

Matematika

Zkoušková písemná práce

(XAMAT, YAMAT)

Varianta 0_ukazka_2 (x. x. xxxx)

Jméno a příjmení	T	1	2	3	4	5	6	Σ	Hodnocení

A. Teoretická část:

(5 otázek: každá otázka 4 body, minimálně 8 bodů, **pište přímo do zadání**)

1. Doplňte souřadnice standardní báze 3D prostoru a zakroužkujte jejich správné vlastnosti. $\vec{i} = (\dots; \dots; \dots)$, $\vec{j} = (\dots; \dots; \dots)$, $\vec{k} = (\dots; \dots; \dots)$. Vektory jsou lineárně (závislé / <u>nezávislé</u>). Vektory (<u>jsou</u> / nejsou) navzájem kolmé. Jejich velikost (není / <u>je</u>) rovna jedné.
2. Jsou dány tři vektory $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ a $\vec{c} = (c_1; c_2; c_3)$. Zapište vzorec pro výpočet smíšeného součinu. $S = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$
3. Doplňte, čemu se rovnají limity za daných podmínek: $\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} \dots \frac{0}{1} \dots; & \text{pro } q < 1 \\ \dots \frac{1}{1} \dots; & \text{pro } q = 1 \\ \dots \frac{\infty}{\infty} \dots; & \text{pro } q > 1 \\ \dots \frac{\infty}{\infty} \dots; & \text{pro } q \leq -1 \end{cases}$
4. Doplňte, čemu se rovnají dané limity $a < 1; \lim_{x \rightarrow \infty} \log_a x = \dots \frac{-\infty}{\infty} \dots ;$ $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x = \dots \frac{\pi}{2} \dots ;$ $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \operatorname{tg} x = \dots \frac{\infty}{\infty} \dots ;$ $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = \dots \frac{1}{1} \dots ;$
5. Určete řád diferenciální rovnice: $(y'')^8 + 2 \sin x (y')^3 + 5xy = 0$ DR <u>2.</u> řádu.

B. Praktická část

(6 příkladů, u každého je uveden maximální počet bodů, celkem 80 bodů, pište na podepsané papíry, při odevzdání zadání přeložte napůl a tyto papíry vložte dovnitř)

1. (10b) Nalezněte rovnice tečny a normály ke křivce $f(x) = 5 - \ln \sqrt{\frac{-3x+4}{5x+4}}$ v dotykovém bodě $T = [0, ?]$.
2. (10b) Vypočtěte neurčitý integrál: $\int x^2 \cdot \cos(2x^3 + 5) dx$
3. (15b) Napište vektor $\vec{a} = (-10; 26; -9)$, jako lineární kombinaci vektorů $\vec{b} = (1; -1; 2)$, $\vec{c} = (0; 2; 3)$ a $\vec{d} = (-2; 4; -3)$.
4. (15b) V R řešte rovnici: $1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x^3} + \dots = \frac{4x-3}{3x-4}$
5. (15b) Vypočtěte obě parciální derivace funkce $f(x; y)$ v bodě $M[-1; 1]$: $f(x; y) = 6xy^2 \cdot \ln(-5x - 4y) + \ln 5$
6. (15b) Newtonovou metodou tečen řešte rovnici $\arctg x - (x - 1)^2 = 0$ na intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ s přesností $\varepsilon = 0,00001$. Počáteční aproximaci volte $x_0 = 0$.

Bodové hodnocení:

0 – 49 bodů F - neprospěl

50 – 59 bodů E - dobře

60 – 69 bodů D - velmi dobře mínus

70 - 79 bodů C - velmi dobře

80 - 89 bodů B - výborně mínus

90 – 100 bodů A - výborně

① Tečna a normal'a fce $y = 5 - \ln \sqrt{\frac{-3x+4}{5x+4}}$ $T[0; \infty]$

$$y_T = 5 - \ln \sqrt{\frac{4}{4}} = 5 - \ln 1 = 5 \quad T[0; 5]$$

$$y' = - \frac{1}{\sqrt{\frac{-3x+4}{5x+4}}} \cdot \frac{1}{2 \cdot \sqrt{\frac{-3x+4}{5x+4}}} \cdot \frac{-3(5x+4) - (-3x+4) \cdot 5}{(5x+4)^2}$$

$$y'(x=0) = - \frac{1}{\sqrt{\frac{4}{4}}} \cdot \frac{1}{2 \sqrt{\frac{4}{4}}} \cdot \frac{-3 \cdot 4 - 20}{4^2} = -1 \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{-32}{16} = 1$$

$$t_t = 1 \Rightarrow t_n = -\frac{1}{1} = -1$$

tečna: $y-5 = 1(x-0)$ $y-5 = x$ $t: x-y+5=0$

normal'a: $y-5 = -1(x-0)$ $y-5 = -x$ $n: x+y-5=0$

② $\int x^2 \cdot \cos(2x^3+5) dx = \int x^2 \cot t \cdot \frac{dt}{6x^2} = \frac{1}{6} \int \cot t dt = \frac{1}{6} \sin t + C \ominus$

$$2x^3+5 = t$$

$$6x^2 dx = dt$$

$$\frac{dt}{dx} = \frac{dt}{6x^2}$$

$$\ominus \frac{1}{6} \sin(2x^3+5) + C$$

$$2k: \left(\frac{1}{6} \sin(2x^3+5) + C \right)' = \frac{1}{6} \cos(2x^3+5) \cdot 6x^2 = x^2 \cos(2x^3+5)$$

③ $\vec{a} = (-10; 26; -9); \vec{b} = (1; -1; 2); \vec{c} = (0; 2; 3); \vec{d} = (-2; 4; -3)$

musi platit: $k \cdot \vec{b} + l \cdot \vec{c} + m \cdot \vec{d} = \vec{a}$

$$\begin{pmatrix} k & l & m \\ 1 & 0 & -2 & -10 \\ -1 & 2 & 4 & 26 \\ 2 & 3 & -3 & -9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -10 \\ 0 & 2 & 2 & 16 \\ 0 & 3 & 1 & 11 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & -2 & -13 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 & -10 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & 13/2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} k \\ l \\ m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 7/2 \\ 13/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \vec{a} = 3\vec{b} + \frac{7}{2}\vec{c} + \frac{13}{2}\vec{d}$$

$$\left\{ 2k: 3 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{7}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{13}{2} \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -10 \\ 26 \\ -9 \end{pmatrix} \right\}$$

$$m = \frac{13}{2} \quad l+m = 8$$

$$l = 8 - m = 8 - \frac{13}{2} = \frac{3}{2}$$

$$k - 2m = -10$$

$$k = -10 + 2m = -10 + 2 \cdot \frac{13}{2} = 3$$

④ $1 + \frac{2}{x} + \frac{4}{x^2} + \frac{8}{x^3} + \dots = \frac{4x-3}{3x-4}$ $S_n = \frac{1}{1 - \frac{2}{x}} = \frac{1}{\frac{x-2}{x}} = \frac{x}{x-2}$

$$a_1 = 1 \quad a_2 = \frac{2}{x} \quad a_3 = \frac{4}{x^2} \quad a_n = \frac{8}{x^3}$$

$$q = \frac{2}{x}$$

$$\frac{x}{x-2} = \frac{4x-3}{3x-4}$$

$$3x^2 - 4x = 4x^2 - 8x - 3x + 6$$

$$PK: \left| \frac{2}{x} \right| < 1$$

$$\frac{2}{|x|} < 1$$

$$|x| > 2$$

$$Ok: x \in (-\infty; -2) \cup (2; \infty)$$

$$x^2 - 7x + 6 = 0$$

$$(x-6)(x-1) = 0$$

$$x_1 = 6 \quad x_2 = 1$$

$$\underline{\underline{P = \{6\}}}$$



⑤ $f(x,y) = 6xy^2 \cdot \ln(-5x-4y) + \ln 5$ $M[-1,1]$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 6y^2 \cdot \ln(-5x-4y) + 6xy^2 \cdot \frac{1}{(-5x-4y)} \cdot (-5) = 6y^2 \ln(-5x-4y) + \frac{30xy^2}{5x+4y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(M) = 6 \cdot 1^2 \ln(5-4) + \frac{30(-1) \cdot 1^2}{-5+4} = 6 \ln 1 + \frac{-30}{-1} = 0 + 30 = \underline{\underline{30}}$$

$(\begin{smallmatrix} x=-1 \\ y=1 \end{smallmatrix})$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 12xy \cdot \ln(-5x-4y) + 6x^2 \cdot \frac{1}{(-5x-4y)} \cdot (-4) = 12xy \ln(-5x-4y) + \frac{24x^2}{5x+4y}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(M) = 12(-1) \cdot 1 \cdot \ln(5-4) + \frac{24(-1) \cdot 1}{-5+4} = -12 \ln 1 + 24 = 0 + 24 = \underline{\underline{24}}$$

$(\begin{smallmatrix} x=-1 \\ y=1 \end{smallmatrix})$

⑥ $y = \arctan x - (x^2 - 2x + 1) - \arctan x - x^2 + 2x - 1$

$$y' = \frac{1}{1+x^2} - 2x + 2$$

$$IV: x_{n+1} = x_n - \frac{\arctan x_n - x_n^2 + 2x_n - 1}{(1+x_n^2)^{-1} - 2x_n + 2} \quad (= A - \frac{\arctan A - A^2 + 2A - 1}{(1+A^2)^{-1} - 2A + 2})$$

$$x_0 \quad 0 \quad \varepsilon = 0,00001$$

$$x_1 \quad 0,3 \quad 0,3$$

$$x_2 \quad 0,388271 \quad 0,054938$$

$$x_3 \quad 0,390115 \quad 0,001844$$

$$x_4 \quad (0,390117) \quad 0,000002 \quad \times$$

$$x = \underline{\underline{0,39012 \pm 0,00001}}$$