

Přednáška 9

Diferenciální a Integrální počet funkcí více proměnných

(funkce dvou a více proměnných, spojitost a limita, parciální derivace, geometrický význam parciálních derivací, extrémy funkcí, Reimannův vícerozměrný integrál, výpočet vícerozměrných integrálů na kompaktním intervalu, aplikace dvojných integrálů)

Funkce více proměnných

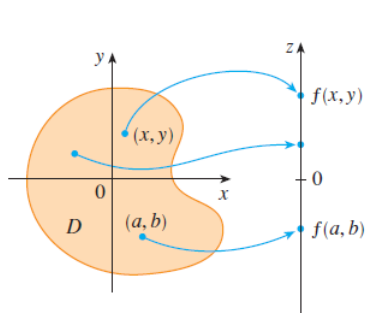
Definice:

Funkce 2 proměnných je pravidlo, které přiřazuje každé uspořádané dvojici reálných čísel $[x; y]$ z množiny D jediné reálné číslo $f(x; y)$.

Množina D je definiční obor funkce

$$H \text{ je obor hodnot funkce } \{f(x; y); [x; y] \in D\}$$

Píšeme $z = f(x; y)$ x, y jsou nezávislé proměnné, z je závislá proměnná



D je podmnožina R^2

H je podmnožina R

Př1:

$$a) z = f(x; y) = \arcsin(x + y) \quad f(-1; 2) =$$

$$b) z = f(x; y) = \frac{2xy}{x^2 + y^2} \quad f(-1; 2) =$$

Definiční obor funkce

Př2: Určete definiční obor funkce a graficky ho znázorněte

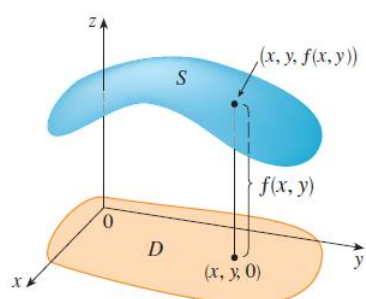
$$a) z = \sqrt{1 - x^2} + \sqrt{y^2 - 1} \quad D(z) = \{[x; y] \in R^2; 1 - x^2 \geq 0 \wedge y^2 - 1 \geq 0\}$$

$$b) z = \ln(xy) \quad D(z) = \{[x; y] \in R^2; xy > 0\}$$

$$c) z = \sqrt{(x^2 + y^2 - 1) \cdot (4 - x^2 - y^2)} \quad D(z) = \{[x; y] \in R^2; (x^2 + y^2 - 1) \cdot (4 - x^2 - y^2) \geq 0\}$$

Graf funkce dvou proměnných

Definice:

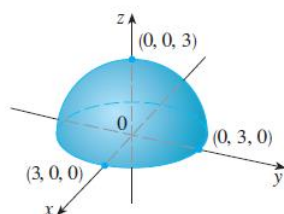


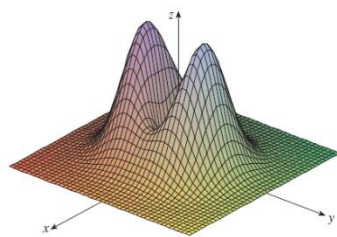
Jestliže f je funkce dvou proměnných x, y s definičním oborem D , potom graf funkce f je množina všech bodů $[x; y; z] \in R^3$, takových, pro které platí $z = f(x; y)$ a $[x; y] \in D$.

Metoda řezů: vrstevnice

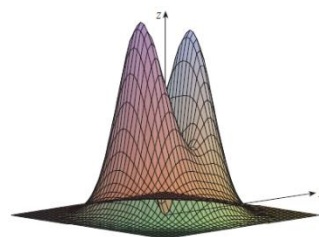
Průsečnice $z = f(x; y)$ s rovinami rovnoběžnými se souřadnicovými rovinami

Př3: Načrtněte graf funkce $z = \sqrt{9 - x^2 - y^2}$

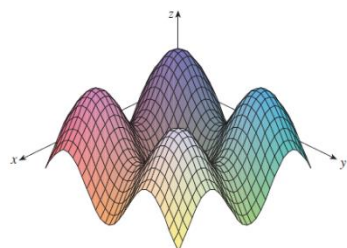




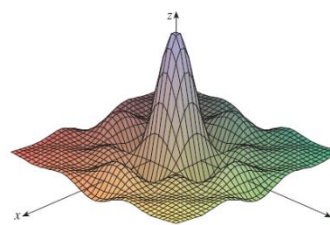
(a) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2 - y^2}$



(b) $f(x, y) = (x^2 + 3y^2)e^{-x^2 - y^2}$



(c) $f(x, y) = \sin x + \sin y$



(d) $f(x, y) = \frac{\sin x \cdot \sin y}{xy}$

Limita a spojitost funkcí 2 proměnných

Pouze transparentně zjednodušeno

Porovnáme chování dvou různých funkcí

$$f(x; y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

$$g(x; y) = \frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$$

Tabulky funkčních hodnot

$f(x; y)$						$g(x; y)$					
	-0,5	-0,2	0	0,2	0,5		-0,5	-0,2	0	0,2	0,5
-0,5	0,959	0,968	0,99	0,986	0,959	-0,5	0	0,724	1	0,724	0
-0,2	0,986	0,999	1	0,999	0,986	-0,2	-0,72	0	1	0	-0,72
0	0,99	1		1	0,99	0	-1	-1		-1	-1
0,2	0,986	0,999	1	0,999	0,986	0,2	-0,72	0	1	0	-0,72
0,5	0,959	0,986	0,99	0,986	0,959	0,5	0	0,724	1	0,724	0

Zapisujeme: $\lim_{[x; y] \rightarrow [a; b]} f(x; y) = L$

Funkce $f(x; y)$ se nazývá spojitá v bodě $[a; b]$, jestliže $\lim_{[x; y] \rightarrow [a; b]} f(x; y) = f(a; b)$

Funkce $f(x; y)$ se nazývá spojitá na D , jestliže je spojitá v každém bodě $[a; b] \in D$

Př4:

a) Je funkce $f(x; y) = x^2 y^3 - x^3 y^2 + 3x + 2y$ spojitá v bodě $[1; 2]$?

b) Kde je funkce $f(x; y) = \arctg \frac{y}{x}$ spojitá?

Parciální derivace

Parciální derivace funkce $f(x; y)$ jsou funkce definované takto:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + h; y) - f(x; y)}{h}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x; y + h) - f(x; y)}{h}$$

Parciální derivace v bodě $A[a; b]$ je číslo

Platí stejné vztahy, jako pro funkci jedné proměnné, ostatní proměnné jsou považovány za konstanty

Př5: vypočtete všechny parciální derivace daných funkcí:

a) $f(x; y) = x^y$

b) $f(x; y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x}$

c) $f(x; y) = \frac{\sin x^2}{y}$

d) $f(x; y) = x \cdot e^{-yx}$

e) $f(x; y) = \ln \operatorname{tg} \frac{x}{y}$

f) $f(x; y) = \sin \frac{x}{y} \cdot \cos \frac{y}{x}$

g) $f(x; y) = x\sqrt{y} + \frac{x}{3\sqrt{x}}$

h) $(x; y) = \ln \frac{x+y}{x-y}$ určete $\frac{\partial f}{\partial y}$ v bodě $A[3; 1]$

i) $f(x; y; z) = e^{yx} \cdot \ln z$

Parciální derivace vyšších řádů

$$f(x; y) \rightarrow \frac{\partial f}{\partial x}$$

$$\rightarrow \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{opět funkce dvou proměnných } x, y$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x; y) \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x; y) \begin{cases} \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{cases}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{jsou vždy stejné}$$

Př5: vypočtete všechny parciální derivace druhého řádu daných funkcí:

a) $f(x; y) = x^3 + x^2 y^3 - 2y^2$

b) $f(x; y) = e^{2y} \cdot \sin x$

c) $f(x; y) = \ln(x - y)$ vypočtete $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0; 1)$

d) $f(x; y; z) = e^{xyz}$ vypočtěte $\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$

Geometrický význam parciálních derivací

Tečná rovina ke křivce $z = f(x; y)$ v dotykovém bodě $T[x_T; y_T; z_T]$

$$\tau: z - z_T = \frac{\partial f}{\partial x}(T)(x - x_T) + \frac{\partial f}{\partial y}(T)(y - y_T)$$

Př6: Určete rovnici tečné roviny k ploše $z = x^2 + 2y^2$ v dotykovém bodě $T[2; 1; z_T]$

Derivace složených funkcí

Funkce jedné proměnné: $y = f(x) \rightarrow x = g(t)$ $\frac{dy}{dt} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dt}$ schéma:

Př6: určete $\frac{dy}{dt}$ pro funkci $y = 2x^2 - x + 3$, pokud $x = \sin t$.

Funkce dvou proměnných:

První případ:

$$z = f(x; y) \rightarrow x = g(t)$$

schéma:

$$\rightarrow y = h(t) \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt}$$

Př7: určete $\frac{dz}{dt}$ ($t = 0$) pro funkci $z = x^2y + 3xy^4$, pokud $x = \sin 2t$ a $y = \cos t$

Druhý případ:

$$\begin{aligned} z = f(u; v) &\rightarrow u = g(x; y) && \text{schéma:} \\ &\rightarrow y = h(x; y) \end{aligned}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial x}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \cdot \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \cdot \frac{\partial v}{\partial y}$$

Př8: určete obě parciální derivace funkce $z = e^x \sin y$, pokud $x = st^2$ a $y = s^2t$

schéma:

Třetí případ: obecně

$$u = f(x_1; x_2; \dots; x_N) \rightarrow \text{každá } x_j, j = 1; \dots; N \text{ je funkcí } M \text{ proměnných } t_1; t_2; \dots; t_M$$

schéma:

$$\frac{\partial u}{\partial t_i} = \frac{\partial u}{\partial x_1} \cdot \frac{\partial x_1}{\partial t_i} + \dots + \frac{\partial u}{\partial x_N} \cdot \frac{\partial x_N}{\partial t_i} \quad \forall i = 1; \dots; M$$

Př9: určete $\frac{\partial u}{\partial s}$ ($r = 2; s = 1; t = 0$) funkce $u = x^4y + y^2z^3$, pokud $x = rse^t$, $y = rs^2e^{-t}$ a $z = r^2s \sin t$

schéma:

Gradient vektor

Pokud je $z = f(x; y)$ diferencovatelná, je definovaná vektorová funkce gradient funkce f

$$\text{grad}(f) = \nabla f(x; y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}; \frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

Derivace v daném směru

Pokud je $z = f(x; y)$ diferencovatelná, pak má derivaci ve směru jednotkového vektoru $\vec{u} = (a; b)$

$$D_{\vec{u}}f(x; y) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot a + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot b = \nabla f(x; y) \cdot (a; b)$$

Pokud je jednotkový vektor $\vec{u} = (a; b)$ určen úhlem φ , který svírá ke kladné ose x

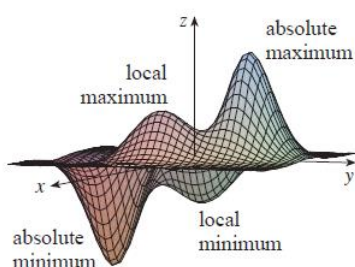
$\vec{u} = (\cos \varphi; \sin \varphi)$ je

$$D_{\vec{u}}f(x; y) = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \cos \varphi + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \sin \varphi$$

Př10: Nalezněte derivaci ve směru určeném úhlem $\varphi = \frac{\pi}{6}$, je-li $f(x; y) = x^3 - 3xy + 4y^2$ v bodě $A[1; 2]$

Př11: Nalezněte derivaci funkce $f(x; y) = x^2y^3 - 4y$ v daném směru vektoru $\vec{v} = (2; 5)$ v bodě $A[2; -1]$

Extrémy funkce více proměnných



V okolí bodu $[a; b]$ nastane:

$$\text{Lokální maximum} \Leftrightarrow f(x; y) \leq f(a; b)$$

$$\text{Lokální minimum} \Leftrightarrow f(x; y) \geq f(a; b)$$

$$\forall [x; y] \begin{cases} \text{Absolutní maximum} \Leftrightarrow f(x; y) \leq f(a; b) \\ \text{Absolutní minimum} \Leftrightarrow f(x; y) \geq f(a; b) \end{cases}$$



Sedlový bod – tečná rovina protíná graf funkce v bodě $[a; b]$

Vyšetřování extrémů pro $y = f(x; y)$

1. Řešíme soustavu $\nabla f(x; y) = \vec{0}$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0 \wedge \frac{\partial f}{\partial y} = 0 \quad \text{nalezneme stacionární body}$$

2. Pro každý stacionární bod $[a; b]$ nalezneme matici

$$D(a; b) = \begin{vmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

3. A) Pokud $D(a; b) < 0$, potom $[a; b]$ je sedlový bod

B) pokud $D(a; b) > 0$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a; b) > 0$ potom $[a; b]$ je lokální minimum

C) pokud $D(a; b) > 0$ a $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a; b) < 0$ potom $[a; b]$ je lokální maximum

D) pokud $D(a; b) = 0$ nelze o extrému rozhodnout (existují pokročilejší metody)

Př11: Nalezněte extrémy funkce $f(x; y) = x^4 + y^4 - 4xy - 1$

Riemannův vícerozměrný integrál

Kompaktní interval v R^n

Kartézský součin jednorozměrných uzavřených intervalů

$$I = \langle a_1; b_1 \rangle \times \langle a_2; b_2 \rangle \times \cdots \times \langle a_n; b_n \rangle$$

V R^2 obdélník

V R^3 kvádr

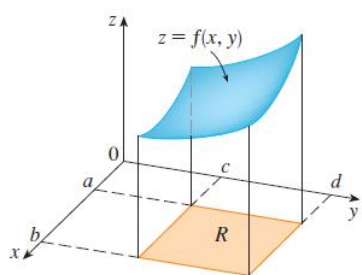
Míra kompaktního intervalu je číslo $m(I) = |(b_1 - a_1)(b_2 - a_2) \cdots (b_n - a_n)|$

Př12: Graficky znázorněte a vypočtěte míru kompaktních intervalů:

a) $I = \langle 1; 3 \rangle \times \langle 0; 2 \rangle$

b) $I = \langle 1; 2 \rangle \times \langle 1; 3 \rangle \times \langle 0; 2 \rangle$

Objem a dvojný integrál



$$R = \langle a; b \rangle \times \langle c; d \rangle = \{[x; y] \in R^2; a \leq x \leq b \wedge c \leq y \leq d\}$$

$$V = \{[x; y; z] \in R^3; 0 \leq z \leq f(x; y); [x; y] \in R^2\}$$

$$V = \iint_R f(x; y) dx dy$$

Vlastnosti dvojného integrálu:

1) $\iint_R [cf(x; y) + dg(x; y)] dx dy = c \iint_R f(x; y) dx dy + d \iint_R g(x; y) dx dy$

aditivita a linearita

2) Když $f(x; y) \geq g(x; y) \quad \forall [x; y] \in R \Rightarrow \iint_R f(x; y) dx dy \geq \iint_R g(x; y) dx dy$

monotonie

Dvojný a dvojnásobný integrál



Guido Fubini (1879-1943)

Pokud je funkce $f(x; y)$ spojitá na kompaktním intervalu $I = \langle a; b \rangle \times \langle c; d \rangle$

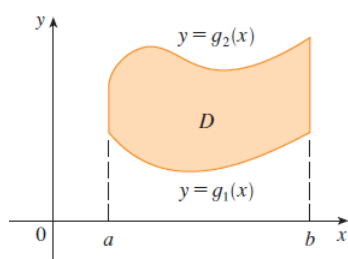
Dvojný Integrál na $I = \langle a; b \rangle \times \langle c; d \rangle$	Dvojnásobný Integrál	
$\iint_I f(x; y) dx dy$	$\int_a^b \left[\int_c^d f(x; y) dy \right] dx$	Dvojnásobný Integrál vzhledem k y a x
	$\int_c^d \left[\int_a^b f(x; y) dx \right] dy$	Dvojnásobný Integrál vzhledem k x a y

Př13: Vypočtěte dvojný integrál $\iint_I (x - 3y^2) dx dy$, pokud $I = \langle 0; 2 \rangle \times \langle 1; 2 \rangle$

a) Nejdříve y :

b) Nejdříve x :

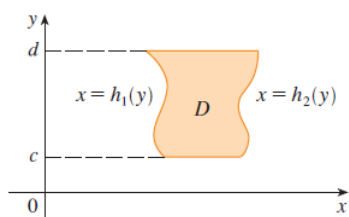
Elementární oblast vzhledem k x



$$D = \{[x; y] \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b \wedge g_1(x) \leq y \leq g_2(x)\}$$

$$\iint_D f(x; y) dx dy = \int_a^b \left[\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x; y) dy \right] dx$$

Elementární oblast vzhledem k y



$$A = \{[x; y] \in \mathbb{R}^2; c \leq y \leq d \wedge h_1(y) \leq x \leq h_2(y)\}$$

$$\iint_A f(x; y) dx dy = \int_c^d \left[\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x; y) dx \right] dy$$

Př14: Vypočtěte $\iint_D (x + 2y) dx dy$, pokud D je oblast ohraničená křivkami $y = 2x^2$ a $y = 1 + x^2$

Př15: Vypočtěte $\iint_D (x^2 + y) dx dy$, pokud D je oblast ohraničená křivkami $y = x^2$ a $y = 2x$

a) Oblast vzhledem k x

b) Oblast vzhledem k y