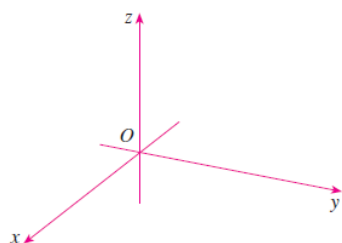


Základy vektorového počtu v trojrozměrném eukleidovském prostoru

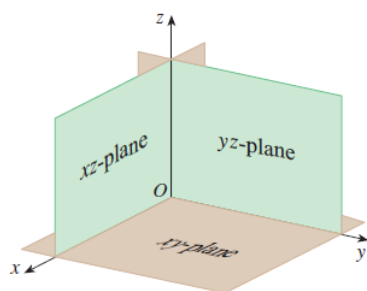
1.1. 3 – Dimensionální souřadný systém



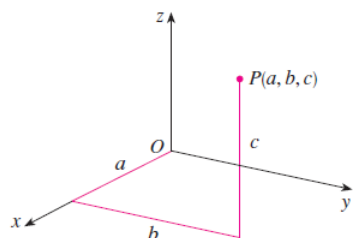
- v rovině: $A[a; b]$; $a, b \in \mathbb{R}$; a je x-souřadnice, b je y-souřadnice bodu A

- v prostoru: $A[a; b; c]$; $a, b, c \in \mathbb{R}$; a je x-souřadnice, b je y-souřadnice, c je z-souřadnice bodu A

- pevně zvolený bod O (počátek), 3 orientované navzájem kolmé přímky (souřadnicové osy, označené x, y, z)



- 3 souřadnicové osy určují tři souřadnicové roviny: xy, xz, yz
- Tyto roviny rozdělují prostor do 8 částí – oktanty
- $\mathbb{R}^3 = \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} = \{[x; y; z]; x, y, z \in \mathbb{R}\}$ je množina všech uspořádaných trojic, vzájemně jednoznačné zobrazení mezi bodem a jeho souřadnicemi v 3D prostoru
- Pravoúhlý (ortogonální) 3D souřadnicový systém

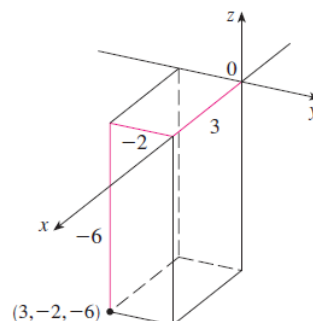
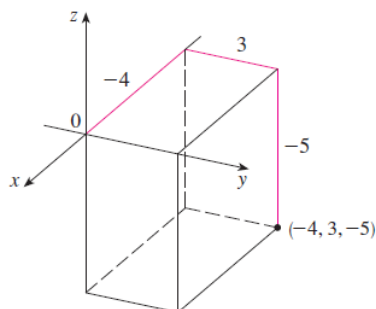
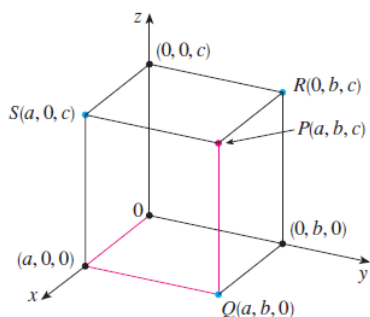


$P[a; b; c]$

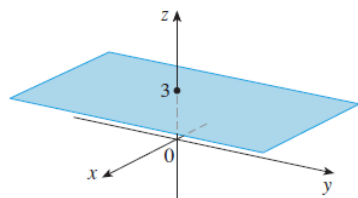
$P[a; b; c]$

$R[-4; 3; -5]$

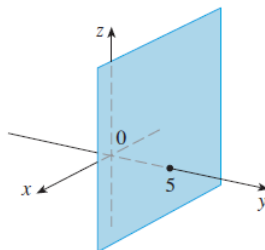
$S[3; -2; -6]$



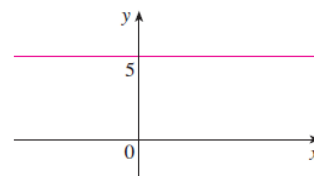
Rovina $z = 3$



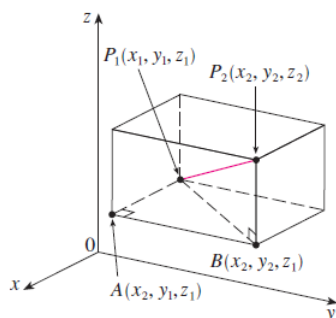
$y = 5$



přímka v rovině $y = 5$



1.2. Vzdálenost bodů v prostoru



- Známý vzorec pro vzdálenost dvou bodů v rovině rozšíříme do prostoru:

Vzdálenost $|P_1P_2|$ mezi body $P_1[x_1; y_1; z_1]$ a $P_2[x_2; y_2; z_2]$ je

$$|P_1P_2| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

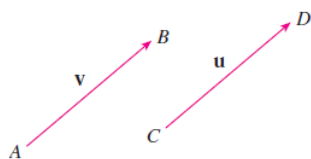
Př: Určete vzdálenost bodů $P[2; -1; 7]$ a $Q[1; -3; 5]$

1.3. Souřadnice středu úsečky

$$P_1[x_1; y_1; z_1], P_2[x_2; y_2; z_2] \quad S \left[\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right]$$

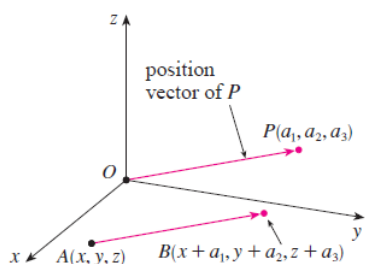
Př: Určete souřadnice středu úsečky dané body $P[2; -1; 7]$ a $Q[1; -3; 5]$

1.4. Vektory



- **Vektor** je definován jako veličina (výchylka, rychlost, síla, zrychlení, ...), která má svoji velikost a směr.
- Je prezentován jako orientovaná úsečka
- Označujeme: $\mathbf{v}, \mathbf{u}$ nebo $\vec{v}, \vec{u}$
- **Počáteční body** – A, C

- **Koncové body** – B, D
- $\vec{v} = \overrightarrow{AB}, \vec{u} = \overrightarrow{CD}$



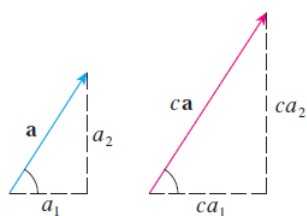
vektor $\vec{a} = \overrightarrow{OP} = (a_1; a_2; a_3)$ je tzv. **rádus vektor** bodu $P[a_1; a_2; a_3]$

Dané body $A[x_A; y_A; z_A]$ a $B[x_B; y_B; z_B]$ reprezentují vektor

$$\vec{u} = B - A = (x_B - x_A; y_B - y_A; z_B - z_A)$$

Délka vektoru $\vec{u} = u_1; u_2; u_3$: $|\vec{u}| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2 + u_3^2}$

Př: Nalezněte souřadnice a délku vektoru $\vec{v}$, který je dán body $C[2; -3; 4]$ a $D[-2; 1; 1]$



Sčítání vektorů a násobení vektoru číslem

Je-li: $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ a $c \in R$ pak

$$\vec{a} + \vec{b} = (a_1 + b_1; a_2 + b_2; a_3 + b_3)$$

$$\vec{a} - \vec{b} = (a_1 - b_1; a_2 - b_2; a_3 - b_3)$$

$$c\vec{a} = (ca_1; ca_2; ca_3)$$

Př: Je-li: $\vec{a} = (4; 0; 3)$ a $\vec{b} = (-2; 1; 5)$ nalezněte: $|\vec{a}|$, $\vec{a} + \vec{b}$, $\vec{a} - \vec{b}$, $3\vec{b}$, $2\vec{a} + 5\vec{b}$ a $|2\vec{a} + 5\vec{b}|$

Obecný n-dimenzionální vektor: $\vec{a} = (a_1; a_2; \dots; a_n)$ ve V_n

Vlastnosti vektorů

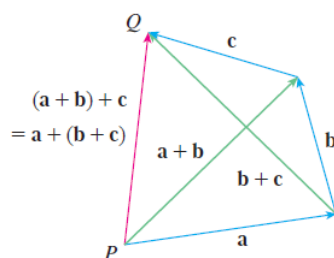
Jsou-li $\vec{a}$, $\vec{b}$, a $\vec{c}$ vektory ve V_n a $c, d \in R$ reálná čísla, potom platí:

$$\vec{a} + \vec{b} = \vec{b} + \vec{a}$$

$$\vec{a} + (\vec{b} + \vec{c}) = (\vec{a} + \vec{b}) + \vec{c}$$

$$\vec{a} + \vec{0} = \vec{a}$$

$$\vec{a} + (-\vec{a}) = \vec{0}$$



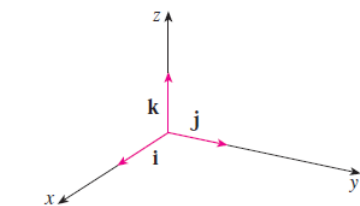
$$c(\vec{a} + \vec{b}) = c\vec{a} + c\vec{b}$$

$$(c + d)\vec{a} = c\vec{a} + d\vec{a}$$

$$(cd)\vec{a} = c(d\vec{a})$$

$$1\vec{a} = \vec{a}$$

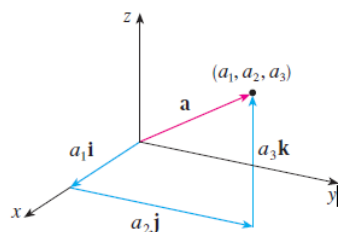
Standardní báze 3D prostoru



$\vec{i} = (1; 0; 0)$, $\vec{j} = (0; 1; 0)$, $\vec{k} = (0; 0; 1)$, jejich délka je 1

Když $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, pak můžeme psát

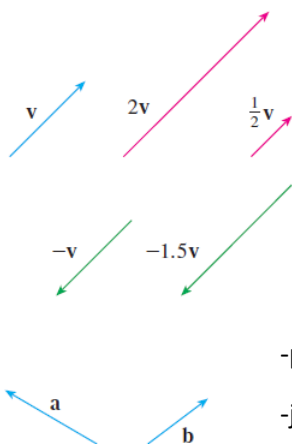
$$\begin{aligned}\vec{a} &= (a_1; a_2; a_3) = (a_1; 0; 0) + (0; a_2; 0) + (0; 0; a_3) = \\ &= a_1(1; 0; 0) + a_2(0; 1; 0) + a_3(0; 0; 1) = a_1\vec{i} + a_2\vec{j} + a_3\vec{k}\end{aligned}$$



$$(1; -2; 6) = 1\vec{i} - 2\vec{j} + 6\vec{k}$$

Př: dáno: $\vec{a} = \vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}$; $\vec{b} = 4\vec{i} + 7\vec{k}$ určit: vektor $2\vec{a} + 3\vec{b}$ pomocí bázevých vektorů $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$

Lineární závislost a nezávislost vektorů



Říkáme, že vektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_n$ jsou lineárně závislé (LZ) jestliže existují čísla $x_1, x_2, \dots, x_n$ (z nichž je alespoň jedno různé od 0) tak, že platí: $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_n\vec{v}_n = \vec{0}$.

Jinak jsou lineárně nezávislé (LN)

-řešíme vektorovou rovnici $x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_n\vec{v}_n = \vec{0}$

-homogenní soustava rovnic má vždy řešení

-pokud je toto řešení $x_1 = x_2 = \dots = x_n = 0$ jsou vektory LN

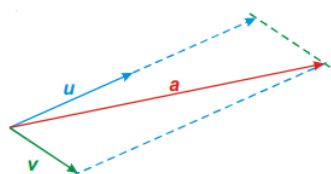
-jinak jsou LZ

Př: a) Dáno: $\vec{u} = (1; 1; 0)$, $\vec{v} = (1; 3; 2)$, $\vec{w} = (4; 9; 5)$ Určit: LN nebo LZ

b) Dáno: $\vec{u} = (1; 2; 3)$, $\vec{v} = (2; 5; 7)$, $\vec{w} = (1; 3; 5)$ Určit: LN nebo LZ

Báze vektorového prostoru, Lineární kombinace vektorů

Jsou-li vektory LN, pak tvoří bázi příslušného vektorového prostoru a lineární kombinaci vektorů



$$\vec{a} = k\vec{u} + l\vec{v}; \quad k, l \in R$$

$$\text{Obecně: } x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

$$\text{Prakticky: } x_1\vec{v}_1 + x_2\vec{v}_2 + \dots + x_{n-1}\vec{v}_{n-1} = -x_n\vec{v}_n$$

Po úpravě: $\vec{a} = k\vec{u} + l\vec{v} + \dots$

Př: dáno: $\vec{u} = (1; 2; 3)$, $\vec{v} = (2; 5; 7)$, $\vec{w} = (1; 3; 5)$. Určete, zda vektor $\vec{w}$ je lineární kombinací vektorů $\vec{u}$ a $\vec{v}$

Př: Posud'te, zda vektory $\vec{v}_1 = (2; 0; 0)$, $\vec{v}_2 = (0; 3; 0)$ a $\vec{v}_3 = (0; 0; 4)$ tvoří bázi prostoru V_3 . Pokud ano, pak určete souřadnice vektoru $\vec{v} = (1; 2; 3)$ v této bázi.

Skalární součin dvou vektorů

Násobení vektoru číslem x Násobení vektoru vektorem

Jestli-že $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ a $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, potom skalární součin vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ je číslo $\vec{a} \cdot \vec{b}$ dáno:

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

Př:

$$(2; 4) \cdot (3; -1) =$$

$$(-1; 7; 4) \cdot \left(6; 2; -\frac{1}{2}\right) =$$

$$(\vec{i} + 2\vec{j} - 3\vec{k}) \cdot (2\vec{j} - \vec{k}) =$$

Vlastnosti skalárního součinu

Jestli-že $\vec{a}, \vec{b}$ a $\vec{c}$ jsou vektory V_3 a $c \in R$ je reálné číslo, pak platí

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2; \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a}; \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c}$$

$$(c\vec{a}) \cdot \vec{b} = c(\vec{a} \cdot \vec{b}) = \vec{a} \cdot (c\vec{b}); \vec{0} \cdot \vec{a} = 0$$

Geometrická interpretace:

Jestli-že $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ a $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ jsou vektory, které svírají úhel φ potom skalární součin vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ je $\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \varphi$.

$$\text{Důsledek: } \cos \varphi = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

$$\cos \frac{\pi}{2} = 0 \rightarrow \text{skalární součin kolmých neboli ortogonálních vektorů je roven 0}$$

Př:

a) Jsou dány vektory $\vec{v}_1 = (2; 2; -1)$, $\vec{v}_2 = (5; -3; 2)$. Určete, jaký úhel svírají.

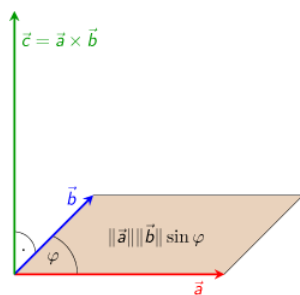
b) Jsou dány vektory $\vec{v}_1 = 2\vec{i} + 2\vec{j} - \vec{k}$, $\vec{v}_2 = 5\vec{i} - 4\vec{j} + 2\vec{k}$. Určete, jaký úhel svírají.

Vektorový součin dvou vektorů

Jestli-že $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$ a $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$, pak vektorový součin vektorů $\vec{a}$ a $\vec{b}$ je vektor:

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = (a_2 b_3 - a_3 b_2; a_3 b_1 - a_1 b_3; a_1 b_2 - a_2 b_1)$$

Nenulový vektor $\vec{c}$ je kolmý jak k vektoru $\vec{a}$, tak k vektoru $\vec{b}$



$$|\vec{c}| = |\vec{a}| |\vec{b}| \sin \varphi = S$$

$$\vec{c} = \vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \left(\begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix}; - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix}; \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \right)$$

Vlastnosti: Jestli-že $\vec{a}$, $\vec{b}$ a $\vec{c}$ jsou vektory V_3 a $c \in R$ je reálné číslo, pak platí

$$\vec{a} \times \vec{b} = -\vec{b} \times \vec{a}; (c\vec{a}) \times \vec{b} = c(\vec{a} \times \vec{b}) = \vec{a} \times (c\vec{b}); \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c}; (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} = \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c}$$

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \times \vec{b}) \cdot \vec{c}; \vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$$

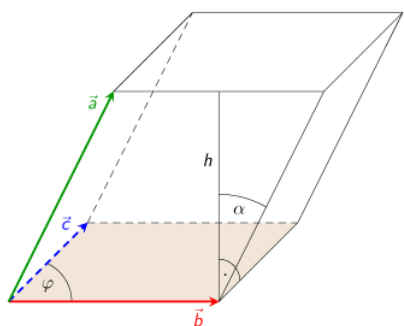
Př: a) Dáno: $\vec{a} = (2; -5; 3)$ a $\vec{b} = (3; 2; -4)$. Určit: $\vec{v} = \vec{a} \times \vec{b}$; S

a) Dáno: $A = [3; 2; 1]$, $B = [4; 3; 1]$, $C = [3; 9; 7]$. určit S trojúhelníka ABC a velikost v_a

Smíšený součin 3 vektorů $\vec{a} = (a_1; a_2; a_3)$, $\vec{b} = (b_1; b_2; b_3)$ a $\vec{c} = (c_1; c_2; c_3)$.

(Skalárně vektorový součin) - je to číslo

$$S = \vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$



Komplanární vektory leží v jedné rovině $\rightarrow S = 0$

Nekomplanární vektory $\rightarrow$ tvoří rovnoběžnostěn, jeho $V = S \rightarrow$ čtyřstěn $V_4 = \frac{1}{6} V$

Př: a) Dáno: $\vec{a} = (1; 0; 5)$, $\vec{b} = (2; -3; 0)$ a $\vec{c} = (0; 3; 2)$. Určit: S

a) Dáno: $A = [3; 1; 1]$, $B = [1; 4; 1]$, $C = [1; 1; 6]$ a $D = [3; 4; 9]$. Určit V čtyřstěnu $ABCD$ a velikost v_d z vrcholu D na stěnu ABC .