

XAMAT, YAMAT

Přednáška 8

Diferenciální rovnice 1. řádu

(počáteční problém, metoda separace proměnných, metoda variace konstanty, modely růstu a klesání, logistický model)

Diferenciální rovnice (DR)

DR jsou rovnice obsahující neznámou funkci $y = f(x)$ a její derivace.

- Př1: a) $y' = 5x + 3$ DR prvního řádu
b) $e^y y'' + 2(y') = 1$ DR druhého řádu
c) $e^y y''' + 2 \sin x (y'') + 5xy = 0$ DR třetího řádu
d) $e^y (y'')^4 + 2 \sin x (y')^7 + 5xy = 0$ DR druhého řádu
e) $\frac{\partial f}{\partial x} - 4 \frac{\partial f}{\partial y} = 0$ parciální DR prvního řádu

Označení:

$y; y'; y''; \dots; y^{(4)}; y^{(n)}$ funkce $y = f(x)$ a její derivace, nezávislá proměnná je obecně x

$$y' = \frac{dy}{dx}$$

Technici používají časovou derivaci $\dot{y} = \frac{dy}{dt}$

Definice:

Obyčejná diferenciální rovnice n -tého řádu je rovnice tvaru:

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = 0.$$

Obyčejná diferenciální rovnice prvního řádu je rovnice tvaru:

$$F(x, y, y') = 0.$$

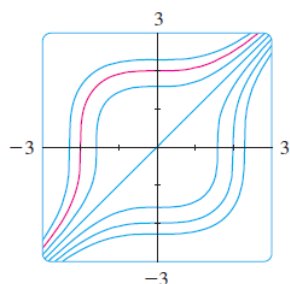
Řešení DR je taková funkce $y = f(x)$, která vyhovuje DR, tedy splňuje $F(x, y, y') = 0$.

Př2: Ověřte, zda funkce $y_1 = \sin x$, $y_2 = \sin x + 5$ a $y_3 = \sin x + c$, kde c je libovolná reálná konstanta vyhovuje DR $y' - \cos x = 0$.

Závěr:

fce $y = \sin x + c$ je **obecné řešení** DR $y' - \cos x = 0$

fce $y = \sin x + 5$ je **partikulární řešení** DR $y' - \cos x = 0$ splňující počáteční podmínky $y(0) = 5$.



Obecné řešení = množina funkcí

Partikulární řešení = konkrétní řešení

Počáteční problém pro ODR prvního řádu je DR se zadanými počátečními podmínkami

Př: $y' - \cos x = 0$; $y(0) = 5$

Metody řešení ODR 1.-řádu

Souvisejí s tím, jaký má DR tvar:

Separace proměnných

DR prvního řádu řešitelná metodou separace proměnných je rovnice tvaru $y' = f(x) \cdot g(y)$ ve všech možných modifikacích.

Algoritmus řešení metodou separace proměnných:

$$\frac{dy}{dx} = f(x) \cdot g(y)$$

$$\frac{dy}{g(y)} = f(x) \cdot dx$$

$$\int \frac{dy}{g(y)} = \int f(x) \cdot dx$$

$$G(y) = F(x) + c \Rightarrow y = G^{-1}(F(x) + c)$$

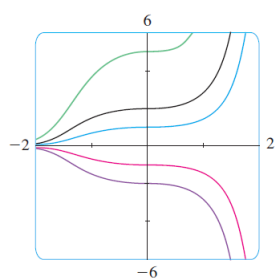
Př3: řešte počáteční problém pro DR $y' = \frac{x^2}{y^2}$, víte-li, že $y(0) = 2$

Př4:

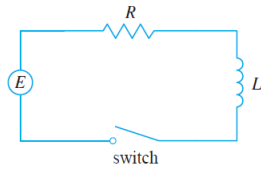
a) řešte DR: $y' = \frac{6x^2}{2y + \cos y}$

Př5:

řešte DR: $y' = x^2 y$



Př6:



Protékající proud elektrickým obvodem modelujeme DR: $L \frac{dI}{dt} + RI = U(t)$.
Nalezněte vyjádření proudu v závislosti na čase, je-li dáno: $R = 12\Omega$,
 $L = 4H$ a baterie dává konstantní napětí $U = 60V$ (na obrázku označeno
písmenem E). Přepínač sepne v čase $t = 0$. Jaká je maximální hodnota

proudu?

Lineární diferenciální rovnice prvního řádu (LDR1Ř)

Tvar: $y' + P(x) \cdot y = Q(x)$, kde $P(x)$ a $Q(x)$ jsou spojité funkce.

Je-li $Q(x) = 0$, nazýváme takovou rovnici homogenní.

Př7: $xy' + y = 2x$ je LDR1Ř, protože pro $x \neq 0$ ji můžeme přepsat do tvaru: $y' + y \cdot \frac{1}{x} = 2$. Není separovatelná, protože nelze na jedné straně osamostatnit y a na druhé x .

Řešení:

Existují různé metody (odhady, integrační faktor, ...), my si ukážeme **metodu variace konstanty**

Dvě fáze:

1. položíme $Q(x) = 0$, vznikne separovatelná DR, určíme OŘ
2. Konstantu z OŘ v 1 nahradíme neznámou funkcí: $C \rightarrow C(x)$, pak dosadíme do zadání a vypočteme neznámou funkci $C(x)$ a určíme OŘ původní DR

Př8: řešte DR: $y' + y \cdot \cos x = e^{-\sin x}$

Př9: řešte počáteční problém pro DR: $y' + 2xy = xe^{-x^2}$, $y(0) = 2$.

Př9: řešte počáteční problém pro DR: $x^2 y' + xy = 1$, $y(1) = 2$.

Užití DR - Modely

Model přírodního růstu (klesání) populace:

Předpoklad: ideální podmínky (nekonečný prostor, výživa, bez predátorů, imunita proti nákazám)

Proměnné:

t ... čas (nezávislá proměnná), P ... počet individualit v prostředí (závislá proměnná na čase)

Míra růstu populace je $\frac{dP}{dt}$. Derivace v čase je přímo úměrná počtu individualit v prostředí P .

P_0 ... počáteční stav populace, $P(0) = P_0$. Růst nebo pokles je definován konstantou k .

Řešíme počáteční problém pro DR: $\frac{dP}{dt} = k \cdot P$

Řešení:

OŘ: $P = A \cdot e^{kt}$

PŘ: $P = P_0 \cdot e^{kt}$

Důsledek: pokud do modelu započítáme i emigraci, pomocí konstanty e , vznikne DR: $\frac{dP}{dt} = k \cdot P - e$

Logistický model:

Reaguje na velikost prostředí a omezené zdroje

Start $\rightarrow$ exponenciální růst $\rightarrow$ kritická kapacita M

Předpoklady:

Když P je malé $\rightarrow$ míra růstu je přímo úměrná P

Když $P > M \rightarrow \frac{dP}{dt} < 0$

$$DR \rightarrow \frac{dP}{dt} = kP\left(1 - \frac{P}{M}\right)$$

Řešení:

Řešení LM je: $P(t) = \frac{M}{1+B \cdot e^{-kt}}$, kde $B = \frac{M-P_0}{P_0}$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M}{1 + \frac{M-P_0}{P_0} e^{-kt}} = M.$$

Další modely růstu:

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{M}\right) - c, \quad \text{kde } c \text{ vyjadřuje pravidelný úbytek populace}$$

$$\frac{dP}{dt} = kP \left(1 - \frac{P}{M}\right) \left(1 - \frac{m}{P}\right),$$

kde m vyjadřuje minimální hodnotu jedinců, kdy uvažované druhy vymírají

Př10: Řešení logistického modelu je $P(t) = \frac{M}{1+B \cdot e^{-kt}}$, kde $B = \frac{M-P_0}{P_0}$, $\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{M}{1+\frac{M-P_0}{P_0} \cdot e^{-kt}} = M$.

- a) Uvažujte: $k = 0,08$; $M = 1000$; $P(0) = 100$. Určete: $P(40)$; $P(80)$, v jakém čase bude $P(t) = 900$.
- b) Načrtněte sigmoidální logistickou křivku pro $0 < t < 80$.