

Matematika

Zkoušková písemná práce

(XAMAT, YAMAT)

Varianta 0_ukazka_1 (x. x. xxxx)

Jméno a příjmení	T	1	2	3	4	5	6	Σ	Hodnocení

A. Teoretická část:

(5 otázek: každá otázka 4 body, minimálně 8 bodů, **píšte přímo do zadání**)

1. Správně doplňte tvrzení:

Tři komplanární vektory leží *v jedné rovině* a jejich smíšený součin je roven *0* ..

2. Rozhodněte o pravdivosti tvrzení, zakroužkujte správnou možnost:

a) Konvergentní posloupnosti mají nevlastní limitu.

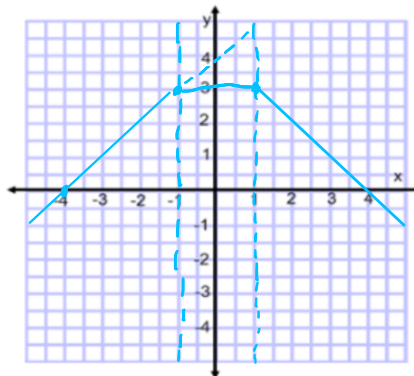
Pravda / Nepravda

b) Každá posloupnost má dvě limity.

Pravda / Nepravda

3. Do rastru načrtněte graf funkce a zakroužkujte, zda je spojitá v kritických bodech -1 a 1:

$$f(x) = \begin{cases} x + 4; & \text{pro } x \leq -1 \\ 3; & \text{pro } -1 < x \leq 1 \\ -x + 4; & \text{pro } x > 1 \end{cases}$$



Funkce je spojitá v bodě -1: Pravda / Nepravda

Funkce je spojitá v bodě 1: Pravda / Nepravda

4. Doplňte vzorec pro výpočet určitého integrálu

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = \dots \dots \dots \text{ } F(b) - F(a) \dots \dots \dots$$

5. Doplňte iterační vztah pro řešení rovnice $f(x) = 0$ pomocí Newtonovy metody tečen pro konstrukci posloupnosti iterací $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$

IV: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

B. Praktická část

(6 příkladů, u každého je uveden maximální počet bodů, celkem 80 bodů, pište na podepsané papíry, při odevzdání zadání přeložte napůl a tyto papíry vložte dovnitř)

1. (10b) Nalezněte rovnici tečné roviny k ploše $z = \ln(x - 2y)$ v dotykovém bodě $T[3; 1; ?]$.
2. (10b) Vypočtete určitý integrál: $\int_{2\pi}^{4\pi} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x-2\pi}{6}\right)} dx$
3. (15b) Spočtete limitu. Pokud při výpočtu použijete nějaké pravidlo, ověřte jeho předpoklady. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\operatorname{tg}(2x)}{3 - \sqrt{9 - 3 \sin(3x)}}$
4. (15b) Řešte počáteční problém pro diferenciální rovnici a určete hodnotu partikulárního řešení v čase t : $2y'\sqrt{x} = y, \text{ víte-li, že } y(0) = 5$
5. (15b) Určete maximální intervaly monotonie funkce: $f(x) = 6^{\sqrt{-x^2+x+12}}$
6. (15b) Vypočtete integrál: $\iint_D x dA; D = \{[x; y] \in R^2; 0 \leq x \leq \pi \wedge 0 \leq y \leq \sin x\}$

Bodové hodnocení:

0 – 49 bodů F - neprospěl

50 – 59 bodů E - dobře

60 – 69 bodů D - velmi dobře mínus

70 - 79 bodů C - velmi dobře

80 - 89 bodů B - výborně mínus

90 – 100 bodů A - výborně

V Pardubicích dne xx. xx. xxxx

Mgr. Jiří Kulička, Ph.D.

$$\textcircled{1} \quad z = \ln(x-2y) \quad T[3;1;2] \quad z_T = \ln(3-2) = \ln 1 = 0 \rightarrow T[3;1;0]$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{1}{x-2y} \cdot 1 \quad \frac{\partial z}{\partial x}(T) = \frac{1}{3-2} = 1 \quad z: z - z_T = \frac{\partial z}{\partial x}(T)(x - x_T) + \frac{\partial z}{\partial y}(y - y_T)$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{1}{x-2y} \cdot (-2) \quad \frac{\partial z}{\partial y}(T) = -\frac{2}{3-2} = -2 \quad T \in z: z - 0 = 1 \cdot (x - 3) - 2(y - 1)$$

$$z = x - 3 - 2y + 2$$

$$\textcircled{2} \quad \int_{2\pi}^{4\pi} \frac{1}{\cos^2\left(\frac{x-2\pi}{6}\right)} dx = \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 t} \cdot 6 dt = 6 \int_0^{\frac{\pi}{3}} \frac{1}{\cos^2 t} dt = 6 \left[\tan t \right]_0^{\frac{\pi}{3}} \quad \ominus$$

$$\frac{x-2\pi}{6} = t \quad x=2\pi \rightarrow t=0$$

$$\frac{1}{6} dx = dt \quad x=4\pi \rightarrow t=\frac{\pi}{3}$$

$$\frac{1}{6} dx = 6 dt$$

$$\ominus 6 \left[\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) - \tan(0) \right] = 6(\sqrt{3} - 0) = 6\sqrt{3} \approx 10,3923$$

$$\textcircled{3} \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(2x)}{3 - \sqrt{9 - 3\sin 3x}} = \frac{0}{0} \quad \text{L'Hôpital} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{2x} \cdot 2}{-\frac{1}{2\sqrt{9-3\sin 3x}} \cdot (-3\cos 3x \cdot 3)} \quad \ominus$$

$$= \frac{2}{-\frac{1}{2 \cdot 3} \cdot (-9)} = \frac{2}{\frac{9}{6}} = 2 \cdot \frac{6}{9} = \frac{4}{3} = 1,3$$

$$\textcircled{4} \quad 2y' \sqrt{x} = y; \quad y(0) = 5$$

$$2 \frac{dy}{dx} \sqrt{x} = y \quad 2 \ln|y| = \frac{x^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2}} + C = 2\sqrt{x} + C \quad | :2$$

$$\ln|y| = \sqrt{x} + C$$

$$e^{\sqrt{x} + C} = |y|$$

$$e^{\sqrt{x}} \cdot e^C = |y|$$

$$\text{or: } y = C \cdot e^{\sqrt{x}}$$

$$\text{PE: } \text{DOE: } 5 = C \cdot e^0 \Rightarrow C = 5$$

$$x=0$$

$$y=5$$

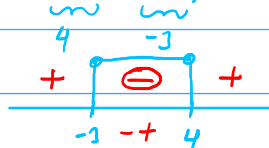
$$\text{PE: } y = 5e^{\sqrt{x}}$$

$$⑤ \quad f(x) = 6^{\sqrt{-x^2+x+12}}$$

$$\text{pf: } -x^2+x+12 \geq 0 \quad | \cdot (-1)$$

$$x^2-x-12 \leq 0$$

$$(x-4)(x+3) \leq 0$$

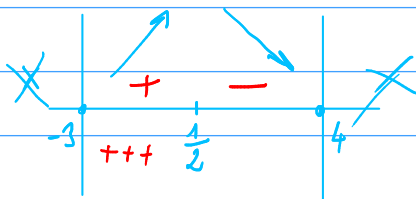


$$x \in [-3; 4]$$

$$g' = 6^{\sqrt{-x^2+x+12}} \cdot \ln 6 \cdot \frac{1}{2\sqrt{-x^2+x+12}} \cdot (-2x+1)$$

$$6^{\sqrt{-x^2+x+12}} \cdot \ln 6 \cdot \frac{-2x+1}{2\sqrt{-x^2+x+12}} = 0$$

$$\Leftrightarrow -2x+1=0 \Rightarrow \text{SB: } x = \frac{1}{2}$$



Rostanci' $x \in [-3; \frac{1}{2}]$

Klesajici' $x \in [\frac{1}{2}; 4]$

$$⑥ \quad \iint_D x \, dA; \quad D = \{[x; y] \in \mathbb{R}^2; 0 \leq x \leq \pi \wedge 0 \leq y \leq \sin x\}$$

$$\int_0^\pi \left(\int_0^{\sin x} x \, dy \right) dx = \int_0^\pi dx [xy]_0^{\sin x} = \int_0^\pi x \cdot \sin x \, dx \quad \ominus$$

$u = x \quad u' = 1$
 $v' = \sin x \quad v = -\cos x$

$$\ominus [-x \cos x]_0^\pi + \int_0^\pi \cos x \, dx = [(-\pi \overset{-1}{\cos \pi}) - (0 \cdot \overset{0}{\cos 0})] + [\overset{0}{\sin \pi} - \overset{0}{\sin 0}] = \pi$$