

XAMAT, YAMAT

Cvičení 5

Průběh funkce

1. Najděte všechny asymptoty grafu funkce:

- | | |
|---------------------------------------|-------------------------------|
| a) $f(x) = \frac{1-6x-x^2}{x+3}$ | $\{x = -3, y = -x - 3\}$ |
| b) $f(x) = \frac{2x^3+3x^2-1}{x^3}$ | $\{x = 0, y = 2\}$ |
| c) $f(x) = \frac{(x-2)^2}{3-x}$ | $\{x = 3, y = -x + 1\}$ |
| d) $f(x) = \frac{3x^3+x}{(1-x)^2}$ | $\{x = 1, y = 3x + 6\}$ |
| e) $f(x) = \frac{1+7x-2x^2}{x-3}$ | $\{x = 3, y = -2x + 1\}$ |
| f) $f(x) = 5x - \frac{1}{2x-1}$ | $\{x = \frac{1}{2}, y = 5x\}$ |
| g) $f(x) = \frac{2x^4-x^3+2}{x^3}$ | $\{x = 0, y = 2x - 1\}$ |
| h) $f(x) = \frac{1+x-2x^2}{x+1}$ | $\{x = -1, y = -2x + 3\}$ |
| i) $f(x) = \frac{2x^3-3x^2}{(x-2)^2}$ | $\{x = 2, y = 2x + 5\}$ |
| j) $f(x) = -8x + \frac{-2x-2}{2x+4}$ | $\{x = -2, y = -8x - 1\}$ |

Nalezněte maximální intervaly monotonie funkce $f(x)$

1. $f(x) = \frac{2x+9}{(x+5)^2}$
2. $f(x) = e^{\sqrt{-2x^2+8}}$
3. $f(x) = \frac{\ln x}{x}$
4. $f(x) = \sqrt{x} \cdot e^{-x+2}$
5. $f(x) = \frac{-x^2+6x+7}{x+2}$
6. $f(x) = \frac{(2x+3)^2}{x-3}$
7. $f(x) = \frac{(3x+2)^2}{1-x}$
8. $f(x) = \frac{\sqrt{3x-5}}{x}$
9. $f(x) = x \cdot \sqrt{1-2x}$
10. $f(x) = \frac{3x^2+1}{x^2-1}$
11. $f(x) = x^2 \cdot \sqrt{9-x^2}$
12. $f(x) = 2 + 3 \ln(4x^2 - 1)$

$$13. f(x) = x + \ln(1 - 3x)$$

$$14. f(x) = 1 - \sqrt{10x - x^2 - 21}$$

$$15. f(x) = 1 + \ln(6 - x - x^2)$$

$$16. f(x) = 2 - \sqrt{24 - 2x - x^2}$$

$$17. f(x) = \frac{\sqrt{3x-1}}{x}$$

$$18. f(x) = \frac{1-x^2}{4-x^2}$$

$$19. f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 5$$

$$20. f(x) = \frac{x^3+4}{x^2}$$

$$21. f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

$$22. f(x) = (21 - 9x + x^2) \cdot e^x$$

$$23. f(x) = x - 2 \operatorname{arctg} x$$

$$24. f(x) = \frac{1+\ln x}{x}$$

$$25. f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$$

Výsledky:

1. Rostoucí na $(-5; -4 >$, klesající na $(-\infty; -5)$ a na $< -4; \infty)$.
2. Rostoucí na $(-2; 0)$, klesající na $(0; 2)$.
3. Rostoucí na $(0; e >$, klesající na $< e; \infty)$.
4. Rostoucí na $(0; \frac{1}{2})$, klesající na $< \frac{1}{2}; \infty)$.
5. Rostoucí na $< -5; -2)$ a na $(-2; 1 >$, klesající na $(-\infty; -5 >$ a na $< 1; \infty)$.
6. Rostoucí na $(-\infty; -\frac{3}{2} >$ a na $< \frac{15}{2}; \infty)$, klesající na $< -\frac{3}{2}; 3)$ a na $(3; \frac{15}{2} >$.
7. Rostoucí na $(-\frac{2}{3}; 1)$ a na $(1; \frac{8}{3} >$, klesající na $(-\infty; -\frac{2}{3})$ a na $< \frac{8}{3}; \infty)$.
8. Rostoucí na $(\frac{5}{3}; \frac{10}{3})$, klesající na $< \frac{10}{3}; \infty)$.
9. Rostoucí na $(-\infty; \frac{1}{3})$, klesající na $(\frac{1}{3}; \frac{1}{2})$.
10. Rostoucí na $(-\infty; -1)$ a na $(-1; 0 >$, klesající na $< 0; 1)$ a na $(1; \infty)$.
11. Rostoucí na $(-3; -\sqrt{6})$ a na $(0; \sqrt{6})$, klesající na $(-\sqrt{6}; 0)$ a na $(\sqrt{6}; 3)$.
12. Rostoucí na $(\frac{1}{2}; \infty)$, klesající na $(-\infty; -\frac{1}{2})$.
13. Rostoucí na $(-\infty; -\frac{2}{3} >$, klesající na $< -\frac{2}{3}; \frac{1}{3})$.
14. Rostoucí na $(5; 7)$, klesající na $(3; 5)$.
15. Rostoucí na $(-3; -\frac{1}{2} >$, klesající na $< -\frac{1}{2}; 2)$.
16. Rostoucí na $(-1; 4)$, klesající na $(-6; -1)$.
17. Rostoucí na $(\frac{1}{3}; \frac{2}{3})$, klesající na $< \frac{2}{3}; \infty)$.

18. Klesající na $(-\infty; 0)$ a na $(2; \infty)$, rostoucí na $(-\infty; -2)$ a na $(-2; 0)$.
19. Rostoucí na $(-2; 0)$ a na $(3; \infty)$, klesající na $(-\infty; -2)$ a na $(0; 3)$
20. Rostoucí na $(-\infty; 0)$ a na $(2; \infty)$, klesající na $(0; 2)$
21. Rostoucí na $(0; \infty)$, klesající na $(-\infty; 0)$
22. Rostoucí na $(-\infty; 3)$ a na $(4; \infty)$, klesající na $(3; 4)$
23. Rostoucí na $(-\infty; -1)$ a na $(1; \infty)$, klesající na $(-1; 1)$
24. Klesající na $(1; \infty)$, rostoucí na $(0; 1)$
25. Klesající na $(-1; 0)$ a na $(1; \infty)$, rostoucí na $(-\infty; -1)$ a na $(0; 1)$

Nalezněte maximální intervaly konvexity a konkávnosti funkcí:

1. $y = -\frac{1}{12}x^4 + \frac{1}{6}x^3 - 18x + 14$
 $\{konvexní\ na\ \langle 0; 1\rangle, konkávní\ na\ (-\infty; 0)\ a\ na\ \langle 1; \infty\rangle\}$
2. $y = \frac{1}{2}x^4 - 2x^3 - 45x^2 + 3x - 2$
 $\{konvexní\ na\ (-\infty; -3)\ a\ na\ \langle 5; \infty\rangle, konkávní\ na\ \langle -3; 5\rangle\}$
3. $y = (-3x + 21) \cdot e^x$
 $\{konvexní\ na\ (-\infty; 5), konkávní\ na\ \langle 5; \infty\rangle\}$
4. $y = x^4 \cdot e^x$
 $\{konvexní\ na\ \langle -6; -2\rangle\ a\ na\ \langle 0; \infty\rangle, konkávní\ na\ (-\infty; -6)\ a\ na\ \langle -2; 0\rangle\}$
5. $y = \frac{x}{4-x^2}$
 $\{konvexní\ na\ (-\infty; -2)\ a\ na\ \langle 0; 2\rangle, konkávní\ na\ \langle -2; 0\rangle\ a\ na\ \langle 2; \infty\rangle\}$
6. $y = \ln(-x^2 - 5x + 6)$
 $\{konkávní\ na\ (-6; 1)\}$
7. $y = \ln(x^2 + 1)$
 $\{konvexní\ na\ \langle -1; 1\rangle, konkávní\ na\ (-\infty; -1)\ a\ na\ \langle 1; \infty\rangle\}$
8. $y = \arctg(-x + 2)$
 $\{konvexní\ na\ (-\infty; 2), konkávní\ na\ \langle 2; \infty\rangle\}$
9. $y = \frac{-4x^2-3}{x^2+3}$
 $\{konvexní\ na\ (-\infty; -1)\ a\ na\ \langle 1; \infty\rangle, konkávní\ na\ \langle -1; 1\rangle\}$

Určete lokální extrémy funkce:

1. $f(x) = 3x^4 - 4x^3 - 36x^2 + 5$
 $\{OLMAX\ v\ x = 0; OLMIN\ v\ x = -2\ a\ v\ x = 3\}$
2. $f(x) = \frac{5}{3}x^3 - 5x + 6$
 $\{OLMIN\ v\ x = 1; OLMAX\ v\ x = -1\}$
3. $f(x) = \frac{x^3+4}{x^2}$
 $\{OLMIN\ v\ x = 2\}$

$$4. \quad f(x) = \ln(x^2 + 1)$$

$$\{OLMIN \text{ v } x = 0\}$$

$$5. \quad f(x) = \frac{1}{x} \cdot \ln \frac{1}{x}$$

$$\{OLMIN \text{ v } x = e\}$$

$$6. \quad f(x) = \operatorname{arctg}(4 - x^2)$$

$$\{OLMAX \text{ v } x = 0\}$$

$$7. \quad f(x) = x - 2 \operatorname{arctg}(x)$$

$$\{OLMAX \text{ v } x = -1; OLMIN \text{ v } x = 1\}$$

$$8. \quad f(x) = \operatorname{arctg}\left(\frac{x^2}{x+2}\right)$$

$$\{OLMAX \text{ v } x = -4; OLMIN \text{ v } x = 0\}$$

$$9. \quad f(x) = \frac{1 + \ln x}{x}$$

$$\{OLMAX \text{ v } x = 1\}$$

$$10. \quad f(x) = x^2 \cdot e^{-x^2}$$

$$\{OLMAX \text{ v } x = \pm 1; OLMIN \text{ v } x = 0\}$$

Nalezněte všechny extrémy funkce v na daném intervalu a určete jejich kvalitu:

$$1. \quad y = \frac{1}{3}x^3 - x^2 - 3x - 7, \quad x \in \langle -2; 0 \rangle$$

$$\{OL \text{ a } OA \text{ MAX v } -1; OA \text{ MIN v } -2\}$$

$$2. \quad y = \ln(4x^2 - 8x + 11) - \ln 2, \quad x \in \langle 0; 2 \rangle$$

$$\{OL \text{ a } OA \text{ MIN v } 1; A \text{ MAX v } 0 \text{ a } 2\}$$