \to \mathbb{R}$, $A \ni x \mapsto f(x) = y \in \mathbb{R}$), tj.

$$V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R},$$

resp.

$$V : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \ni [a, b, c] \mapsto V(a, b, c) = a \cdot b \cdot c \in \mathbb{R}.$$

Každé trojici kladných reálných čísel se přiřadí jejich součin, což je opět kladné reálné číslo. Dalších podobných funkcí by se dala najít celá řada. Zkuste sami vymyslet nějaký další příklad funkce více proměnných.

4. Funkce více proměnných, definice, vlastnosti

Průvodce studiem

V rámci této kapitoly se seznámíme s funkcemi více proměnných, především se bude jednat o funkce dvou proměnných, které budeme chápat jako přirozené zobecnění pojmu funkce jedné proměnné. Ukážeme si, že ačkoliv se některé pojmy pro funkce více proměnných definují analogicky jako v případě funkcí jedné proměnné, tak jejich aplikace na konkrétní příklady je poměrně obtížná. Toto se týká především limit a spojitosti funkce více proměnných.

Cíle

Funkce více proměnných, funkce dvou proměnných, funkce tří proměnných, definiční obor, graf, vrstevnice, limita, spojitost.

Předpokládané znalosti

Funkce jedné proměnné, její definiční obor, funkční předpis, graf. Limita a spojitost funkce jedné proměnné, kuželosečky, soustavy rovnic.

4.1. Definice funkce více proměnných

Výklad

Definice 4.1.1.

Nechť $M \subseteq \mathbb{R}^n$, $M \neq \emptyset$. **Funkcí více proměnných** budeme rozumět každé zobrazení $f : M \to \mathbb{R}$. Množinu M nazýváme definičním oborem funkce f a značíme D_f.

Množina $\mathbb{R}^n$ je tvořená uspořádanými n-ticemi reálných čísel. Jedná se o zkrácený zápis kartézského součinu n množin reálných čísel, tj. $\mathbb{R}^n = \underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}}_{n}$.

Poznámka

Připomeňme, že ***kartézským součinem*** *množin A a B rozumíme množinu*

$$A \times B = \{[a,b] \,|\, a \in A \wedge b \in B\}.$$

Např. je-li $A = \{1,2,3\}$, $B = \{m,n\}$, pak

$$A \times B = \{[1,m],[1,n],[2,m][2,n],[3,m],[3,n]\}.$$

Prvky množiny $\mathbb{R}^n$, uspořádané n-tice, značíme $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$, $x_i \in \mathbb{R}^n$, $1 \le i \le n$. Funkce více proměnných je tedy zobrazení, které každému bodu $X = [x_1, x_2, \ldots, x_n] \in \mathrm{D}_f$ přiřadí jediné reálné číslo $y \in \mathbb{R}$. Používáme zápis $y = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ nebo zkráceně $y = f(X)$. Číslu y říkáme **funkční hodnota** v bodě X.

Poznámka

1. *V souladu s terminologií, kterou používáme u funkce jedné proměnné, $x_1, x_2 \ldots, x_n$ budeme nazývat* ***nezávislé proměnné****,* ***argumenty*** *funkce f, y bude* ***závislá proměnná****.*

2. *Pro funkci dvou proměnných volíme místo $y = f(x_1, x_2)$ označení*

$$z = f(x,y).$$

3. *Pro funkci tří proměnných volíme místo $y = f(x_1, x_2, x_3)$ označení*

$$u = f(x,y,z).$$

4. *Není-li zadán definiční obor, pak se jím rozumí maximální „přípustná“ podmnožina v $\mathbb{R}^n$, tj. množina bodů, ve kterých má daná funkce smysl, ve kterých existuje funkční hodnotu.*

5. *Kromě označení D_f pro definiční obor funkce se také používá $\mathrm{D}(f)$, $\mathrm{Dom}\, f$.*

Řešené úlohy

Příklad 4.1.1. Určete a graficky znázorněte definiční obor funkce

$$z = \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{4-x^2-y^2}}.$$

Řešení: Sestavíme jednotlivé omezující podmínky, které nám vymezí hledanou podmnožinu v $\mathbb{R}^2$.

1. Logaritmus je schopen působit pouze na kladná reálná čísla, tedy

$$x+1>0 \quad \Rightarrow \quad x>-1.$$

2. Neumíme dělit nulou. Proto ve zlomku musí být jmenovatel různý od nuly, což nám dává podmínku

$$\sqrt{4-x^2-y^2} \neq 0 \quad \Rightarrow \quad 4-x^2-y^2 \neq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2 \neq 4.$$

3. Odmocnina je schopna působit pouze na reálná čísla nezáporná,

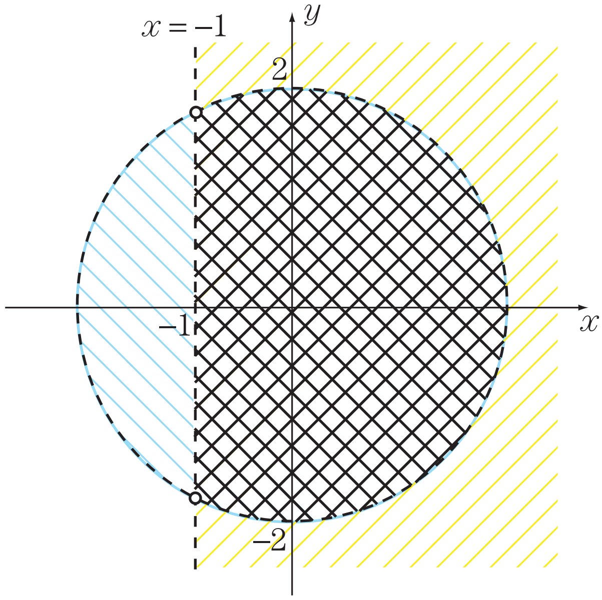
$$4-x^2-y^2 \geq 0 \quad \Rightarrow \quad x^2+y^2 \leq 4.$$

Všechny tři podmínky musí platit současně, každá z nich vymezuje podmnožinu v $\mathbb{R}^2$. Definičním oborem bude průnik jednotlivých podmnožin, Obr. 4.1.1.

Podmínka 1. určuje množinu uspořádaných dvojic reálných čísel $[x,y] \in \mathbb{R}^2$, pro které platí $x>-1$. Jedná se o polorovinu s hraniční přímkou $x=-1$, ta ale do této množiny nepatří. Proto ji v grafickém vyjádření vyznačíme čárkovaně.

Podmínka 2. určuje množinu bodů $[x,y] \in \mathbb{R}^2$, pro které platí $x^2+y^2 \neq 4$. Jedná se o všechny body roviny, které neleží na kružnici se středem v počátku a s poloměrem 2. Tuto skutečnost vyznačíme tak, že do grafického vyjádření nakreslíme čárkovaně kružnici se středem v počátku a poloměrem 2. Bude to znamenat, že body, které leží na této kružnici, do definičního oboru nepatří.

Podmínka 3. určuje množinu bodů $[x,y] \in \mathbb{R}^2$, pro které platí $x^2+y^2 \leq 4$. Jedná se o kruh se středem v počátku a poloměrem 2.



Obr. 4.1.1

Příklad 4.1.2. Určete a graficky znázorněte definiční obor funkce

$$z = \sqrt{y \sin x}.$$

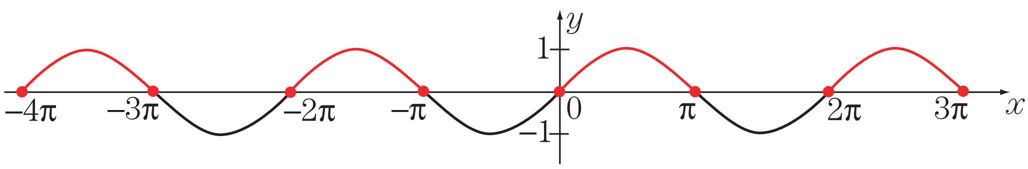
Řešení: Zformulujeme omezující podmínku na definiční obor, $y \sin x \geq 0$. Tato nerovnice je splněna, když oba činitelé jsou buď současně nezáporní, nebo současně nekladní,

$$y \sin x \geq 0 \quad \Rightarrow \quad (y \geq 0 \wedge \sin x \geq 0) \vee (y \leq 0 \wedge \sin x \leq 0).$$

Zbývá diskutovat podmínku $\sin x \geq 0$ resp. $\sin x \leq 0$. Řešením první nerovnice je sjednocení intervalů

$$x \in \bigcup_{k \in \mathbb{Z}} \langle 0 + k2\pi, \pi + k2\pi \rangle, \text{ kde } \mathbb{Z} \text{ je množina celých čísel.}$$

Pro hodnoty x z těchto intervalů je funkce $\sin x$ nezáporná, červená část sinusoidy, Obr. 4.1.2.

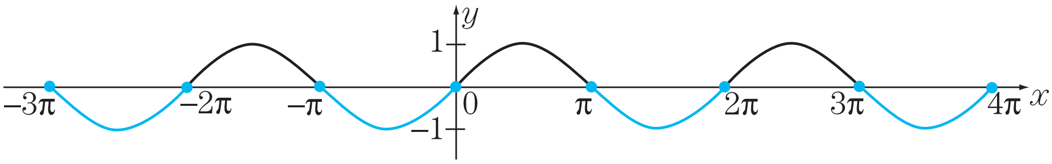


Obr. 4.1.2

Řešením druhé nerovnice je sjednocení intervalů

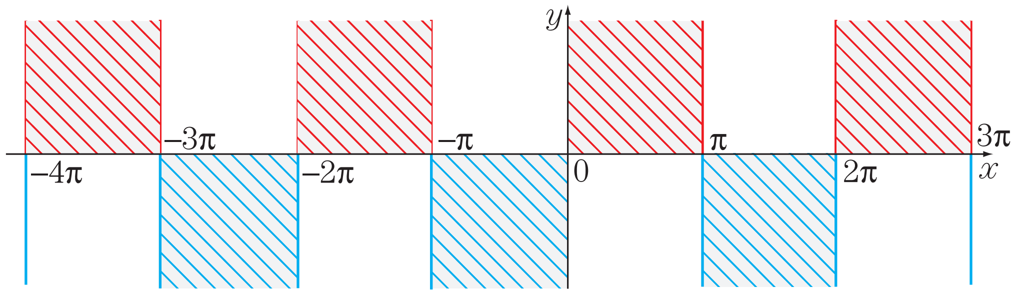
$$x \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}} \langle -\pi + k2\pi, 0 + k2\pi \rangle.$$

Pro hodnoty x z těchto intervalů je funkce $\sin x$ nekladná, modrá část sinusoidy, Obr. 4.1.3.



Obr. 4.1.3

Grafické vyjádření definičního oboru zadané funkce je na Obr. 4.1.4.



Obr. 4.1.4

Vezmeme-li např. $x \in (0, \pi)$, hodnota funkce $\sin x \geq 0$ a současně musí být $y \geq 0$.

Příklad 4.1.3. Určete a graficky znázorněte definiční obor funkce

$$z = \arcsin(x + y).$$

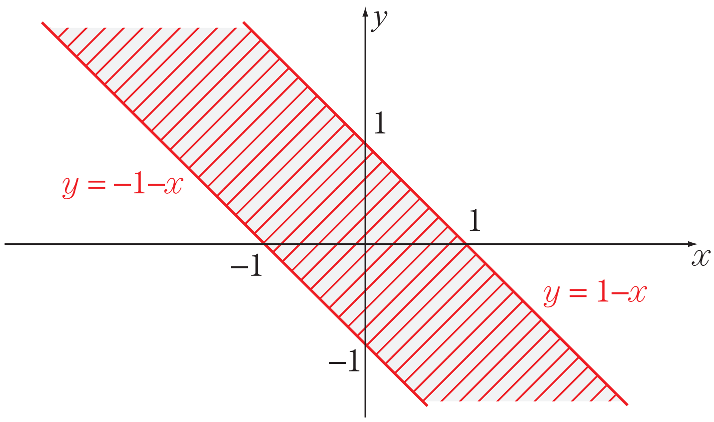
Řešení: Funkce arkus sinus je schopna působit pouze na reálná čísla z intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Musíme zařídit, že argument funkce arkus sinus bude nabývat jen hodnot z intervalu $\langle -1, 1\rangle$. Dostáváme omezující podmínku na definiční obor ve tvaru $-1 \leq x + y \leq 1$. Jedná se o systém dvou nerovnic,

$$-1 \leq x + y \quad \wedge \quad x + y \leq 1.$$

Řešením pak bude

$$-1 - x \leq y \quad \wedge \quad y \leq 1 - x.$$

Definičním oborem je průnik dvou poloprostorů s hraničními přímkami $y = -1 - x$ a $y = 1 - x$. Nejdříve zakreslíme hraniční přímky a pak vyznačíme vlastní průnik poloprostorů, viz. Obr. 4.1.5.



Obr. 4.1.5

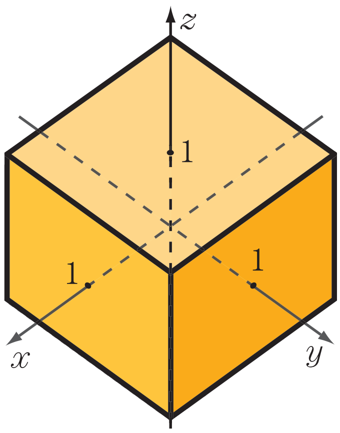
Příklad 4.1.4. Určete a graficky znázorněte definiční obor funkce tří proměnných

$$u = \arcsin x + \arcsin y + \arcsin z.$$

Řešení: Funkce arkus sinus je schopna působit jen na čísla z intervalu $\langle -1, 1\rangle$,

$$-1 \leq x \leq 1 \ \wedge \ -1 \leq y \leq 1 \ \wedge \ -1 \leq z \leq 1.$$

Definiční obor: $\mathrm{D}_u = \{[x, y, z] \in \mathbb{R}^3 \,|\, |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1 \wedge |z| \leq 1\}$, jedná se o krychli se středem v počátku a délkou hrany 2.



Obr. 4.1.6

Úlohy k samostatnému řešení

1. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \dfrac{x+y-5}{x-y+8}$.

2. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \sqrt{16 - x^2 - 4y^2}$.

3. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \sqrt{y^2 - 1}$.

4. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \ln x + \ln y - ln(1 - x - y)$.

5. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \ln(y(x + 2))$.

6. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \dfrac{1}{\arcsin x \cdot \arccos y}$.

7. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = (1 - x^2 - y^2)^{-\frac{1}{2}} \arccos 2x$.

8. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \arccos(x - y^2 + 1)$.

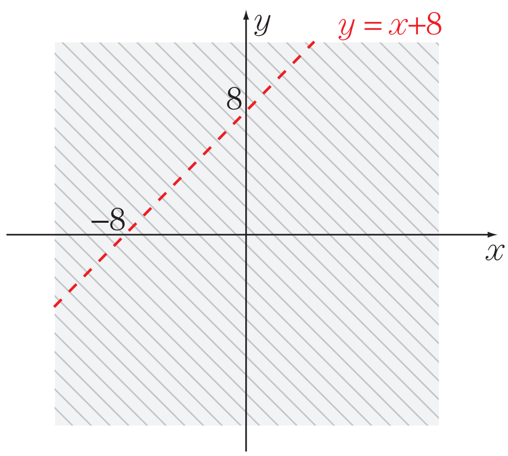
9. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \sqrt{\cos(2x - y)}$.

10. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \operatorname{tg}(\arcsin(x + y))$.

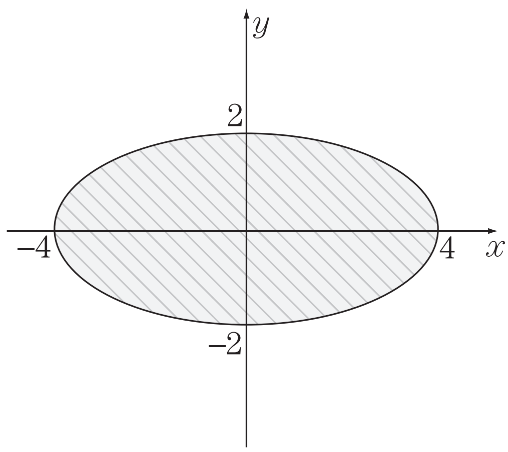
Výsledky úlohy k samostatnému řešení

1. Omezující podmínka: $x - y + 8 \neq 0$. Definiční obor: $\mathrm{D}_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \neq x + 8\}$, Obr. 4.1.7.

2. Omezující podmínka: $16 - x^2 - 4y^2 \geq 0$. Definiční obor: $\mathrm{D}_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + 4y^2 \leq 16\}$, Obr. 4.1.8.



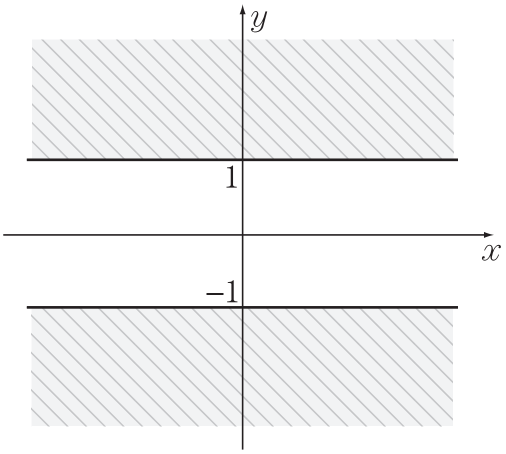
Obr. 4.1.7



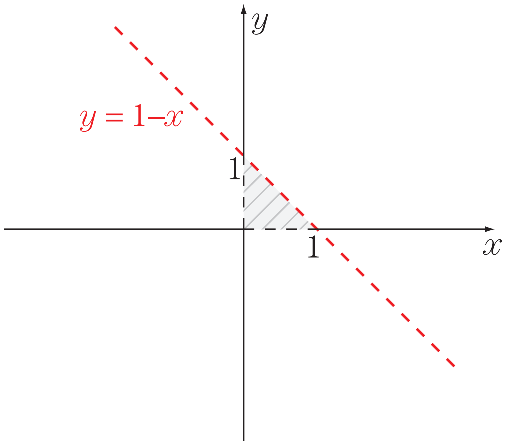
Obr. 4.1.8

3. Omezující podmínka: $y^2-1 \geq 0$. Definiční obor: $\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, y^2 \geq 1\}$, Obr. 4.1.9

4. Omezující podmínky: $x > 0 \wedge y > 0 \wedge 1-x-y > 0$. Definiční obor: $\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0 \wedge y > 0 \wedge y < 1-x\}$, Obr. 4.1.10.



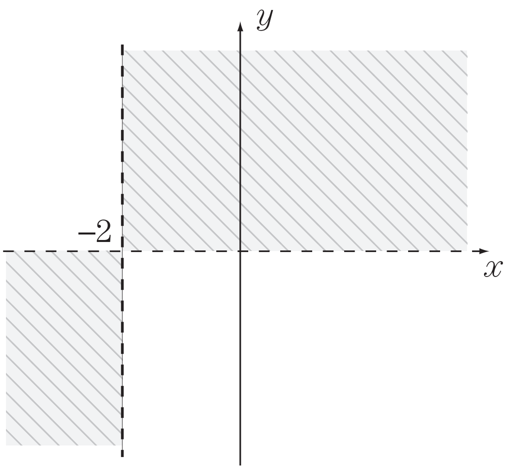
Obr. 4.1.9



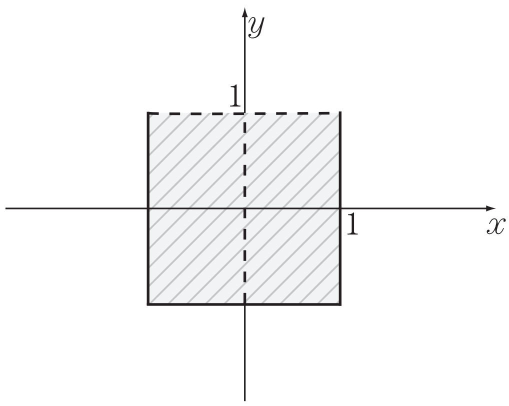
Obr. 4.1.10

5. Omezující podmínky: $y(x+2) > 0$. Definiční obor: $\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, (y > 0 \wedge x+2 > 0) \vee (y < 0 \wedge x+2 < 0)\}$, Obr. 4.1.11.

6. Omezující podmínky: $\arcsin x \neq 0 \wedge -1 \leq x \leq 1 \wedge \arccos y \neq 0 \wedge -1 \leq y \leq 1$. Definiční obor: $\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x \neq 0 \wedge -1 \leq x \leq 1 \wedge -1 \leq y < 1\}$, Obr. 4.1.12.



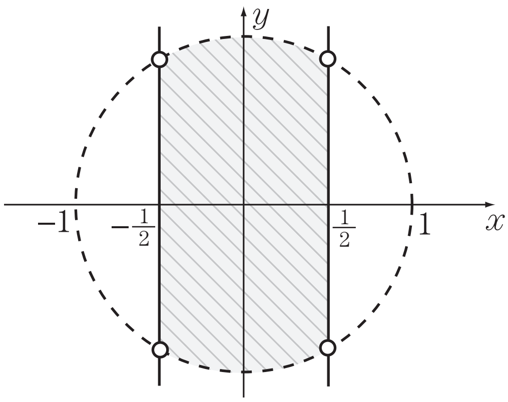
Obr. 4.1.11



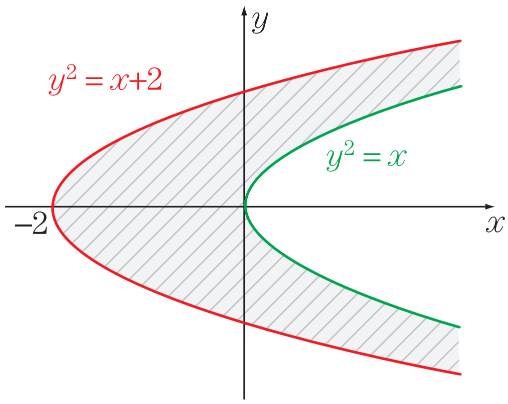
Obr. 4.1.12

7. Omezující podmínky: $1-x^2-y^2 \geq 0 \wedge \sqrt{1-x^2-y^2} \neq 0 \wedge -1 \leq 2x \leq 1$. Definiční obor: $\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 < 1 \wedge -\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{1}{2}\}$, Obr. 4.1.13.

8. Omezující podmínka: $-1 \leq x - y^2 + 1 \leq 1$. Definiční obor: $\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, y^2 \leq x+2 \wedge x \leq y^2\}$, Obr. 4.1.14.



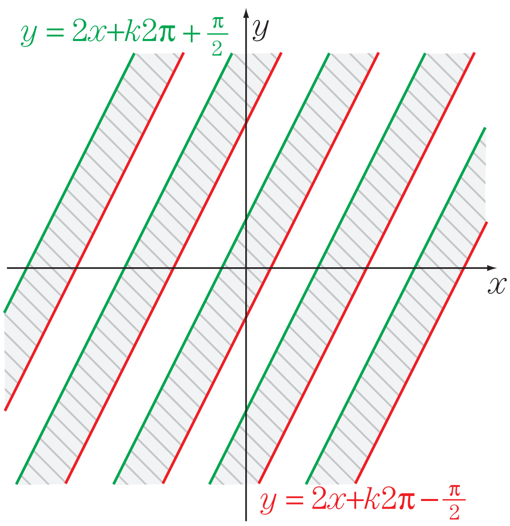
Obr. 4.1.13



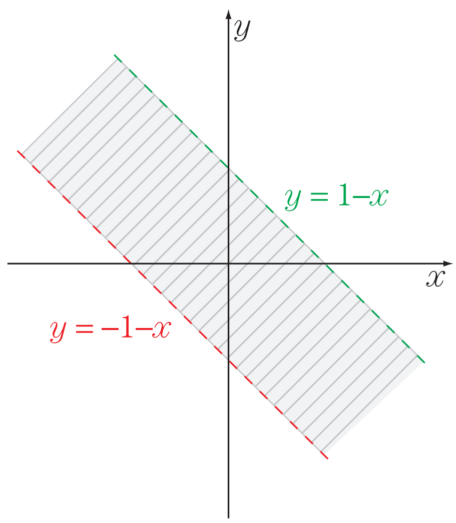
Obr. 4.1.14

9. Omezující podmínka: $\cos(2x-y) \geq 0$. Definiční obor: $\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, 2x-y \in \cup_{k\in\mathbb{Z}} \langle -\frac{\pi}{2}+2k\pi, \frac{\pi}{2}+2k\pi \rangle\}$, Obr. 4.1.15.

10. Omezující podmínky: $\arcsin(x+y) \neq \frac{\pi}{2}+k\pi \wedge -1 \leq x+y \leq 1$, $k \in \mathbb{Z}$. Definiční obor: $\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, -1 < x+y < 1\}$, Obr. 4.1.16.



Obr. 4.1.15

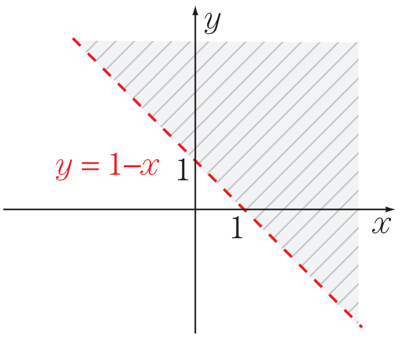


Obr. 4.1.16

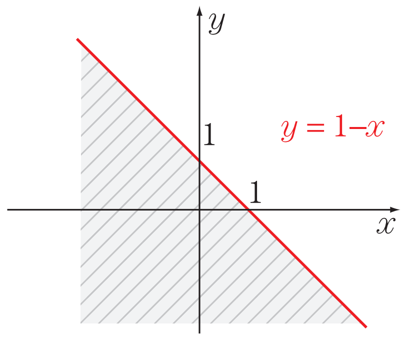
Kontrolní test

1. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \sqrt{\ln(x+y)}$.

a)$\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, y > 1 - x\}$ b)$\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \leq 1 - x\}$

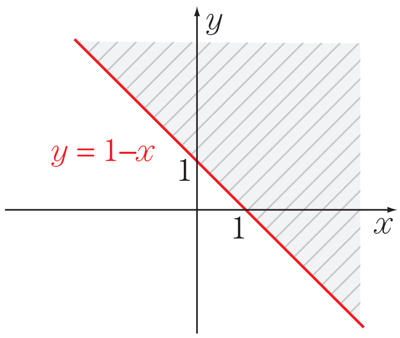


Obr. 4.1.17

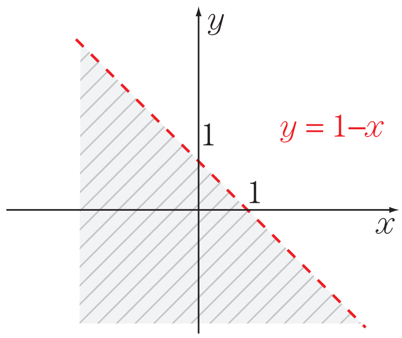


Obr. 4.1.18

c)$\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq 1 - x\}$ d)$\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, y < 1 - x\}$



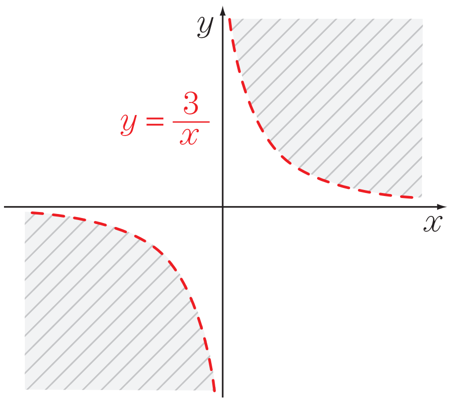
Obr. 4.1.19



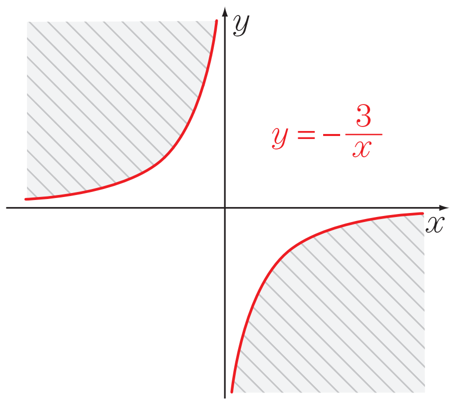
Obr. 4.1.20

2. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \ln(xy - 3)$.

a)$\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy > 3\}$ b)$\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy \leq -3\}$

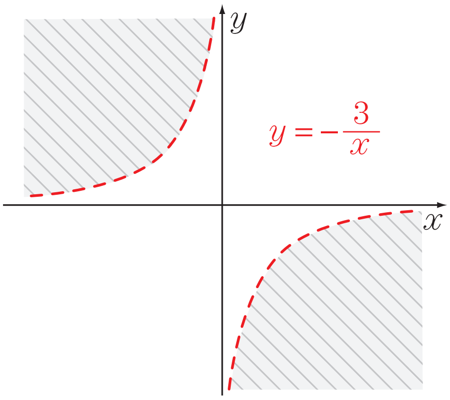


Obr. 4.1.21

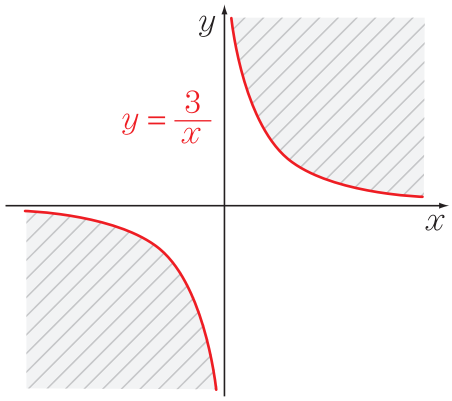


Obr. 4.1.22

c) $D_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy < -3\}$ d) $D_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, xy \geq 3\}$



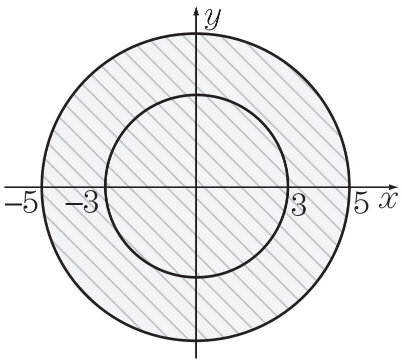
Obr. 4.1.23



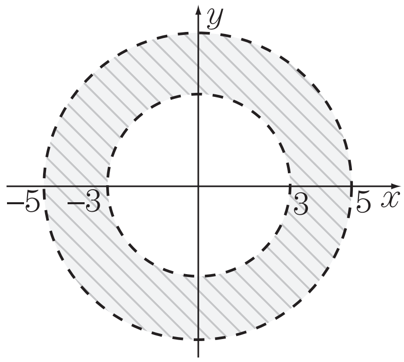
Obr. 4.1.24

3. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \arcsin \dfrac{x^2 + y^2 - 17}{8}$.

a) $D_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 = 9 \vee x^2 + y^2 \leq 25\}$ b) $D_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 > 9 \wedge x^2 + y^2 < 25\}$

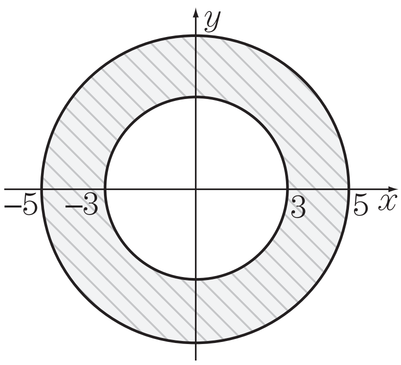


Obr. 4.1.25

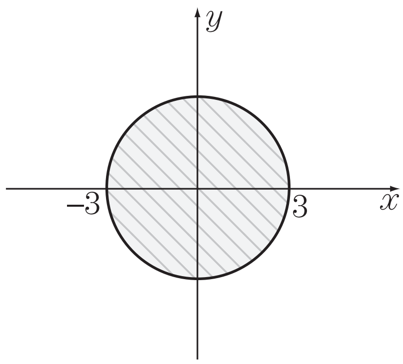


Obr. 4.1.26

c) $D_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \geq 9 \wedge x^2 + y^2 \leq 25\}$ d) $D_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2 + y^2 \leq 9\}$



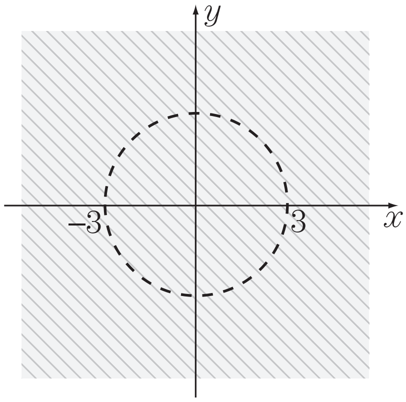
Obr. 4.1.27



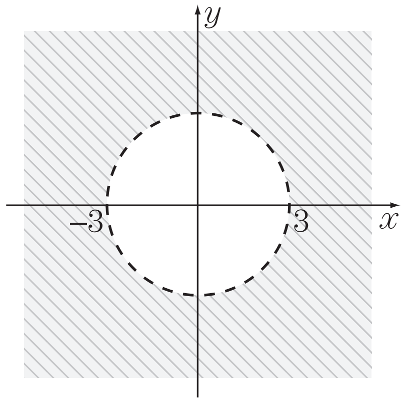
Obr. 4.1.28

4. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2-9}}$.

a)$\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \neq 9\}$ b)$\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 > 9\}$

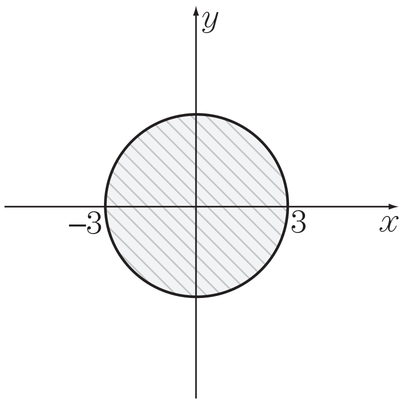


Obr. 4.1.29

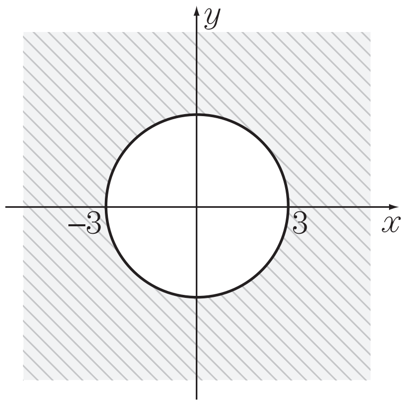


Obr. 4.1.30

c)$\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \leq 9\}$ d)$\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+y^2 \geq 9\}$



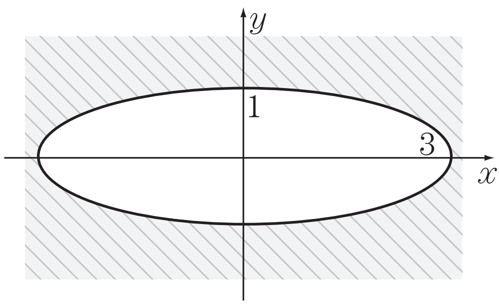
Obr. 4.1.31



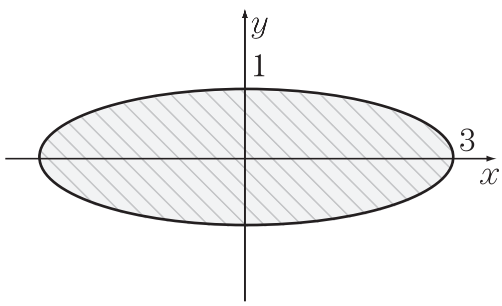
Obr. 4.1.32

5. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \arccos\left(\dfrac{2x^2}{9} + 2y^2 - 1\right)$.

a)$\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+9y^2 \geq 9\}$ b)$\mathrm{D}_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, x^2+9y^2 \leq 9\}$

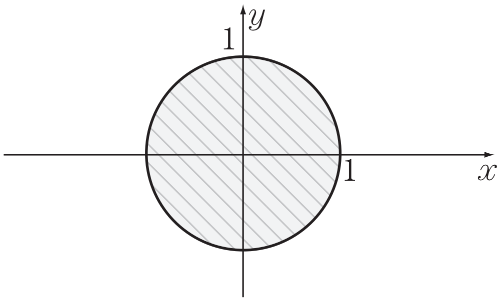


Obr. 4.1.33



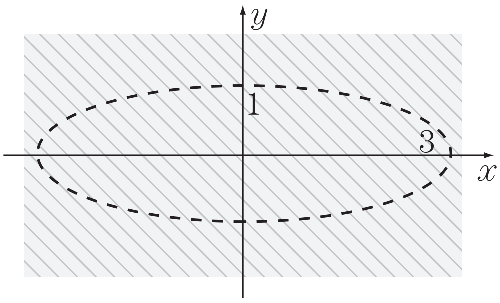
Obr. 4.1.34

c) $D_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$



Obr. 4.1.35

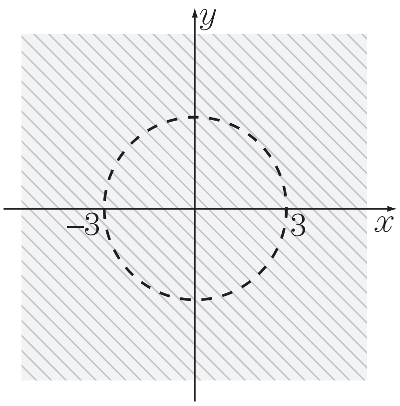
d) $D_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + 9y^2 \neq 9\}$



Obr. 4.1.36

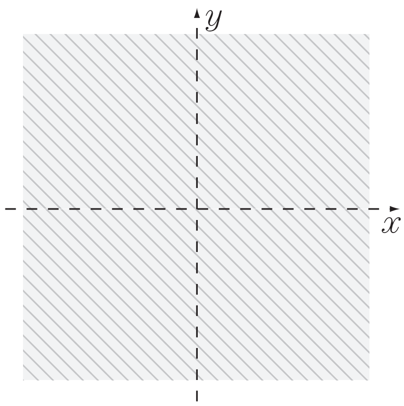
6. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \dfrac{1}{2 + \sin(x^2 + y^2 - 9)}$.

a) $D_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \neq 9\}$



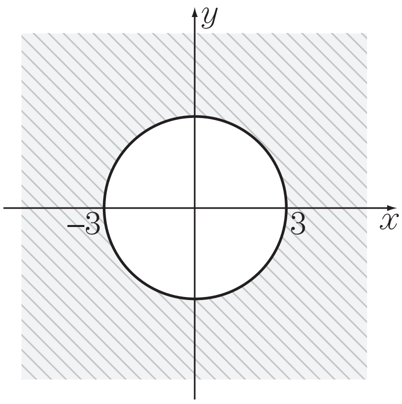
Obr. 4.1.37

b) $D_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0 \wedge y \neq 0\}$



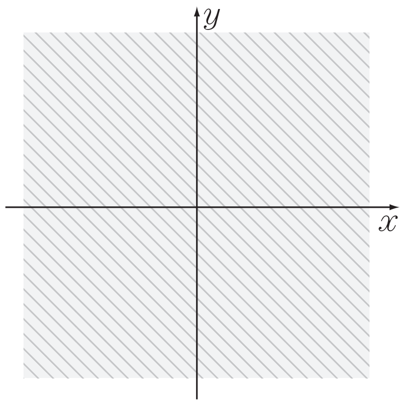
Obr. 4.1.38

c) $D_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \geq 9\}$



Obr. 4.1.39

d) $D_z = \mathbb{R}^2$

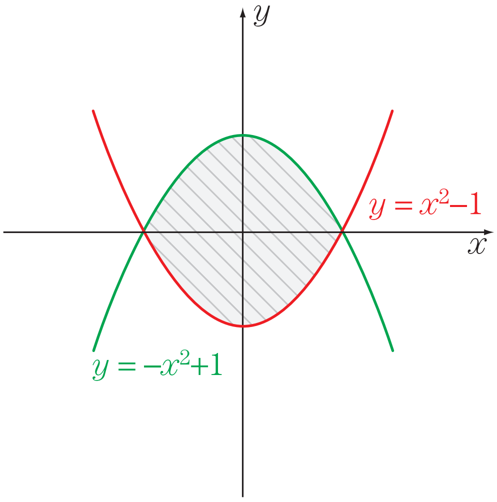


Obr. 4.1.40

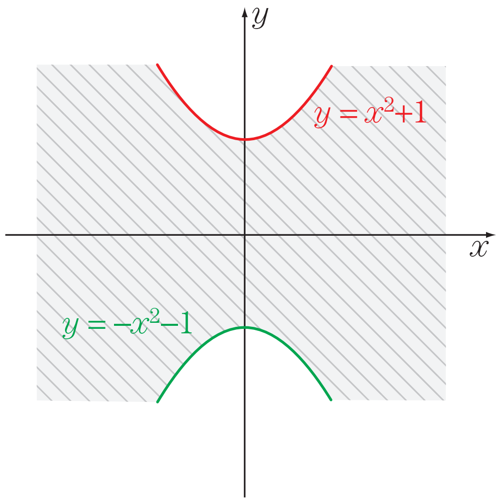
7. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \sqrt{1 - x^2 + y} + \sqrt{1 - x^2 - y}$.

a) $D_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \geq x^2 - 1 \wedge y \leq -x^2 + 1\}$

b) $D_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \leq x^2 + 1 \wedge y \geq -x^2 - 1\}$



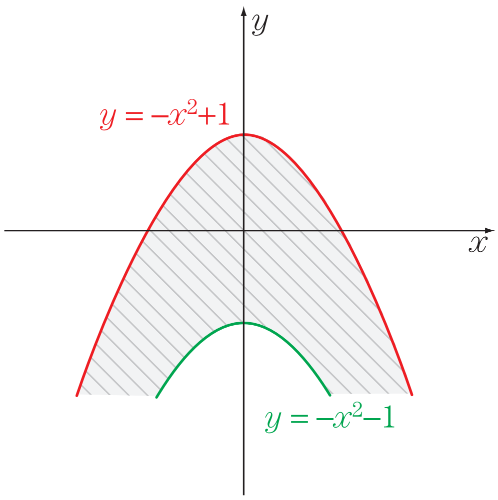
Obr. 4.1.41



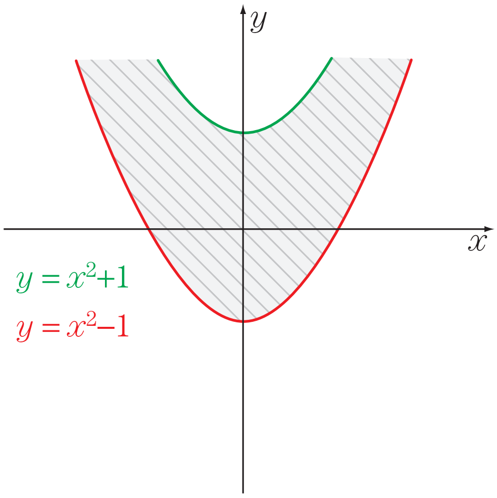
Obr. 4.1.42

c) $D_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \leq -x^2 + 1 \wedge y \geq -x^2 - 1\}$

d) $D_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, y \leq x^2 + 1 \wedge y \geq x^2 - 1\}$



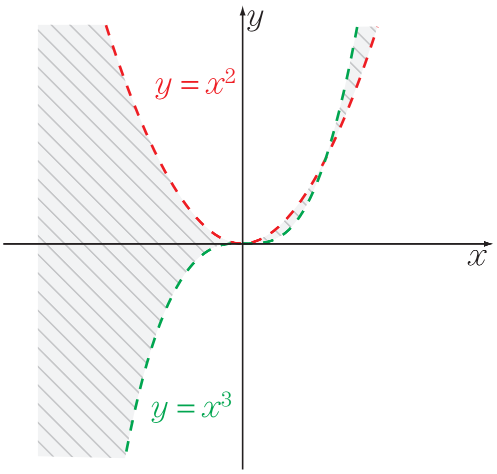
Obr. 4.1.43



Obr. 4.1.44

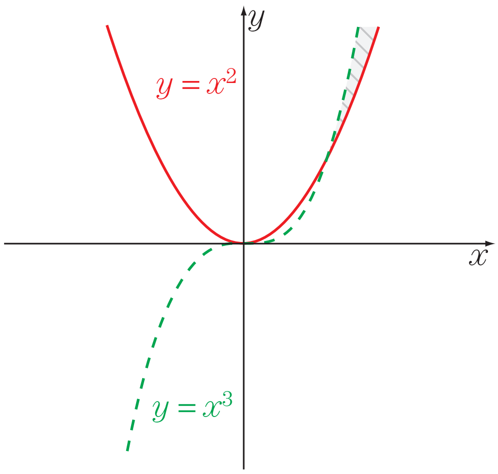
8. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \sqrt{\dfrac{y - x^2}{x^3 - y}}$.

a) $\mathrm{D}_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid (y > x^2 \ \wedge\ y < x^3) \vee (y < x^2 \ \wedge\ y > x^3)\}$



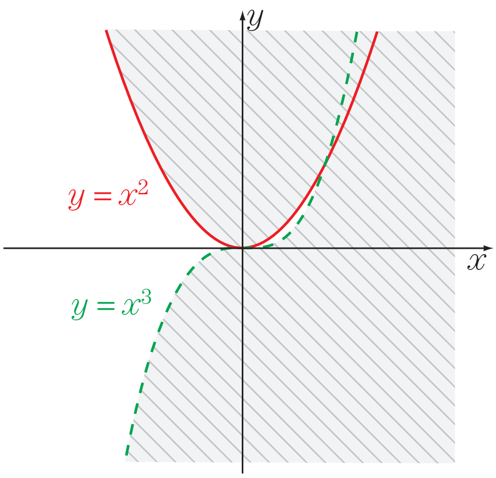
Obr. 4.1.45

b) $\mathrm{D}_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 \ \wedge\ y < x^3\}$



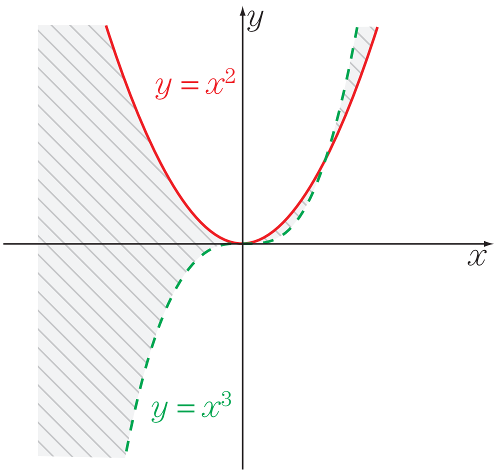
Obr. 4.1.46

c) $\mathrm{D}_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid y \geq x^2 \ \vee\ y < x^3\}$



Obr. 4.1.47

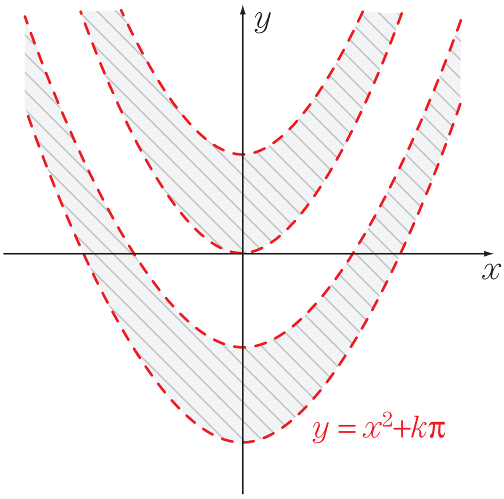
d) $\mathrm{D}_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \mid (y \geq x^2 \ \wedge\ y < x^3)\} \vee (y \leq x^2 \ \wedge\ y > x^3)\}$



Obr. 4.1.48

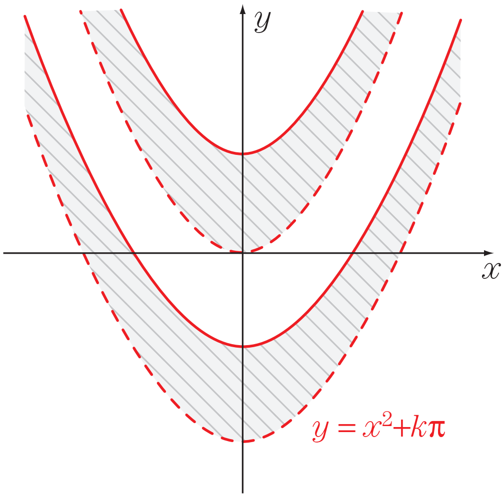
9. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \sqrt{\sin(y - x^2)}$.

a) $\mathrm{D}_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, y - x^2 \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi)\}$



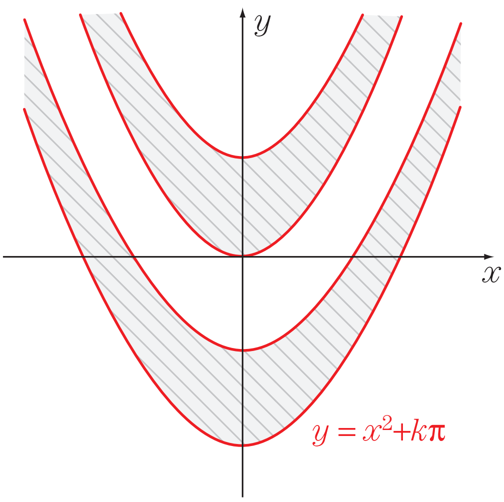
Obr. 4.1.49

b) $\mathrm{D}_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, y - x^2 \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}(0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi\rangle\}$



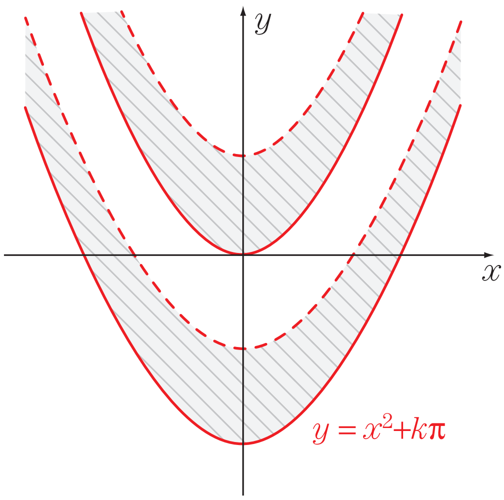
Obr. 4.1.50

c) $\mathrm{D}_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, y - x^2 \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\langle 0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi\rangle\}$



Obr. 4.1.51

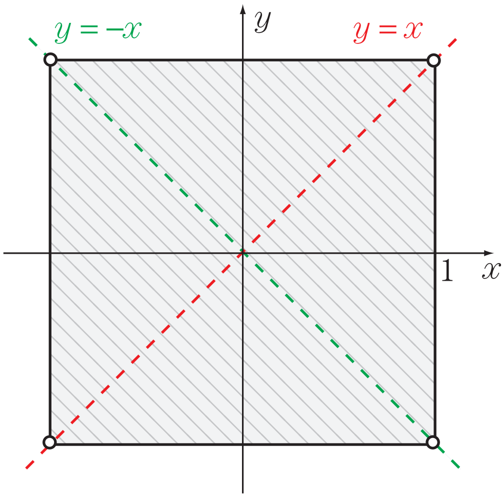
d) $\mathrm{D}_z = \{[x, y] \in \mathbb{R}^2 \,|\, y - x^2 \in \bigcup_{k\in\mathbb{Z}}\langle 0 + 2k\pi, \pi + 2k\pi)\}$



Obr. 4.1.52

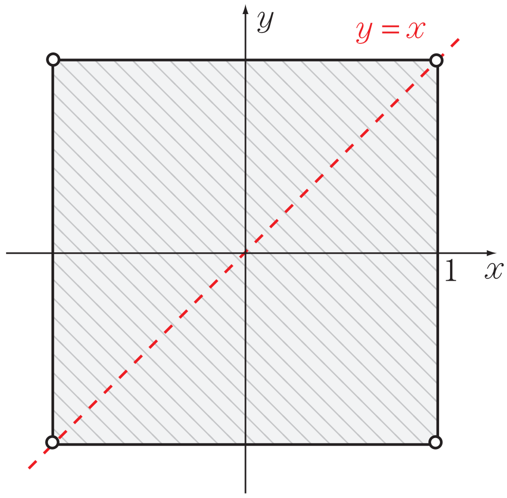
10. Určete a načrtněte definiční obor funkce $z = \dfrac{1}{x^2 - y^2} + \arcsin x + \arccos y$.

a) $D_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1 \wedge |y| \neq |x|\}$



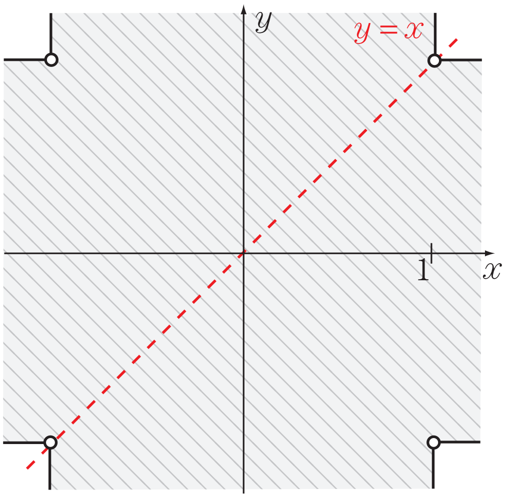
Obr. 4.1.53

b) $D_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid |x| \leq 1 \wedge |y| \leq 1 \wedge y \neq x\}$



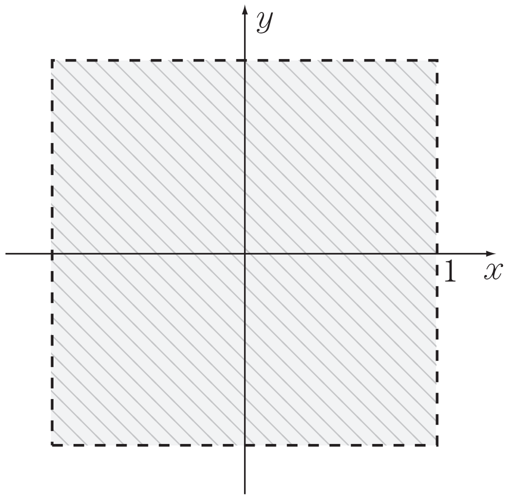
Obr. 4.1.54

c) $D_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid (|x| \leq 1 \vee |y| \leq 1) \wedge y \neq x\}$



Obr. 4.1.55

d) $D_z = \{[x,y] \in \mathbb{R}^2 \mid |x| < 1 \wedge |y| < 1\}$



Obr. 4.1.56

Výsledky testu

1. c), **2.** a), **3.** c), **4.** b), **5.** b), **6.** d), **7.** a), **8.** d), **9.** c), **10.** a).