

XAMAT, YAMAT

Přednáška 7

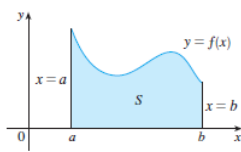
Určitý integrál funkcí jedné reálné proměnné a jeho použití

(metody výpočtu určitých integrálů, plocha pod grafem funkce)



Georg Friedrich Bernhard Riemann (1826-1866)

Problém: obsah plochy pod grafem funkce



$$S = \{[x; y] \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Dělení intervalu $\langle a; b \rangle$ na n dílků

Dolní a horní součty a výpočet limity pro $n \rightarrow \infty$

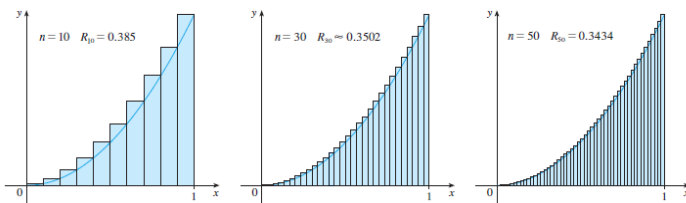


FIGURE 8 Right endpoints produce upper sums because $f(x) = x^2$ is increasing

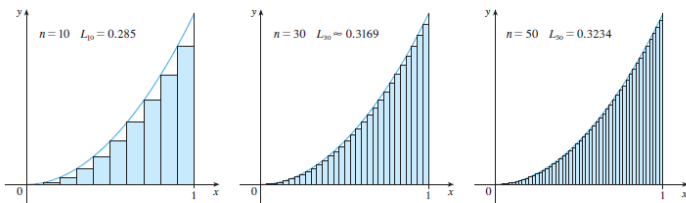
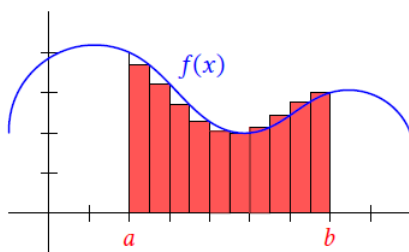


FIGURE 9 Left endpoints produce lower sums because $f(x) = x^2$ is increasing



$$S = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \sum_a^b f(x) \cdot dx \quad \rightarrow \quad S = \int_a^b f(x) dx$$

Riemannův určitý integrál

Zapisujeme $S = \int_a^b f(x) dx$

Funkce $f(x)$ je na intervalu $\langle a; b \rangle$ integrovatelná.

Číslo a je dolní mez, číslo b je horní mez.

Newtonův integrál (výpočet určitého integrálu)

Nechť je funkce $f(x)$ spojitá na otevřeném intervalu I a necht' $a, b \in I$. Dále $F(x)$ je primitivní funkce k funkci $f(x)$. Pak výraz $F(b) - F(a)$ nazveme Newtonovým integrálem funkce $f(x)$ od a do b , což zapíšeme

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a).$$

Má-li funkce $f(x)$ Newtonův i Riemannův integrál od a do b , pak jsou si tyto integrály rovny.

Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu I , pak má na intervalu I primitivní funkci.

Výpočet určitého integrálu

Přímá integrace dle Newtona

$$\int_a^b f(x)dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$$

Př:

$$\text{a) } \int_1^2 \frac{1}{x} dx =$$

$$\text{b) } \int_1^2 e^x dx =$$

Per partes integrace

Jsou-li funkce $u'(x)$ a $v(x)$ spojitě na $\langle a; b \rangle$, pak

$$\int_a^b u'(x) \cdot v(x) dx = [u(x) \cdot v(x)]_a^b - \int_a^b u(x) \cdot v'(x) dx$$

Př:

$$\text{a) } \int_0^{\frac{\pi}{2}} x \sin x dx =$$

$$\text{b) } \int_0^1 \arctg x dx =$$

Substituce v určitém integrálu

Nechť $F(t)$ je primitivní funkce ke spojitě funkci $f(t)$ na intervalu J a $g(x)$ je spojitá funkce na I , který obsahuje a a b a pro všechna $x \in \langle a; b \rangle$ patří intervalu $g(x)$ do J . Pak je

$$\int_a^b f(g(x)) \cdot g'(x) dx = \int_{g(a)}^{g(b)} f(t) dt$$

Př:

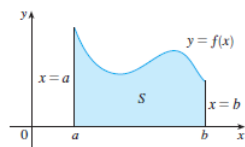
a) $\int_1^e e^{-2x} dx$

b) $\int_1^e \frac{\ln^3 x}{x} dx =$

c) $\int_{-\frac{3\pi}{4}}^{\frac{3\pi}{4}} \sin^3 x \cdot \cos x dx =$

Aplikace určitého integrálu

Plocha pod grafem funkce



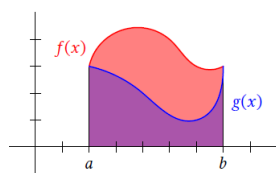
$$S = \int_a^b f(x) dx$$

Př: Určete plochu pod grafem funkce

a) $y = \sin x$ v intervalu od 0 do π

b) $y = \cos^2 x$ v intervalu od 0 do $\frac{\pi}{4}$

Plocha ohraničená grafy funkcí $f(x)$ a $g(x)$



$$S = \int_a^b f(x) dx - \int_a^b g(x) dx$$

Př: Určete plochu ohraničenou grafy funkcí

a) $y = x^2$ a $y = \frac{2}{1+x^2}$

b) $y = e^{-x}$, $y = 1$ a $x = 1$

c) Mezní náklady na dopravu materiálu jsou aproximovány kvadratickou funkcí

$$C(x) = 3 - 0,004x + 0,000003x^2$$

v € za kilometr. Vypočtete, o kolik se zvednou náklady, pokud se vzdálenost navýší z 2000 km na 4000 km.

Existuje spousta dalších aplikací (těžiště, délka křivky, objem rotačního tělesa ...)