

Limita a spojitost funkce

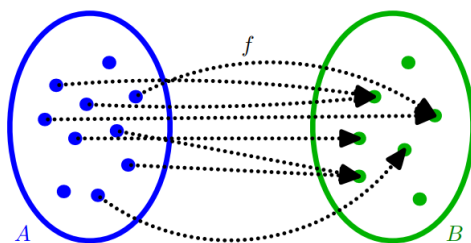
1.1. Funkce

zadání funkce: Vzorcem - algebraicky $S = \pi r^2 \rightarrow S = f(r)$

Tabulkou - numericky

Slovním popisem - verbálně

Grafem - vizuálně



Definice:

Funkce z množiny A do množiny B je množina f uspořádaných dvojic $[x; y]$, kde $x \in A$ a $y \in B$, takových, že kdykoliv $[x; y_1] \in f$ a $[x; y_2] \in f$, pak $y_1 = y_2$.

Místo $[x; y] \in f$ píšeme $y = f(x)$

Definiční obor funkce f z A do B je množina takových $x \in A$, takových, že existuje právě jedno $y \in B$, pro které platí $y = f(x)$. Značíme $D(f)$.

Obor hodnot funkce f z A do B je množina takových $y \in B$ takových, že existuje alespoň jedno $x \in A$, pro které platí $y = f(x)$. Značíme $H(f)$.

Obrázek: jedno x nesmí mít dvě a více y , resp. jedno y může mít více x , $D(f)$, $H(f)$,

Reálná funkce f jedné reálné proměnné je funkce z R do R .

Graf reálné funkce f je množina všech bodů v rovině o souřadnicích $[x; f(x)]$.

Př: a) určete $D(f)$ funkce $f(x) = \sqrt{\frac{x^2 - x - 6}{x - x^2}}$

b) určete $D(f)$ funkce $f(x) = \ln(1 - x^2)$

Funkce definovaná po částech

Funkce může být definována i různými vzorci pro různé části definičního oboru

$$f(x) = \begin{cases} 1 - x; & \text{pro } x \leq -1 \\ x^2; & \text{pro } x > -1 \end{cases}$$

Vypočítáme:

$$f(-2) = \quad \quad \quad f(-1) = \quad \quad \quad f(0) =$$

Graf:

$$\text{Př: } f(x) = |x| = \begin{cases} x; & \text{pro } x \geq 0 \\ -x; & \text{pro } x < 0 \end{cases} \quad \text{graf:}$$

$$\text{Př: } f(x) = \begin{cases} x; & \text{pro } 0 \leq x \leq 1 \\ 2 - x; & \text{pro } 1 < x \leq 2 \\ 0; & \text{pro } x > 2 \end{cases} \quad \text{graf:}$$

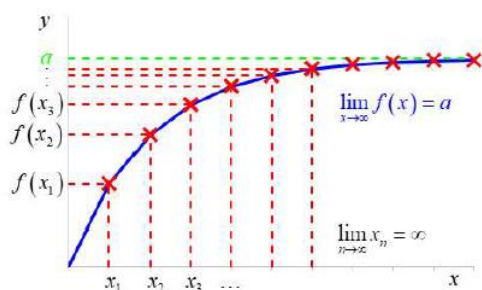
$$\text{Př: } f(x) = \begin{cases} 0; & 0 \leq x < 1 \\ 1; & 1 \leq x < 2 \\ 2; & 2 \leq x < 3 \\ 3; & 3 \leq x < 4 \end{cases} \quad \text{graf:}$$

Limita funkce

Laicky řečeno: Máme funkci $y = f(x)$. Řekneme, že funkce f má v bodě a limitu b , pokud je splněno: kdykoliv se hodnoty x „blíží“ k hodnotě a , pak se hodnoty y „blíží“ k hodnotě b . Pak píšeme:

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b.$$

Limita funkce v nevlastním bodě $x \rightarrow \pm\infty$



Definice:

Říkáme, že limita funkce $f(x)$ je pro $x \rightarrow \pm\infty$ rovna číslu a , píšeme $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a$, právě tehdy když, pro každou posloupnost bodů $\{x_n\}$ s limitou $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pm\infty$ platí, že posloupnost odpovídajících funkčních hodnot $\{f(x_n)\}$ má limitu a , tedy $\lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a$.

Symbolický zápis: $\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = a \Leftrightarrow [\forall \{x_n\}: \lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \pm\infty \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} f(x_n) = a]$

Př: a) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x}$

b) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x+2}{x-2}$

c) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{1}{x^2}$

d) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$

Limita funkce ve vlastním bodě $x \rightarrow a$

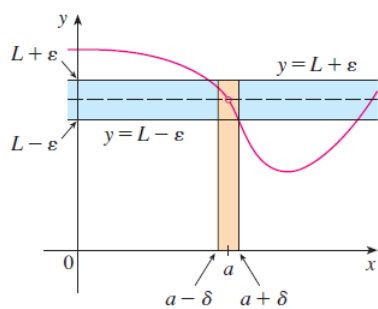
Okolím bodu a nazveme otevřený interval $(a - \varepsilon; a + \varepsilon)$ pro nějaké maličké číslo $\varepsilon > 0$.

Obrázek:

Definice limity pomocí okolí

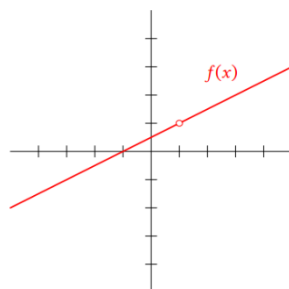
Buď $f(x)$ reálná funkce. Řekneme, že f má v bodě a limitu b , pokud pro každé okolí U bodu b , existuje okolí V , bodu a , takové, že pro každé $x \in V$, $x \neq a$, platí $f(x) \in U$.

Symbolický zápis: $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0; \forall x: 0 < |x - a| < \delta \Rightarrow |f(x) - b| < \varepsilon$.



Př: a) $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{x^2-1}{2x-2} =$

b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^2-1}{2x-2} =$



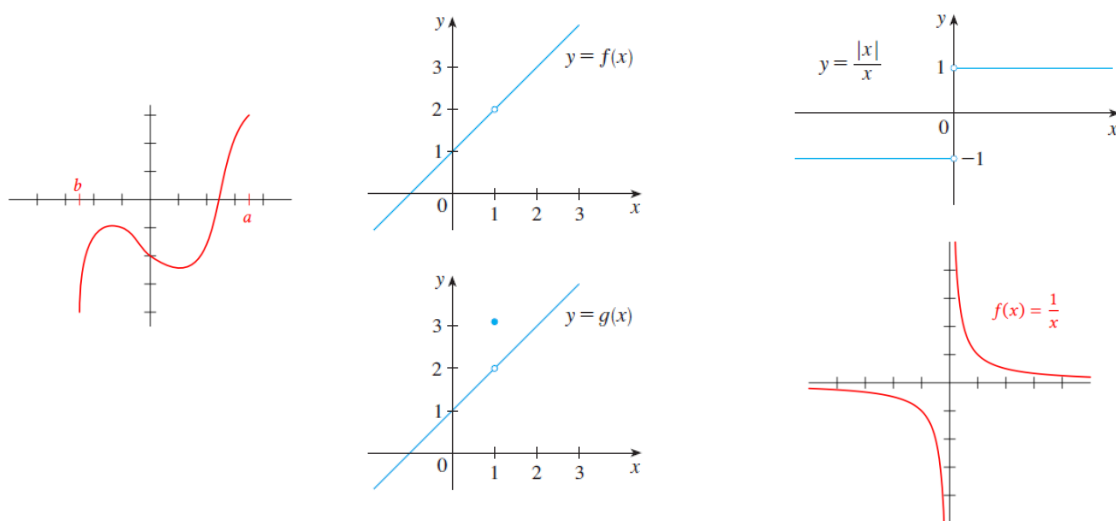
Funkce spojitá

Definice

Reálná funkce f je **spojitá v bodě a** , pokud je její funkční hodnota v bodě a rovna limitě v bodě a .

Reálná funkce f je **spojitá**, pokud je spojitá ve všech bodech svého definičního oboru.

Každá elementární funkce je spojitá na svém definičním oboru.



Limity a aritmetické operace

Jsou dány dvě funkce $f(x)$ a $g(x)$, které mají v bodě a limity. Pak platí:

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \pm g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \pm \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} (f(x) \cdot g(x)) = \lim_{x \rightarrow a} f(x) \cdot \lim_{x \rightarrow a} g(x)$$

$$\lim_{x \rightarrow a} \left(\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \frac{\lim_{x \rightarrow a} f(x)}{\lim_{x \rightarrow a} g(x)}, \lim_{x \rightarrow a} g(x) \neq 0$$

Jednostranné limity

Levým okolím (resp. pravým okolím) bodu a rozumíme interval $(a - \varepsilon; a)$, respektive $(a; a + \varepsilon)$, pro nějaké $\varepsilon > 0$.

Definice:

Číslo b je limitou zleva funkce $f(x)$ v bodě a , pokud pro každé okolí U bodu b , existuje levé okolí V , bodu a , takové, že kdykoliv $x \in V$, pak $f(x)$ leží v U .

Píšeme $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = b$

Obdobně u limity zprava píšeme $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = b$

Má-li funkce $f(x)$ v bodě a limitu zleva i zprava a tyto dvě limity se sobě rovnají, pak má funkce $f(x)$ i „oboustrannou“ limitu v bodě a . Totéž platí i naopak a v negaci.

Př: a) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} =$$

b) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x^2} =$

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{1}{x^2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x^2} =$$

c) $\lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{2x+2}{x-2} =$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x+2}{x-2} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 2} \frac{2x+2}{x-2} =$$

d) $\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{2x-2}{x-1} =$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{2x-2}{x-1} =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{2x-2}{x-1} =$$

Výpočty s nevlastními hodnotami

$$\log_a \infty = \infty; a > 1 \quad \log_a \infty = -\infty; a < 1$$

$$\log_a 0^+ = -\infty; a > 1 \quad \log_a 0^+ = \infty; a < 1$$

$$\operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right)^+ = -\infty \quad \operatorname{tg}\left(\frac{\pi}{2}\right)^- = \infty$$

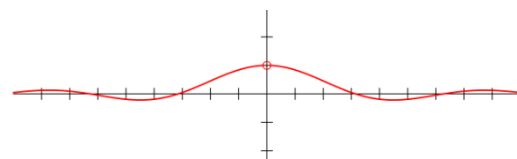
$$\operatorname{cotg}(0)^+ = \infty \quad \operatorname{cotg}(0)^- = -\infty$$

$$\operatorname{arctg} \infty = \frac{\pi}{2} \quad \operatorname{arctg}(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\operatorname{arccotg} \infty = 0 \quad \operatorname{arccotg}(-\infty) = \pi$$

Limity funkce $y = \frac{\sin x}{x}$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{\sin x}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{\sin x} = 1$$



Př: Je dána funkce $f(x) = \begin{cases} 1+x; & \text{pro } x < -1 \\ x^2; & \text{pro } -1 \leq x < 1 \\ 2-x; & \text{pro } x \geq 1 \end{cases}$

Vypočtěte:

$$\lim_{x \rightarrow -1^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -5} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 1} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 10} f(x) =$$

Př: Je dána funkce $f(x) = \begin{cases} 1 + \sin x; & \text{pro } x < 0 \\ \cos x; & \text{pro } 0 \leq x \leq \pi \\ \sin x; & \text{pro } x > \pi \end{cases}$

Vypočtěte:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^-} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -\pi} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi^+} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} f(x) =$$

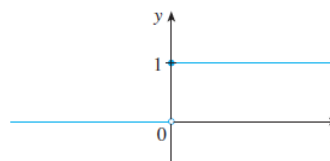
$$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow \pi} f(x) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 4\pi} f(x) =$$

Př: Heavisidova funkce je definována

$$H(t) = \begin{cases} 0; & \text{pro } t < 0 \\ 1; & \text{pro } t \geq 0 \end{cases}$$



$$\lim_{x \rightarrow 0^-} H(t) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} H(t) =$$

$$\lim_{x \rightarrow -4} H(t) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} H(t) =$$

$$\lim_{x \rightarrow 4} H(t) =$$

Další důležité limity:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$