

Základy inženýrských výpočtů

(výpočty na kalkulačce, přibližné výpočty funkčních hodnot, Newtonova metoda řešení rovnic, Eulerova metoda řešení diferenciálních rovnic, Lagrangeův a Newtonův interpolační polynom, Metoda nejmenších čtverců)

Numerické řešení rovnic (NŘR)

Úkol: nalézt všechny nulové body funkce z levé strany rovnice $f(x) = 0$

Pro nulový bod $\bar{x}$ platí $f(\bar{x}) = 0$

Vzorce pro nalezení kořenů polynomů známe pouze u rovnic do 4. stupně (Cardanovy vzorce), i jejich použití je ovšem problematické

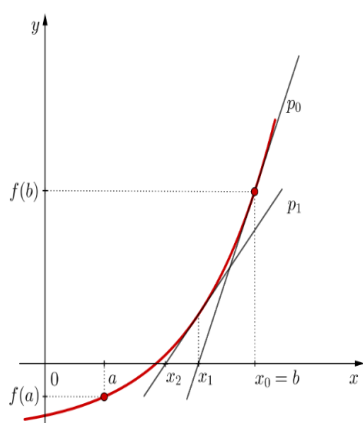
NŘR má dvě fáze:

Separace kořenů – stanovení co nejmenších intervalů ve kterých leží právě jeden kořen

Aproximace kořenů – nalezení numerického řešení rovnice $\bar{x}$, což je číslo, které představuje přibližnou hodnotu kořene $\bar{x}$ s danou přesností

Výpočet $\bar{x}$ spočívá v konstrukci posloupnosti $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ takové, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$

Newtonova metoda tečen



Vstupní data jsou:

- rovnice $f(x) = 0$, separační interval $\langle a; b \rangle$, přesnost ε , popřípadě pevný bod
- Musíme zvolit počáteční aproximaci $x_0 \in \langle a; b \rangle$

volíme takový bod $x_0 \in \langle a; b \rangle$, aby platilo $f(x_0) \cdot f''(x_0) > 0$ (Fourierova podmínka)

- dále musíme určit iterační vztah

pro $(n + 1)$. aproximaci kořene: $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$

- tato posloupnost $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ postupných aproximací kořene $\bar{x}$ konverguje ke kořeni $\bar{x}$ pro $n \rightarrow \infty$

Př: Vypočtete $\sqrt{2}$ s přesností $\varepsilon = 0,0001$

Rovnice zřejmě bude $x^2 - 2 = 0$, separační interval $\langle 1; 2 \rangle$

$$f(x) = x^2 - 2$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f''(x) = 2$$

$$\text{Iterační vztah: } x_{k+1} = x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k}$$

Volba x_0 : vybereme jeden z krajních bodů separačního intervalu

$$f(1) = -1$$

$$f(2) = 2$$

$$f'(1) = 2$$

$$f'(2) = 4$$

$$f''(1) = 2$$

$$f''(2) = 2$$

$$f(1) \cdot f''(1) = -2 < 0$$

$$f(2) \cdot f''(2) = 4 > 0 \quad \text{proto volíme } x_0 = 2$$

Výpočet uspořádáme do tabulky:

$x_0 = 2$	Paměť A	Přesnost B-A
$x_1 = 1,5$	$B \rightarrow A$	$0,5 \nless \varepsilon$
$x_2 = 1,41607$	$B \rightarrow A$	$0,083 \nless \varepsilon$
$x_3 = 1,414216$	$B \rightarrow A$	$0,002 \nless \varepsilon$
$x_4 = 1,414214$	B	$0,000002 < \varepsilon \text{ konec}$

Píšeme $\sqrt{2} = 1,4142 \pm 0,0001$

Eulerova metoda řešení diferenciálních rovnic

Počáteční problém pro diferenciální rovnici: $y' = f(x, y)$; $y(x_0) = y_0$ na intervalu $\langle a; b \rangle$, n počet

Síťová metoda – ekvidistantní sítí uzlů rozdělíme interval $\langle a; b \rangle$ na množinu n disjunktních podintervalů

Kresli obrázek: princip Eulerovy metody

$$\text{Iterační vztah: } y_{n+1} = y_n + \Delta y_n = y_n + h \cdot S(x_n; y_n; h)$$

Síťová metoda dává nejpresnější řešení v okolí počátečního bodu intervalu $\langle a; b \rangle$

Př: Řešte pomocí Eulerovy metody ODR $y' = \cos x - y$; PP $y(0) = 1$ na intervalu $\langle 0; 1 \rangle$ pro $n = 4$.

Aproximace funkcí

Nahrazení složitých funkcí nebo funkcí daných tabulkou naměřených hodnot (pólů) vhodnou, resp. jednodušší funkcí.

Typy aproximace:

Interpolace – aproximační funkce prochází všemi póly

Metoda nejmenších čtverců – aproximační funkce vystihuje trend dat

Další typy (stejnoměrní aproximace, ...)

Interpolace

Různé typy: polynomická, splajnová, trigonometrická, exponenciální, kombinovaná, ...

Vstup: $n + 1$ pólů a jejich funkčních hodnot $[x_i; y_i]$, $i = 0; 1; \dots; n$

Lagrangeův interpolační polynom (LIP)

Nepřímá konstrukce pomocí fundamentálních polynomů

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0) \cdot (\dots) \cdot (x - x_{i-1}) \cdot (x - x_{i+1}) \cdot (\dots) \cdot (x - x_n)}{(x_i - x_0) \cdot (\dots) \cdot (x_i - x_{i-1}) \cdot (x_i - x_{i+1}) \cdot (\dots) \cdot (x_i - x_n)}$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^n y_i \cdot l_i(x)$$

Př: Sestrojte LIP funkce dané tabulkou:

x_i	0	1	2	5
y_i	2	3	12	147

Newtonův interpolační polynom (NIP)

Konstrukce pomocí **poměrných diferencí** – výpočet viz příklad

$$N_n(x) = y_0 + f[x_0; x_1] \cdot (x - x_0) + f[x_0; x_1; x_2] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) + \dots \\ + f[x_0; x_1; \dots; x_n] \cdot (x - x_0) \cdot (x - x_1) \cdot \dots \cdot (x - x_{n-1})$$

Př: Sestrojte NIP funkce dané tabulkou:

x_i	0	1	2	5
y_i	2	3	12	147

Metoda nejmenších čtverců (MNČ)

Vstup: $n + 1$ pólů a jejich funkčních hodnot $[x_i; y_i]$, $i = 0; 1; \dots; n$

Výstup: rovnice přímky $\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x)$, která aproximuje póly

$\varphi_0(x) = 1$, $\varphi_1(x) = x$

Obrázek: princip MNČ

Algoritmus:

Sestavení normální soustavy rovnic (NSR)

$$a_0(\varphi_0(x); \varphi_0(x)) + a_1(\varphi_1(x); \varphi_0(x)) = (y_i; \varphi_0(x))$$

$$a_0(\varphi_0(x); \varphi_1(x)) + a_1(\varphi_1(x); \varphi_1(x)) = (y_i; \varphi_1(x))$$

V závorkách je skalární součin – viz příklad

Př: nalezněte přímku, která aproximuje funkci danou tabulkou:

x_i	2	4	6	8
y_i	2	11	28	40