

XAMAT, YAMAT

Přednáška 4

Diferenciální počet funkcí jedné reálné proměnné

Derivace ve fyzice



Isaac Newton (1643-1727)

Průměrná rychlost: $v = \frac{s}{t}$

vs

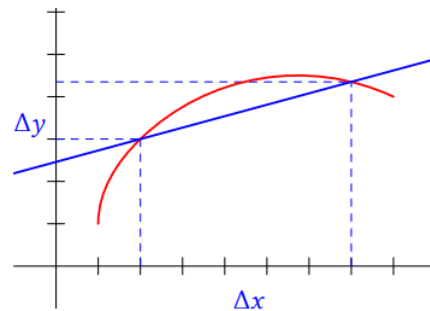
Okamžitá rychlost: $v = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta s}{\Delta t}$

Derivace v geometrii



Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716)

Směrnice tečny: $k = \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}$



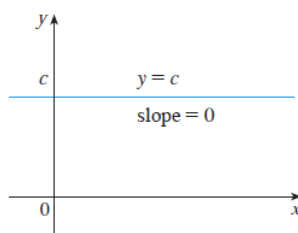
Definice:

Buď f reálná funkce spojitá v bodě a . **Derivace** funkce f v bodě a , značená $f'(a)$, je definována jako

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(a + \Delta x) - f(a)}{\Delta x}.$$

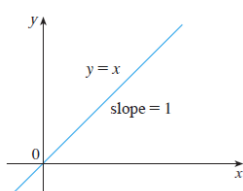
Buď f reálná spojitá funkce. Derivace funkce $f(x)$ je reálná funkce $f'(x)$, neboli funkce, která každému bodu přiřadí derivaci v příslušném bodě (je-li definována).

První vzorce pro derivování:



$(c)' = 0$, c je konstanta

$(ku \pm lv)' = ku' \pm lv'$, k, l jsou konstanty, u, v jsou funkce



$(x^n)' = nx^{n-1}$, n je konstanta

Př: $y = x^3$ $y' =$

$$(\sin x)' = \cos x, \quad (\cos x)' = -\sin x, \quad (\operatorname{tg} x)' = \frac{1}{\cos^2 x}, \quad (\operatorname{cotg} x)' = -\frac{1}{\sin^2 x}$$

Derivace x^2 dle definice:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

Př:

$$\text{a) } (x)' =$$

$$\text{b) } (\sqrt{x})' =$$

$$\text{c) } \left(\frac{1}{x}\right)' =$$

Druhé vzorce pro derivování:

$$(e^x)' = e^x, \quad (a^x)' = a^x \ln a, \quad (\ln x)' = \frac{1}{x}, \quad (\log_z x)' = \frac{1}{x \ln z}$$

$$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\arccos x)' = -\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}, \quad (\operatorname{arctg} x)' = \frac{1}{1+x^2}, \quad (\operatorname{arccotg} x)' = -\frac{1}{1+x^2}$$

Derivace $\ln x$ dle definice:

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} =$$

Derivace součinu a podílu funkcí

Jsou dány dvě spojité funkce $f(x)$ a $g(x)$. Pak platí:

$$(f(x) \cdot g(x))' = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

$$\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)' = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{g(x)^2}$$

Př:

$$\text{a) } y = (5x^2 + 1)(3x^4 - 2x^2) \quad y' =$$

$$\text{b) } y = \frac{1+\sqrt{x}}{1-\sqrt{x}} \quad y' =$$

Derivace složených funkcí

Jsou dány dvě spojité funkce $f(x)$ a $g(x)$. Pak platí:

$$f(g(x))' = f'(g(x)) \cdot g'(x)$$

Jiný zápis:

$$y = f(u), u = g(x) \rightarrow \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{du} \frac{du}{dx} \text{ kresli schéma:}$$

Př:

$$\text{a) } y = (x^3 - 1)^{100} \quad y' =$$

$$\text{b) } y = \sin(7x^2 - 5x + 3) \quad y' =$$

$$\text{c) } y = \ln \frac{1+2\sin 2x}{1-2\sin 2x} \quad y' =$$

$$\text{d) } y = \sin x \cdot e^{-x^2+2x-1} \quad y' =$$

Derivace vyšších řádů

Druhou derivací funkce f , značíme $f''(x)$, dostaneme, když zderivujeme derivaci funkce f ještě jednou, neboli $f''(x) = (f'(x))'$.

n – tá derivace funkce f , značíme $f^{(n)}(x)$, dostaneme, když postupně zderivujeme n – krát funkci f , neboli $f^{(n)}(x) = (f^{(n-1)}(x))'$.

Př:

$$y = x \cdot e^x$$

$$y' =$$

$$y'' =$$

$$y''' =$$

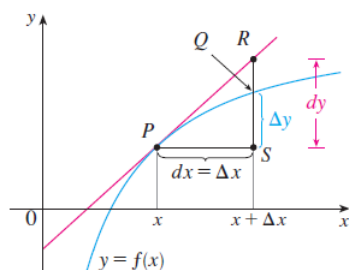
⋮

$$y^{(n)} =$$

Diferenciál

Pokud je funkce $y = f(x)$ spojitá, diferenciál funkce y dy je definován rovnicí $dy = f'(x) \cdot dx$.

$$y' = f'(x) = \frac{dy}{dx} \rightarrow dy = f'(x) \cdot dx$$



Geometrický význam

Přírůstek funkce $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x)$

Diferenciál funkce dy

Pro malé Δx platí, že $\Delta y \doteq dy$

Porovnáme hodnoty Δy a dy , když $y = f(x) = x^3 + x^2 - 2x + 1$ a x se změní

a) z 2 na 2,05

b) z 2 na 2,01

vypočítáme: $f(2) =$

$f(2,05) =$

a) $\Delta y = f(2,05) - f(2) =$

$f(2,01) =$

b) $\Delta y = f(2,01) - f(2) =$

$$dy = f'(x) \cdot dx = (3x^2 + 2x - 2)dx$$

a) pro $x = 2$ a $dx = \Delta x = 0,05$ $dy =$

b) pro $x = 2$ a $dx = \Delta x = 0,01$ $dy =$

Závěr: $f(a + dx) \doteq f(a) + dy$

Př: Poloměr koule $r = 21 \text{ cm}$ byl změřen s chybou $0,05 \text{ cm}$. Jaká je maximální chyba při použití této hodnoty při výpočtu objemu této koule.

L'Hospitalovo pravidlo při výpočtu limit funkcí



markýz Guillaume François Antoine de l'Hôpital
1661–1704

Jsou dány dvě funkce splňující buďto $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0$ nebo $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} g(x) = \pm\infty$.

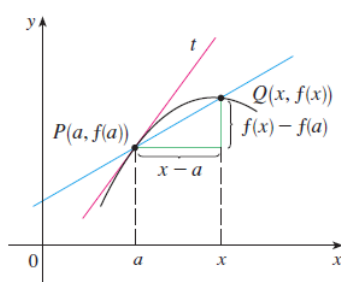
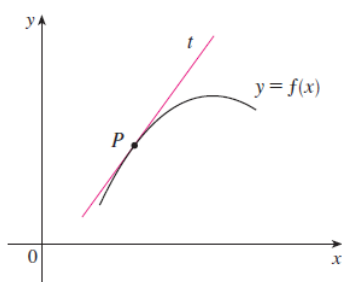
Pak platí $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \dots$, za předpokladu, že druhá limita existuje.

Př:

a) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(5x+1)}{2 - \sqrt{4+8\sin(9x)}} =$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln(x^2 - 20x + 2)}{\ln(x^{10} + 2x + 3)} =$

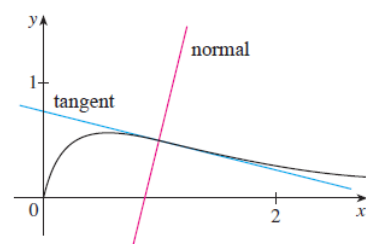
Tečny a normály ke grafu funkce



Přímka t je tečnou ke křivce $y = f(x)$ v bodě dotyku P , pokud $P \in t$ a $P \in f$

tečna je nejpřesnější lineární aproximací křivky f v bodě P .

Má-li přímka rovnici $y = kx + q$, kde k, q jsou reálná čísla, pak koeficient k nazveme směrnici dané přímky



Nechť $f(x)$ je funkce, která má derivaci v bodě a .

Tečna grafu funkce f v bodě a je přímka, procházející bodem $[a; f(a)]$, která má směrnici $f'(a)$.

Normála grafu funkce f v bodě a je přímka, procházející bodem $[a; f(a)]$, která je kolmá k tečně v tomto bodě.

Směrnice normály: je-li $k \neq 0$ směrnice tečny, pak $-\frac{1}{k}$ je směrnice

příslušné normály.

Směrový vektor tečny je $(1; k)$. Kolmý vektor musí být $(k; -1)$, protože $(1; k) \cdot (k; -1) = 0$. když kolmý vektor vydělíme k , dostaneme vektor $\left(1; -\frac{1}{k}\right)$.

Rovnice přímek

Rovnice tečny se směrnicí k , procházející bodem $T[x_T; y_T]$ je $y - y_T = k(x - x_T)$

Rovnice normály se směrnicí $-\frac{1}{k}$, procházející bodem $T[x_T; y_T]$ je $y - y_T = -\frac{1}{k}(x - x_T)$

Tečna v dotykovém bodě

Př: Nalezněte rovnice tečny a normály ke křivce $y = \sin 2x$ v dotykovém bodě $T\left[\frac{\pi}{8}; y_T\right]$

Tečna ke křivce procházející bodem

Př: Nalezněte rovnice tečny ke křivce $y = \frac{x+9}{x+5}$ procházející bodem $A[0; 0]$.

Tečna ke křivce rovnoběžná s danou přímkou

Př: Nalezněte rovnice tečny ke křivce $y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 4x + 2$ rovnoběžné s přímkou $p: y = -x - 3$.