Matematika

Zkoušková písemná práce
(XAMAT, YAMAT)
Varianta 0_ukazka_1 (x. x. xxxx)

Jméno a příjmení	T	1	2	3	4	5	6	Σ	Hodnocení

A. Teoretická část:

(5 otázek: každá otázka 4 body, minimálně 8 bodů, **pište přímo do zadání**)

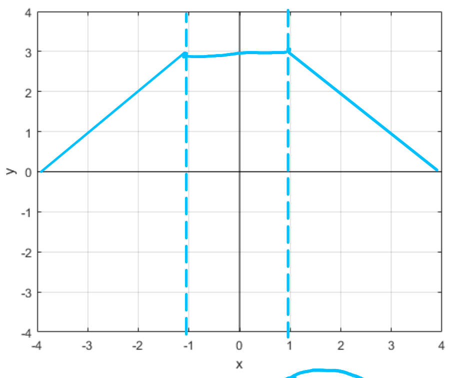
1. Správně doplňte tvrzení:
   Mezi směrnicí rovnice tečny a normály k funkci v daném bodě platí vztah: $k_t \cdot k_n = -1$

2. Rozhodněte o pravdivosti tvrzení, zakroužkujte správnou možnost:

   a) Konvergentní posloupnosti mají nevlastní limitu. Pravda / Nepravda
   b) Každá posloupnost má dvě limity. Pravda / Nepravda

3. Do rastru načrtněte graf funkce a zakroužkujte, zda je spojitá v kritických bodech -1 a 1:

$$f(x) = \begin{cases} x+4; \ pro\ x \le -1 \\ 3; \ pro -1 < x \le 1 \\ -x+4; \ pro\ x > 1 \end{cases}$$



Funkce je spojitá v bodě -1: Pravda / Nepravda
Funkce je spojitá v bodě 1: Pravda / Nepravda

4. Doplňte vzorec pro výpočet určitého integrálu

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

5. Jakého řádu je diferenciální rovnice $e^y \cdot y'' + 2\sin(y \cdot y') + 5x^5y^7 = 0$

   Řád DR je: 2.

B. Praktická část

(6 příkladů, u každého je uveden maximální počet bodů, celkem 80 bodů, pište na podepsané papíry, při odevzdání zadání přeložte napůl a tyto papíry vložte dovnitř)

1. **(10b)**
   Nalezněte rovnici normály k funkci $y = (2x^2 - 4x + 2) \cdot 7^x + 6$ v dotykovém bodě $T[1; ?]$.

$y_T \underset{x=1}{=} (2\cdot 1^2 - 4\cdot 1 + 2)\cdot 7^1 + 6 = (\overbrace{2-4+2}^{0})\cdot 7^1 + 6 = 0\cdot 7 + 6 = 6 \quad T[1;6]$

$y' = (4x-4)\cdot 7^x + (2x^2-4x+2)\cdot 7^x \cdot \ln 7$

$k_t = y'_{(T)} \underset{x=1}{=} (\overbrace{4\cdot 1 - 4}^{0})\cdot 7^x + (\overbrace{2\cdot 1^2 - 4\cdot 1 + 2}^{0})\cdot 7^1 \cdot \ln 7 = 0 \quad k_n = -\frac{1}{0} \text{ „neexistuje"} \Rightarrow -\infty \quad n \parallel o_y$

normála: $x = 1$

$x - 1 = 0$

2. **(10b)**
   Vypočtěte určitý integrál: $\int_{2\pi}^{4\pi} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x-2\pi}{6}\right)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 t} \cdot 6\,dt \ominus$

S: $\frac{x-2\pi}{6} = t \qquad x = 2\pi \to t = 0$

$\frac{1}{6}dx = dt \qquad x = 4\pi \to t = \frac{\pi}{3}$

$dx = 6\,dt$

$\ominus\, 6\left[\operatorname{tg} t\right]_0^{\frac{\pi}{3}} = 6\left[\operatorname{tg}\frac{\pi}{3} - \operatorname{tg} 0\right] = 6(\sqrt{3} - 0) = 6\sqrt{3} \doteq 10{,}39$

3. **(15b)**
   Spočtěte limitu. Pokud při výpočtu použijete nějaké pravidlo, ověřte jeho předpoklady.

$$\lim_{x\to 0} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{3 - \sqrt{9 - 3\sin(3x)}} = \text{„}\frac{0}{0}\text{"} \quad \text{lze použít = L'HP}$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{\frac{1}{\cos^2 2x}\cdot 2}{-\frac{1}{2\sqrt{9-3\cdot\sin 3x}}\cdot(-3\cos 3x\cdot 3)} = \frac{\frac{2}{\cos^2 0}}{-\frac{1}{2\sqrt{9-3\sin 0}}\cdot(-3\cos 0\cdot 3)} =$$

$$= \frac{2}{-\frac{1}{2\cdot 3}(-9)} = \frac{2}{\frac{9}{6}} = 2\cdot\frac{6}{9} = \frac{4}{3} = 1\tfrac{1}{3} \doteq 1{,}33$$

4. **(15b)**
Řešte počáteční problém pro diferenciální rovnici a určete hodnotu partikulárního řešení v čase t=4.

$$2y'\sqrt{x} = y, \text{ víte-li, že } y(0) = 5$$

$$2\frac{dy}{dx}\cdot\sqrt{x} = y$$

$$\frac{2dy}{y} = \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

$$2\int\frac{dy}{y} = \int x^{-\frac{1}{2}}dx$$

$$2\ln|y| = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C \quad /:2$$

$$\ln|y| = \sqrt{x} + C$$

$$e^{\sqrt{x}+C} = |y| \Rightarrow \text{OŘ: } y = C\cdot e^{\sqrt{x}}$$

PP: $y(0)=5$: $5 = C\cdot e^{\sqrt{0}} \Rightarrow C=5$
$x=0$
$y=5$

PŘ: $y = 5e^{\sqrt{x}}$

$y(4) = 5\cdot e^{\sqrt{4}} = 5e^2 = 36{,}95$
$t=4$

5. **(15b)**
Určete maximální intervaly monotonie funkce: $f(x) = 6^{\sqrt{-x^2+x+12}}$

Df: $-x^2+x+12 \geq 0$
$x^2-x-12 \leq 0$
$(x-4)(x+3) \leq 0$
$\quad 4 \quad -3$

$+ \quad \ominus \quad +$
$-3 \quad 4$
$x \in \langle -3;4\rangle$

$$f'(x) = 6^{\sqrt{-x^2+x+12}}\cdot\ln 6\cdot\frac{1}{2\sqrt{-x^2+x+12}}\cdot(-2x+1)$$

$$\underbrace{6^{\sqrt{-x^2+x+12}}}_{>0}\cdot\underbrace{\ln 6}_{>0}\cdot\frac{\overbrace{-2x+1}^{=0}}{2\underbrace{\sqrt{-x^2+x+12}}_{>0}} = 0$$

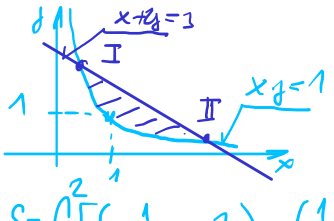
$\Leftrightarrow -2x+1=0$
$x = \frac{1}{2}$
SB

$-3 \quad +++ \quad \frac{1}{2} \quad - \quad 4$

Rostoucí $x \in \langle -3; \frac{1}{2}\rangle$
Klesající $x \in \langle \frac{1}{2}; 4\rangle$

6. **(15b)**
Vypočtěte obsah rovinného obrazce ohraničeného křivkami o rovnicích:
$x \cdot y = 1$ a $x + 2y = 3$.

$y = \frac{1}{x}$ $\quad y = \frac{3-x}{2} = -\frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$



I, II: $\frac{1}{x} = \frac{3-x}{2}$
$2 = 3x - x^2$
$x^2 - 3x + 2 = 0$
$(x-1)(x-2) = 0$
$x_1 = 1 \quad x_2 = 2$

$$S = \int_1^2\left[\left(-\frac{1}{2}x+\frac{3}{2}\right)-\left(\frac{1}{x}\right)\right]dx = \int_1^2\left(-\frac{1}{2}x\right)dx + \frac{3}{2}\int_1^2 dx - \int_1^2\frac{1}{x}dx =$$

$$= -\frac{1}{2}\left[\frac{x^2}{2}\right]_1^2 + \frac{3}{2}\left[x\right]_1^2 - \left[\ln x\right]_1^2 = -\frac{1}{2}\left(2-\frac{1}{2}\right) + \frac{3}{2}(2-1) - (\ln 2 - \ln 1) = -\frac{3}{4} + \frac{3}{2} - \ln 2 = \frac{3}{4} - \ln 2 \doteq 0{,}06$$

Bodové hodnocení:

0 – 49 bodů	F - neprospěl
50 – 59 bodů	E - dobře
60 – 69 bodů	D - velmi dobře mínus
70 - 79 bodů	C - velmi dobře
80 - 89 bodů	B - výborně mínus
90 – 100 bodů	A - výborně

V Pardubicích dne xx. xx. xxxx

Mgr. Jiří Kulička, Ph.D.