

# Matematika

## Zkoušková písemná práce

(XAMAT, YAMAT)

Varianta 0\_ukazka\_2 (x. x. xxxx)

Jméno a příjmení	T	1	2	3	4	5	6	Σ	Hodnocení

### A. Teoretická část:

(5 otázek: každá otázka 4 body, minimálně 8 bodů, **pište přímo do zadání**)

1. Pokud je přímka  $y = kx + q$  asymptotou se směrnici k funkci  $y = f(x)$ , pak konstanty  $k$  a  $q$  vypočítáme:

$$k = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x}$$

$$a \quad q = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - kx]$$

2. Jak nazýváme kritické body druhé derivace?

Inflexní body.....

3. Doplňte, čemu se rovnají limity za daných podmínek:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} \dots 0 \dots; & \text{pro } |q| < 1 \\ \dots 1 \dots; & \text{pro } q = 1 \\ \dots \infty \dots; & \text{pro } q > 1 \\ \dots \text{A} \dots; & \text{pro } q \leq -1 \quad (\text{neexistuje}) \end{cases}$$

4. Doplňte, čemu se rovnají dané limity

$$a < 1; \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \dots -\infty \dots;$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \arctg x = \dots \frac{\pi}{2} \dots;$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = \dots \infty \dots;$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \dots 1 \dots;$$

5. Určete řád diferenciální rovnice:

$$(y'')^8 + 2 \sin x (y')^3 + 5xy = 0$$

DR ..... 2 ..... řádu.

## B. Praktická část

(6 příkladů, u každého je uveden maximální počet bodů, celkem 80 bodů, pište na podepsané papíry, při odevzdání zadání přeložte napůl a tyto papíry vložte dovnitř)

### 1. (10b)

Nalezněte rovnice tečny ke křivce  $f(x) = 5 - \ln \sqrt{\frac{-3x+4}{5x+4}}$   
v dotykovém bodě  $T = [0, ?]$ .

$$y_T = 5 - \ln \sqrt{\frac{0+4}{0+4}} = 5 - \ln 1 = 5 \quad T[0; 5]$$

$$f'(x) = - \frac{1}{\sqrt{\frac{-3x+4}{5x+4}}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{-3x+4}{5x+4}}} \cdot \frac{-3(5x+4) - (-3x+4) \cdot 5}{(5x+4)^2}$$

$$k_T = f'(T) = - \frac{1}{1} \cdot \frac{1}{2 \cdot 1} \cdot \frac{-3 \cdot 4 - 4 \cdot 5}{4^2} = -1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{0}{16} = 1$$

$$\text{tečna: } y - y_T = k_T(x - x_T) \quad y - 5 = 1(x - 0) \\ y - 5 = x \quad \Leftrightarrow x - y + 5 = 0$$

### 2. (10b)

Vypočítejte neurčitý integrál:  $\int x^2 \cdot \cos(2x^3 + 5) dx = \int x \cdot \cos t \cdot \frac{dt}{6x^2} \ominus$

$$S: 2x^3 + 5 = t \\ 6x^2 dx = dt \\ dx = \frac{dt}{6x^2}$$

$$\ominus \frac{1}{6} \int \cos t dt = \frac{1}{6} \sin t + C = \frac{1}{6} \sin(2x^3 + 5) + C$$

### 3. (15b)

Řešte počáteční problém pro diferenciální rovnici  $9x \cdot y' + 9y = 0$ ,  $y(10) = -2$ .

$$9x \cdot \frac{dy}{dx} = -9y$$

$$\int \frac{dy}{y} = - \int \frac{dx}{x}$$

$$\ln|y| = -\ln|x| + \ln C$$

$$\ln|y| = \ln \frac{C}{|x|}$$

$$\text{OŘ: } y = \frac{C}{x}$$

$$\text{PP: } y(10) = -2 : -2 = \frac{C}{10} \Rightarrow C = -20 \\ x \neq 0 \\ y = -2$$

$$\text{PŘ: } y = -\frac{20}{x}$$

## 4. (15b)

V R řešte rovnici:

$$1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x^3} + \dots = \frac{4x-3}{3x-4}$$

$$\left. \begin{array}{l} a_1 = 1 \\ a_2 = \frac{2}{x} \\ a_3 = \frac{4}{x^2} \\ a_4 = \frac{8}{x^3} \end{array} \right\} q = \frac{2}{x}$$

$$S_n = \frac{1}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{\frac{x-2}{x}} = \frac{x}{x-2}$$

$$\frac{x}{x-2} = \frac{4x-3}{3x-4}$$

$$3x^2 - 4x = 4x^2 - 8x - 3x + 6$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$(x-6)(x-1) = 0 \Leftrightarrow x_1 = 6 \vee x_2 = 1$$

P = {6}

Pl:  $|\frac{2}{x}| < 1$   
 $\frac{2}{|x|} < 1$   
 $|x| > 2$

Ok:  $x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$

## 5. (15b)

Vypočtěte limitu. Pokud při výpočtu použijete nějaké pravidlo, ověřte jeho předpoklady.

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{\sqrt{5x+14} - 3}{3x + 1 + 2e^{-x-1}}$$

"l'Hôpital"

$$= \lim_{x \rightarrow -1} \frac{\frac{5}{2\sqrt{5x+14}}}{3 + 2 \cdot e^{-x-1} \cdot (-1)} = \frac{\frac{5}{2\sqrt{9}}}{3 + 2 \cdot e^0 \cdot (-1)} = \frac{\frac{5}{2 \cdot 3}}{1} = \frac{5}{6} = 0,8\bar{3}$$

## 6. (15b)

Určete maximální intervaly monotonie funkce:

$$f(x) = (-x^2 + 6x - 6) \cdot e^x.$$

$$\forall x \in \mathbb{R}$$

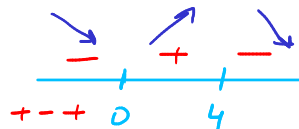
$$f'(x) = (-2x + 6) \cdot e^x + (-x^2 + 6x - 6) \cdot e^x = e^x(-x^2 + 4x)$$

$$e^x(-x^2 + 4x) = 0$$

$$e^x \cdot x(4-x) = 0$$

$$\Leftrightarrow x=0 \vee x=4$$

$$SB_1 \quad SB_2$$



$$\text{Rostoucí: } x \in (0, 4)$$

$$\text{Klesající: } x \in (-\infty, 0) \text{ a na } x \in (4, \infty)$$

**Bodové hodnocení:**

0 – 49 bodů F - neprospěl

50 – 59 bodů E - dobře

60 – 69 bodů D - velmi dobře mínus

70 - 79 bodů C - velmi dobře

80 - 89 bodů B - výborně mínus

90 – 100 bodů A - výborně

V Pardubicích dne xx. xx. xxxx

Mgr. Jiří Kulička, Ph.D.