

XAMAT, YAMAT

Přednáška 6

Neurčitý integrál funkcí jedné reálné proměnné

(primitivní funkce a neurčitý integrál, metody integrace – přímá, substituční a per partes)

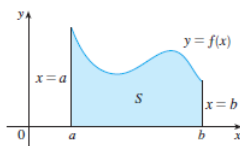


Sir Isaac Newton (1642-1727)



Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Problém: obsah plochy pod grafem funkce



$$S = \{[x; y] \in \mathbb{R}^2; a \leq x \leq b, 0 \leq y \leq f(x)\}$$

Dělení intervalu $\langle a; b \rangle$ na n dílků

Dolní a horní součty a výpočet limity pro $n \rightarrow \infty$

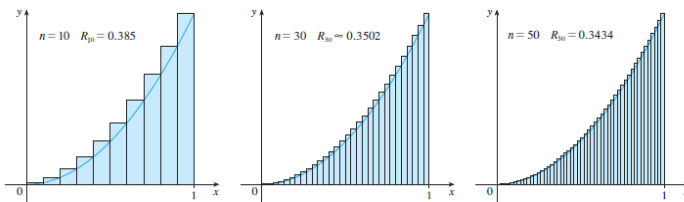


FIGURE 8 Right endpoints produce upper sums because $f(x) = x^2$ is increasing

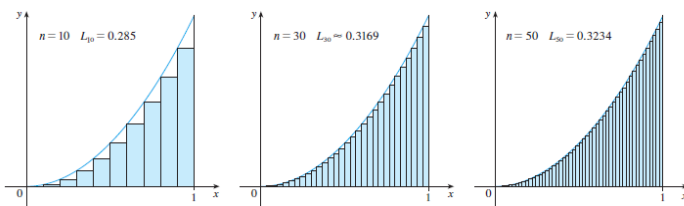


FIGURE 9 Left endpoints produce lower sums because $f(x) = x^2$ is increasing

Primitivní funkce

Řekneme, že funkce F je primitivní funkcí k funkci f na intervalu I , pokud pro všechna $x \in I$ platí:

$$F'(x) = f(x)$$

Je-li funkce $f(x)$ spojitá na intervalu I , pak k ní existuje primitivní funkce $F(x)$.

Každá elementární funkce má svoji primitivní funkci na celém svém definičním oboru.

Primitivní funkce a její výpočet

Je-li funkce $F(x)$ primitivní funkcí k funkci $f(x)$ na intervalu I , pak je funkce $F + k$ také primitivní funkcí k funkci $f(x)$, $\forall k \in \mathbb{R}$.

Pokud $F' = f$, pak $(F + k)' = F' + k' = f$

Jsou-li $F(x)$ a $G(x)$ dvě primitivní funkce k funkci $f(x)$ na intervalu I , pak $F - G = k$, pro nějaké $k \in \mathbb{R}$

Pokud $F' = f$ a $G' = f$ pak $(F - G)' = F' - G' = f - f = 0 \rightarrow F - G$ je konstantní na I

Neurčitý integrál

Množinu všech primitivních funkcí k funkci $f(x)$ značíme $\int f(x)dx$ a nazýváme ji neurčitý integrál funkce $f(x)$.

Vlastnost, že je funkce $F(x)$ primitivní funkcí k funkci $f(x)$, značíme:

$$\int f(x)dx = F(x) + c, \text{ kde } c \in \mathbb{R} \text{ je libovolná konstanta.}$$

Procesu hledání primitivní funkce říkáme integrace.

Základní integrační vzorce

$$\int 0 dx = c, \quad \int dx = \int 1 dx = x + c, \quad \int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + c; \alpha \neq -1$$

$$\int \sin x dx = -\cos x + c, \quad \int \cos x dx = \sin x + c, \quad \int e^x dx = e^x + c$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + c, \quad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + c, \quad \int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + c$$

$$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctg x + c, \quad \int -\frac{dx}{1+x^2} = \operatorname{arccotg} x + c, \quad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + c$$

$$\int -\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arccos x + c, \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + c$$

Př: $\ln|x|$

Př: $\int x^2 dx$

Neelementární primitivní funkce

Sice existují, ale neumíme je (zatím) spočítat 😊

$$\int e^{-x^2} dx; \quad \int x^x dx; \quad \int \frac{1}{\ln x} dx; \quad \int \frac{\sin x}{x} dx;$$

Integrace součtu a rozdílu - aditivita

$$\int (k \cdot f(x) \pm l \cdot g(x)) dx = k \int f(x) \pm l \int g(x)$$

Př: Přímá integrace

a) $\int \frac{x^3 + 2\sqrt{x} - 3}{x} dx =$

$$\text{b) } \int \frac{x(x-1)^2}{x^2+1} dx =$$

$$\text{c) } \int \operatorname{tg}^2 x \, dx =$$

$$\text{d) } \int \frac{\cos 2x}{\sin x - \cos x} dx =$$

$$\text{e) } \int \sqrt{x\sqrt{x\sqrt{x}}} \, dx$$

Integrace metodou substituce

Nechť funkce $f(t)$ má na Intervalu I_1 primitivní funkci $F(t)$. Nechť $t = \varphi(x)$ má derivaci $\varphi'(x)$ v intervalu I_2 a nechť $\forall x \in I_2$ patří odpovídající hodnota $t = \varphi(x)$ do I_1 . Pak platí:

$$\int f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x) dx = F(\varphi(x)) + c$$

Př:

$$\int f(g(x)) \cdot g'(x) dx =$$

Př: Substituční metoda

a) $\int \sin^5 x \cos x \, dx =$

b) $\int \frac{\sqrt[3]{\ln^2 x}}{x} \, dx =$

c) $\int x e^{-x^2} \, dx =$

Lineární substituce

Je-li $F(x)$ primitivní funkcí k funkci $f(x)$, pak $\int f(ax + b) \, dx = \frac{1}{a} F(ax + b) + c$

Př: Substituční metoda

d) $\int e^{5x} \, dx =$

e) $\int \sin\left(2 - \frac{x}{3}\right) \, dx =$

f) $\int \frac{1}{\cos^2(3x+5)} \, dx =$

Substituce za jmenovatele

U zlomku typu $\frac{f'(x)}{f(x)}$ volíme substituci $t = f(x)$

Pak: $\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \left| \begin{array}{l} t = f(x) \\ dt = f'(x) dx \end{array} \right| = \int \frac{dt}{t} = \ln|t| + c = \ln|f(x)| + c$

Př:

g) $\int \frac{x}{x^2+1} dx =$

h) $\int \operatorname{tg} x dx =$

Metoda Per Partes

Př: derivace součinu funkcí:

Pro funkce $u(x)$ a $v(x)$ platí:

$$\int u'(x) \cdot v(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u(x) \cdot v'(x) dx$$

$$\int u(x) \cdot v'(x) dx = u(x) \cdot v(x) - \int u'(x) \cdot v(x) dx$$

Př:

a) $\int x \cos x dx =$

b) $\int x^2 e^x dx =$

c) $\int \ln(x + 1) dx =$

d) $\int e^x \sin x dx =$