

XAMAT, YAMAT

Přednáška 5

Průběh funkce

(monotonie funkce, stacionární body funkce, lokální a absolutní extrémy funkce, inflexní body funkce, konvexita a konkavita funkce, asymptoty grafu funkce, optimalizační úlohy)

Vyšetřování průběhu funkce obnáší určení:

Zda je funkce sudá, lichá a periodická

Definičního oboru

Nalezení průsečíků se souřadnicovými osami

Limity v krajních bodech definičního oboru

Asymptoty grafu funkce

Kritické body první derivace

Intervaly monotonie

Lokální extrémy a jejich funkční hodnoty

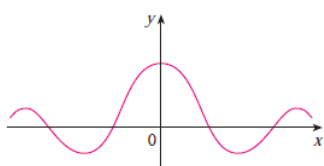
Kritické body druhé derivace

Intervaly konvexnosti a konkávnosti

Inflexní body a jejich funkční hodnoty

Graf funkce

Funkce sudá, lichá a periodická

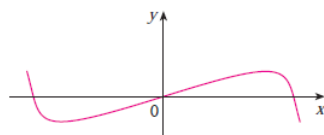


(a) Even function: reflectional symmetry

Sudá funkce: platí $\forall x \in D(f): f(-x) = f(x)$

Symetrie podle osy y

Př: $y = \cos x$; $y = x^2$; $y = |x|$

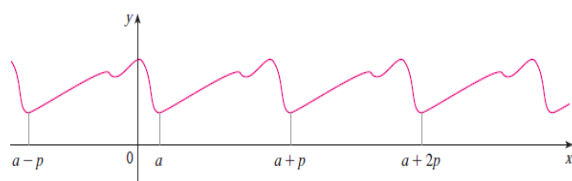


(b) Odd function: rotational symmetry

Lichá funkce: platí $\forall x \in D(f): f(-x) = -f(x)$

Symetrie podle počátku soustavy souřadné

Př: $y = \sin x$; $y = x^3$; $y = x$



Periodická funkce:

platí $\forall x \in D(f): f(x+p) = f(x)$

p se nazývá perioda, nejmenší ze všech možných

Př: $y = \sin x$, $y = \cos x$, $p = 2\pi$

Př:

a) $y = \frac{2x}{1-x^2}$

b) $y = x^2 + 3$

c) $y = \frac{x^2}{\cos x}$

Nalezení průsečíků se souřadnicovými osami

Př: $y = \frac{2x-3}{1-5x}$

Limity v krajních bodech definičního oboru

Př: $y = \arctg \frac{1-x\sqrt{3}}{x-\sqrt{3}} - \frac{\pi}{4}$

Asymptoty grafu funkce

Horizontální asymptoty

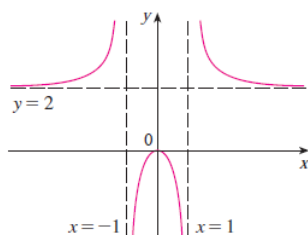
$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L \rightarrow y = L$$

Vertikální asymptoty

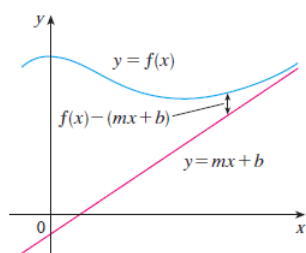
$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \infty; \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \infty; \rightarrow x = a$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty; \lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty; \rightarrow x = a$$

Př: $y = \frac{2x^2}{x^2-1}$



Asymptoty se směrnicí



Křivka $y = f(x)$ má asymptotu se směrnicí, když platí:

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} [f(x) - (mx + b)] = 0$$

Přímka $y = mx + b$ se nazývá asymptotou grafu funkce $y = f(x)$

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{f(x)}{x} \text{ a } b = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} (f(x) - mx)$$

Př: $y = \frac{x^3}{x^2+1}$

Kritické body první derivace

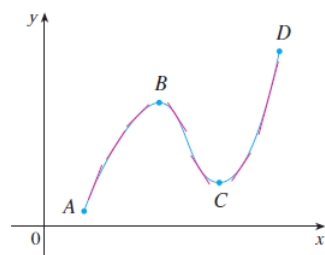
$y = f(x)$ je spojitá funkce

Derivujeme $y' = f'(x)$,

v bodě a , kde je $f'(a) = 0$ nebo derivace neexistuje nalezneme tzv. **stacionární body** (body podezřelé z extrému)

Př: $y = x^3 - x^2 + 1$

Intervaly monotonie



Mezi body A a B a C a D má tečna kladnou směrnici $\rightarrow f'(x) > 0$

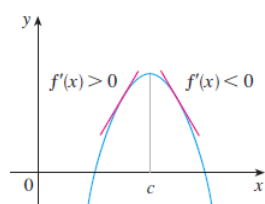
Mezi body B a C má tečna zápornou směrnici $\rightarrow f'(x) < 0$

Když je $f'(x) > 0$ na nějakém intervalu, je funkce $f(x)$ na tomto intervalu **rostoucí**

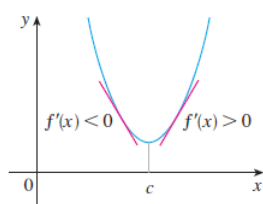
Když je $f'(x) < 0$ na nějakém intervalu, je funkce $f(x)$ na tomto intervalu **klesající**

Př: Určete maximální intervaly monotonie funkce $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$.

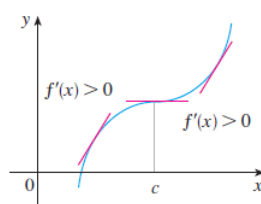
Lokální extrémy a jejich funkční hodnoty



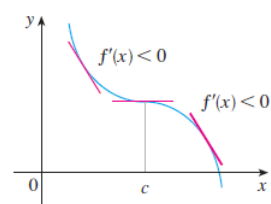
(a) Local maximum



(b) Local minimum



(c) No maximum or minimum



(d) No maximum or minimum

Test první derivace:

Předpokládejme, že c je stacionární bod spojitě funkce $f(x)$.

Pokud se znaménko $f'(x)$ v tomto bodě mění z kladného na záporné, pak má $f(x)$ v bodě c lokální **maximum** obr. (a)

Pokud se znaménko $f'(x)$ v tomto bodě mění ze záporného na kladné, pak má $f(x)$ v bodě c lokální **minimum** obr. (a)

Pokud se znaménko $f'(x)$ v tomto bodě nemění, extrém nenastává obr. (c,d)

Př: Nalezněte extrémy funkce $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$

Př: Nalezněte extrémy funkce $y = x + 2 \sin x$ pro $0 \leq x \leq 2\pi$

Test na minimum a maximum pomocí druhé derivace:

Předpokládejme, že $f''(x)$ je spojitá v okolí bodu c .

Když $f'(c) = 0$ a $f''(c) > 0$, pak má funkce $f(x)$ v bodě c lokální minimum

Když $f'(c) = 0$ a $f''(c) < 0$, pak má funkce $f(x)$ v bodě c lokální maximum

Př: Nalezněte extrémy funkce $y = 3x^4 - 4x^3 - 12x^2 + 5$

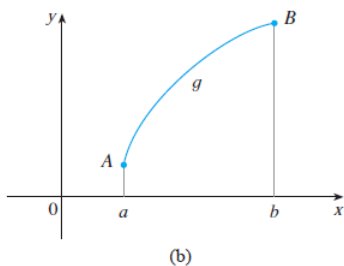
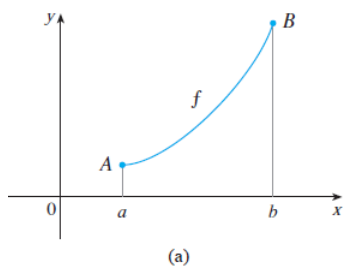
Kritické body druhé derivace

$y = f(x)$ je spojitá funkce

Derivujeme $y' = f'(x) \rightarrow y'' = f''(x)$

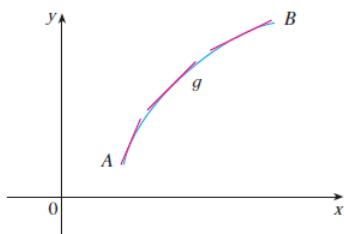
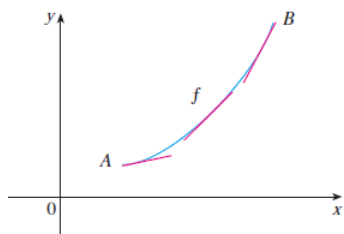
v bodě a , kde je $f''(a) = 0$ nebo druhá derivace neexistuje nalezneme tzv. **inflexní body**

Intervaly konvexnosti a konkávnosti



Pokud graf funkce $y = f(x)$ leží nad tečnou (obr. a, c) na intervalu $\langle a; b \rangle$, pak je funkce na tomto intervalu **konvexní** a platí $f''(x) > 0$

Pokud graf funkce $y = f(x)$ leží pod tečnou (obr. b, d) na intervalu $\langle a; b \rangle$, pak je funkce na tomto intervalu **konkávní** a platí $f''(x) < 0$



Př: Nalezněte maximální intervaly konvexity a konkavity funkce $y = x^4 - 4x^3$