

XAMAT, YAMAT

Přednáška 2

Posloupnosti

Navazujeme na pojmy z Úvodu do studia matematiky

Definice posloupnosti, možnosti zadání, monotonie, omezenost, aritmetická a geometrická posloupnost

Nové pojmy:

limita posloupnosti, výpočty limit posloupností, konvergence a divergence, součet geometrické řady

Pojem posloupnost

Funkce na množině $A \subset \mathbb{R}$ je předpis, který každému číslu z množiny A přiřazuje právě jedno reálné číslo.

Množina A se nazývá **definiční obor funkce**.

Každá funkce, jejímž definičním oborem je množina $\mathbb{N}$ všech přirozených čísel, se nazývá **nekonečná posloupnost**.

Každá funkce, jejíž definiční obor je množina všech přirozených čísel $n \leq n_0$, kde n_0 je pevně dané přirozené číslo z $\mathbb{N}$, se nazývá **konečná posloupnost**.

Místo „hodnota posloupnosti f v bodě n je rovna číslu s “ budeme říkat „ n -tý člen posloupnosti f je roven číslu s “ a budeme psát „ $f_n = s$ “.

Př:

$$A = \{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{-3 + (-1)^n\}_{n=1}^{\infty} =$$

$$B = \{b_n\}_{n=1}^7 = \{0,5n^2\}_{n=1}^7 =$$

V těchto případech říkáme, že **posloupnost je určena vzorcem pro n -tý člen**.

Rekurentní určení posloupnosti (Z latinského recurrere = vraceti se, jít zpět)

Př:

Vypočítejte druhý, třetí a čtvrtý člen posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, která je dáno takto:

$a_1 = 4$ a $a_{n+1} = -2a_n$, pro každé $n \in \mathbb{N}$.

$$a_2 =$$

$$a_3 =$$

$$a_4 =$$

V posloupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je dán první člen a dále je k dispozici vzorec, pomocí něhož můžeme pro každé $n \in N$ vypočítat člen a_{n+1} na základě znalosti předchozího členu.

Př:

Vypočítejte pátý člen posloupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$, která je dáno takto:

$b_1 = 1$; $b_2 = -1$; a $b_{n+2} = 2b_{n+1} - 3b_n$, pro každé $n \in N$.

$$b_3 =$$

$$b_4 =$$

$$b_5 =$$

V posloupnosti $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou dány první dva členy a dále je k dispozici vzorec, pomocí něhož můžeme pro každé $n \in N$ vypočítat člen b_{n+2} na základě znalosti předchozích členů b_{n+1} a b_n .

Př:

Určete prvních několik členů posloupnosti $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$, která je dáno takto:

$c_{n+2} = c_{n+1} + 2c_n$, pro každé $n \in N$.

Uvedený vztah neurčuje posloupnost jednoznačně. Existuje nekonečně mnoho posloupností, záleží, jak zvolíme c_1 a c_2 .

Fibonacciho (králičí) posloupnost, souvislost se zlatým řezem. Leonardo Pisanský (1170-1250), kniha Liber abaci (1202).

$a_1 = 1$; $a_2 = 1$; $a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$, pro každé $n \in N$.

$$A = \{1; 1; 2; \quad \quad \quad ; \dots\}$$

Př:

Je dána posloupnost $A = \{\log 3^n\}_{n=1}^{\infty}$. Vyjádřete ji rekurentně.

$a_1 = \log 3$; $a_{n+1} = a_n + \log 3$, pro každé $n \in N$.

Př:

Posloupnost B je dána rekurentně takto: $b_1 = 1$; a $b_{n+1} = 2b_n$, pro každé $n \in N$. Vyjádřete ji vzorcem pro n -tý člen.

$$\{2^{n-1}\}_{n=1}^{\infty}$$

Vybrané vlastnosti posloupností

Uvažujeme pouze nekonečné posloupnosti.

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **rostoucí**, právě tehdy když pro všechna $n \in N$ platí: $a_n < a_{n+1}$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **klesající**, právě tehdy když pro všechna $n \in N$ platí: $a_n > a_{n+1}$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **nerostoucí**, právě tehdy když pro všechna $n \in N$ platí: $a_n \geq a_{n+1}$

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **neklesající**, právě tehdy když pro všechna $n \in N$ platí: $a_n \leq a_{n+1}$

Posloupnosti, které jsou nerostoucí nebo neklesající se nazývají **monotónní**.

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **shora omezená**, právě tehdy když existuje reálné číslo h takové, že pro všechna $n \in N$ platí: $a_n \leq h$.

Posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ se nazývá **zdola omezená**, právě tehdy když existuje reálné číslo d takové, že pro všechna $n \in N$ platí: $a_n \geq d$.

Posloupnost se nazývá **omezená**, právě tehdy když je omezená zdola i shora.

Př:

Zkoumejte posloupnost $\left\{\frac{n+1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$. (Graf, omezená shora i zdola)

Př:

Zkoumejte posloupnost $\{(-1)^n \cdot 2n\}_{n=1}^{\infty}$. (Graf, není omezená shora ani zdola)

Limita posloupnosti

Vlastní limita posloupnosti

Definice:

Říkáme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ je **konvergentní** právě tehdy, když existuje reálné číslo A takové, že platí: Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje $n_0 \in \mathbb{N}$ takové, že pro všechna přirozená čísla $n > n_0$ je $|a_n - A| < \varepsilon$.

Číslo A se nazývá **limita posloupnosti** $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Zkráceně:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A \Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0, \exists n_0 \in \mathbb{N}, \forall n > n_0: |a_n - A| < \varepsilon.$$

Posloupnosti, které nejsou konvergentní, se nazývají divergentní.

Př: Zkoumejme posloupnost $\left\{ \frac{(-1)^{n+n}}{2n} \right\}_{n=1}^{\infty}$

Pozn.: definice vlastně říká pouze to, že ať vezmu, jakkoliv široký pás kolem A , vždy najdu takový člen posloupnosti, že za ním už všechny další členy budou ležet v tomto pásu.

Důležité věty:

Každá posloupnost má nejvýše jednu limitu.

Každá konvergentní posloupnost je omezená.

Každá omezená monotónní posloupnost je konvergentní.

Každá shora omezená neklesající posloupnost je konvergentní.

Každá zdola omezená nerostoucí posloupnost je konvergentní.

Nechť $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ jsou konvergentní posloupnosti a necht' $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$, $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = B$ a c je libovolné reálné číslo. Potom jsou konvergentní i posloupnosti $\{a_n + b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n - b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{a_n \cdot b_n\}_{n=1}^{\infty}$, $\{c \cdot a_n\}_{n=1}^{\infty}$ a platí

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n + \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A + B$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n - \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A - B$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (a_n \cdot b_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \cdot \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = A \cdot B$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c \cdot a_n = c \cdot A$$

Nevlastní limita posloupnosti

Řekneme, že posloupnost $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ má nevlastní limitu pokud

bud'

$$\forall K \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0: a_n > K$$

nebo

$$\forall L \in \mathbb{R} \exists n_0 \in \mathbb{N} \forall n > n_0: a_n < L$$

Značíme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty \text{ nebo } \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$$

Obrázky:

Pro každou posloupnost nastane právě jedna z následujících možností:

1. Posloupnost má vlastní(reálnou) limitu: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = A$

Obrázek:

2. Posloupnost má nevlastní limitu: $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \infty$ nebo $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\infty$

Obrázek:

3. Limita posloupnosti neexistuje

Obrázek:

Limity speciálních posloupností:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n^c} = 0; c > 0.$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} q^n = \begin{cases} 0; q \in (-1; 1) \\ 1; q = 1 \\ \infty; q > 1 \\ \text{neexistuje}; q \leq -1 \end{cases}$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = e = 2,718281828 \dots$$

Př: Určete limity:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 5}{n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n^2 - 5}{n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n - 5}{n^2} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 - \frac{5}{7n}\right)^{2025} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n! - (n + 2)!}{(n + 1)!} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[3]{2n^3 - 5}}{n} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7 - 5^n}{2 \cdot 5^n + 3} =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \cdots + \frac{1}{4^n} \right) =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{3}{2n} \right)^n =$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{3}{n} \right)^n =$$