XAMAT, YAMAT

Cvičení 4

Diferenciální počet funkcí jedné reálné proměnné

1. Najděte derivaci dané funkce a vzniklý funkční předpis co nejvíce zjednodušte:
   a) $y = 4x^5 - 2x^3$ $\{y' = 20x^4 - 6x^2\}$
   b) $y = 2\sqrt{x} - 3\sqrt[3]{x^2} + 2\sqrt[5]{x}$ $\left\{y' = \frac{1}{\sqrt{x}} - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + \frac{2}{5\sqrt[5]{x^4}}\right\}$
   c) $y = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{3}{x^3}$ $\left\{y' = -\frac{1}{x^2} + \frac{4}{x^3} - \frac{9}{x^4}\right\}$
   d) $y = x.\sqrt[3]{x} - \frac{\sqrt{x}}{x^2}$ $\left\{y' = \frac{4}{3}.\sqrt[3]{x} + \frac{3}{2\sqrt{x^5}}\right\}$
   e) $y = 2x^3.e^x$ $\{y' = 2x^2e^x(3 + x)\}$
   f) $y = (1 - x^2).\ln x$ $\left\{y' = -2x.\ln(x) + \frac{1}{x}(1 - x^2)\right\}$
   g) $y = \sin(x).\cos(x)$ $\{y' = cos^2(x) - sin^2(x) = \cos 2x\}$
   h) $y = (3x^2 - 5x + 1).\mathrm{tg}(x)$ $\left\{y' = (6x - 5)tg(x) + \frac{(3x^2-5x+1)}{cos^2x}\right\}$
   i) $y = \frac{\sin(x)}{x^2}$ $\left\{y' = \frac{xcos(x)-2\sin x}{x^3}\right\}$
   j) $y = \frac{1-x^2}{\ln x}$ $\left\{y' = \frac{-2x\ln x - \frac{1}{x} + x}{ln^2x}\right\}$
   k) $y = \frac{e^x}{x^2-5x}$ $\left\{y' = \frac{e^x(x^2-7x+5)}{(x^2-5x)^2}\right\}$
   l) $y = \frac{arctg(x)}{x^2}$ $\left\{y' = \frac{x-2(1+x^2)arctg(x)}{x^3(1+x^2)}\right\}$
   m) $y = \sin(3x)$ $\{y' = 3co\,s(3x)\}$
   n) $y = (1 - 2x + x^2)^9$ $\{y' = 9(1 - 2x + x^2)^8(-2 + 2x)\}$
   o) $y = e^{1-x^2}$ $\{y' = e^{1-x^2}(-2x)\}$
   p) $y = \ln(4x^2 - 5x + 1)$ $\left\{y' = \frac{8x-5}{4x^2-5x+1}\right\}$
   q) $y = cos^3(x)$ $\{y' = 3cos^2(x).(-sin(x))\}$
   r) $y = \mathrm{arctg}(\sqrt{x})$ $\left\{y' = \frac{1}{1+x}.\frac{1}{2\sqrt{x}}\right\}$
   s) $y = \sqrt{x^2 - 3x + 5}$ $\left\{y' = \frac{2x-3}{2\sqrt{x^2-3x+5}}\right\}$
   t) $y = x^2.\sin(1 - x^2)$ $\{y' = 2xsin(1 - x^2) - 2x^3co\,s(1 - x^2)\}$
   u) $y = 2x^3.ln^2(x)$ $\{y' = 2x^2(\ln x)(3\ln x + 2)\}$
   v) $y = 2\mathrm{arctg}\left(\frac{2x}{x+1}\right)$ $\left\{y' = \frac{4}{5x^2+2x+1}\right\}$
   w) $y = \sin(x).e^{\cos(x)}$ $\{y' = e^{cosx}(\cos(x) - sin^2(x))\}$
   x) $y = e^{-x}.\ln x$ $\left\{y' = e^{-x}(\frac{1}{x} - \ln x)\right\}$
   y) $y = arctg^3(2x)$ $\left\{y' = \frac{6arctg^2(2x)}{1+4x^2}\right\}$
   z) $y = \frac{x^2-3x+5}{\ln(1-x)}$ $\left\{y' = \frac{(-2x^2+5x-3)\ln(1-x)+x^2-3x+5}{(1-x)ln^2(1-x)}\right\}$
   aa) $y = \frac{\cos(2x)}{sin^2(x)}$ $\left\{y' = \frac{-2\cos(x).(2sin^2(x)+\cos(2x))}{sin^3(x)}\right\}$
   bb) $y = 3\ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$ $\left\{y' = \frac{3}{1-x^2}\right\}$
   cc) $y = e^{\sqrt{\frac{4-x}{x+2}}}$ $\left\{y' = -3e^{\sqrt{\frac{4-x}{x+2}}}\frac{1}{\sqrt{(x+2)^3}\sqrt{4-x}}\right\}$
   dd) $y = 4cotg^3(3x)$ $\left\{y' = -36.\frac{cotg^2(3x)}{sin^2(3x)}\right\}$

2. Najděte derivaci dané funkce a vzniklý funkční předpis co nejvíce zjednodušte:

a) $y = ln\ (e^{2x} + \sqrt{5 + e^{4x}})$ $\left\{y' = \frac{2e^{2x}}{\sqrt{5+e^{4x}}}\right\}$

b) $\mathrm{y} = \mathrm{x} - \frac{1-x^2}{2}.\ln\frac{1+x}{1-x}$ $\left\{y' = x.\ln\frac{1+x}{1-x}\right\}$

c) $\mathrm{y} = \mathrm{x}.\sqrt{4 - x^2} + 4\arcsin\ (\frac{x}{2})$ $\left\{y' = 2\sqrt{4 - x^2}\right\}$

d) $\mathrm{y} = \mathrm{x}.\mathrm{arctg}\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{x^2 - 1}$ $\left\{y' = arctg\sqrt{x^2 - 1} - \sqrt{\frac{x-1}{x+1}}\right\}$

e) $\mathrm{y} = \arcsin\ (2\mathrm{x}) + \mathrm{arctg}\sqrt{\frac{1-2x}{1+2x}}$ $\left\{y' = \frac{1}{\sqrt{1-4x^2}}\right\}$

f) $\mathrm{y} = 8.\arcsin\left(\frac{x}{4}\right) + \frac{x}{2}\sqrt{16 - x^2}$ $\left\{y' = \sqrt{16 - x^2}\right\}$

g) $\mathrm{y} = \sqrt{x}.\arcsin\ (\sqrt{x}) + \sqrt{1 - x}$ $\left\{y' = \frac{arcsin\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}\right\}$

h) $\mathrm{y} = \ln(\sin\ (\frac{x}{2}) + \sqrt{1 + sin^2(1 + sin^2(\frac{x}{2}))}$ $\left\{y' = \frac{co\,s\left(\frac{x}{2}\right)}{2\sqrt{1+sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}}\right\}$

i) $\mathrm{y} = \ln\sqrt{\frac{5-sin^2(2x)}{5+sin^2(2x)}}$ $\left\{y' = \frac{10si\,n(4x)}{sin^4(2x)-25}\right\}$

j) $\mathrm{y} = \ln\left(\sin(3x) + \sqrt{2 - cos^2(3x)}\right)$ $\left\{y' = \frac{3co\,s(3x)}{\sqrt{2-cos^2(3x)}}\right\}$

3. Pomocí L´Hopitalova pravidla vypočtěte limitu:

a) $\mathrm{y} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{2}-\sqrt{1+tg\left(\frac{x}{2}\right)}}{\cos\ (3x)}$ $\{-\frac{1}{6\sqrt{2}}\}$

b) $\mathrm{y} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+4x)}{e^x sin(3x)}$ $\{\frac{4}{3}\}$

c) $\mathrm{y} = \lim\limits_{x\to 1} \frac{1-tg^2\left(\frac{\pi x}{4}\right)}{1-xe^{2x^2-x-1}}$ $\{\frac{\pi}{4}\}$

d) $\mathrm{y} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{12}} \frac{1-2\,sin^2(3x)}{tg(3x)-1}$ $\{-1\}$

e) $\mathrm{y} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{3x-arcsin(2x)}{2x+arctg(3x)}$ $\{\frac{1}{5}\}$

f) $\mathrm{y} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1-x)}{\sqrt{2+sin(3x)}-\sqrt{2-sin(3x)}}$ $\{-\frac{\sqrt{2}}{3}\}$

g) $\mathrm{y} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{8}} \frac{1-tg(2x)}{cos4x}$ $\{1\}$

h) $\mathrm{y} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{\ln\left(2-\frac{x}{2}\right)}{cotg\left(\frac{\pi x}{4}\right)}$ $\{\frac{2}{\pi}\}$

i) $\mathrm{y} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{x+sin(5x)}{x.cos(3x)}$ $\{6\}$

j) $\mathrm{y} = \lim\limits_{x\to\frac{\pi}{16}} \frac{2sin(4x)-\sqrt{2}}{\mathrm{cotg}^2(4x)-1}$ $\{-\frac{\sqrt{2}}{4}\}$

k) $\mathrm{y} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln\left(2-e^{2x}\right)}{x+sin(3x)}$ $\{-\frac{1}{2}\}$

l) $\mathrm{y} = \lim\limits_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1+sin(3x)}}{tg(4x)}$ $\{-\frac{3}{8}\}$

m) $\mathrm{y} = \lim\limits_{x\to 2} \frac{2-\sqrt{3x-2}}{1-e^{2x-4}}$ $\{\frac{3}{8}\}$

n) $\mathrm{y} = \lim\limits_{x\to -1} \frac{e^{x^2+x}-1}{\sqrt{5-4x}-3}$ $\{\frac{3}{2}\}$

o) $y = \lim_{x \to 0} \frac{e^{-2x}-1}{5\sin(3x)-x}$ $\{-\frac{1}{7}\}$

p) $y = \lim_{x \to 0} \frac{\sqrt{9+5\sin(7x)}-3}{e^{3x}-1}$ $\{\frac{35}{18}\}$

q) $y = \lim_{x \to 0} \frac{\arcsin(7x)}{2-\sqrt{4+4\sin(9x)}}$ $\{-\frac{7}{9}\}$

r) $y = \lim_{x \to 0} \frac{e^{7x}-1}{\sqrt{9+\sin(5x)}-3}$ $\{\frac{42}{5}\}$

s) $y = \lim_{x \to \frac{\pi}{6}} \frac{\cos(2x)-\frac{1}{2}}{2-6tg^2(x)}$ $\{\frac{3}{16}\}$

t) $y = \lim_{x \to 0} \frac{tg(2x)}{3-\sqrt{9-3\sin(3x)}}$ $\{\frac{4}{3}\}$

u) $y = \lim_{x \to 0} \frac{\ln(7x+1)}{3-\sqrt{9-5\sin(8x)}}$ $\{\frac{21}{20}\}$

4. Napište rovnici tečny a normály ke grafu funkce f(x) v bodě T:

a) $f(x) = 4arctg\sqrt{\frac{2x-3}{3x-5}}; T = [2, ?]$ $\{t: x + y - \pi - 2 = 0; n: x - y + \pi - 2 = 0\}$

b) $f(x) = x.\ln\frac{x}{2}; T = [2e, ?]$ $\{t: 2x - y - 2e = 0; n: x + 2y - 6e = 0\}$

c) $f(x) = \sqrt{\frac{1+\sin(2x)}{1-\sin(2x)}}; T = [\pi, ?]$ $\{t: 2x - y - 2\pi + 1 = 0; n: x + 2y - \pi - 2 = 0\}$

d) $f(x) = e^{\frac{x^3-8}{3x-x^2}}; T = [2, ?]$ $\{t: 6x - y - 11 = 0; n: x + 6y - 8 = 0\}$

e) $f(x) = 3 + \frac{x+1}{(2x+1)^2}; T = [-1, ?]$ $\{t: x - y + 4 = 0; n: x + y - 2 = 0\}$

f) $f(x) = 3x^2\ln(2x-1); T = [1, ?]$ $\{t: 6x - y - 6 = 0; n: x + 6y - 1 = 0\}$

g) $f(x) = (x+1).e^{3x}; T = [0, ?]$ $\{t: 4x - y + 1 = 0; n: x + 4y - 4 = 0\}$

h) $f(x) = \frac{\sqrt{3x^2+4x+2}}{x}; T = [1, ?]$ $\{t: 4x + 3y - 13 = 0; n: 3x - 4y + 9 = 0\}$

i) $f(x) = \frac{2+\cos(2x)}{3-\sin(2x)}; T = \left[\frac{\pi}{4}, ?\right]$ $\{t: 4x + 4y - \pi - 4 = 0; n: 4x - 4y - \pi + 4 = 0\}$

j) $f(x) = x.e^{-2x}; T = \left[\frac{1}{2}, ?\right]$ $\left\{t: y = \frac{1}{2e}; n: x = \frac{1}{2}\right\}$

k) $f(x) = x.e^{x^2+7x-8}; T = [1, ?]$ $\{t: 10x - y - 9 = 0; n: x + 10y - 11 = 0\}$

l) $f(x) = 5 - \ln\sqrt{\frac{-3x+4}{5x+4}}; T = [0, ?]$ $\{t: x - y + 5 = 0; n: x + y - 5 = 0\}$

m) $f(x) = \frac{\pi}{2} - 2arctg\frac{2x^3-1}{3x-2}; T = [1, ?]$ $\{t: 3x + y - 3 = 0; n: x - 3y - 1 = 0\}$

n) $f(x) = \frac{(4-x)^2}{x+2}; T = [2, ?]$ $\{t: 5x + 4y - 14 = 0; n: 4x - 5y - 3 = 0\}$

o) $f(x) = 2 + \frac{4-2x}{(1-2x)^2}; T = [2, ?]$ $\{t: 2x + 9y - 22 = 0; n: 9x - 2y - 14 = 0\}$

p) $f(x) = 2.e^{\frac{x^2-1}{3x-2}}; T = [1, ?]$ $\{t: 4x - y - 2 = 0; n: x + 4y - 9 = 0\}$

q) $f(x) = ex^2 + e^{2x-1}; T = [1, ?]$ $\{t: 4ex - y - 2e = 0; n: x + 4ey - 8e^2 - 1 = 0\}$

r) $f(x) = \frac{9x}{\sqrt{2x-1}}; T = [5, ?]$ $\{t: 4x - 3y + 25 = 0; n: 3x + 4y - 75 = 0\}$

s) $f(x) = \sqrt{\frac{1+\sin(3x)}{1-\sin(3x)}}; T = [\pi, ?]$ $\{t: 3x + y - 3\pi - 1 = 0; n: x - 3y - \pi + 3 = 0\}$

t) $f(x) = (3-x).e^{2x}; T = [0, ?]$ $\{t: 5x - y + 3 = 0; n: x + 5y - 15 = 0\}$

5. Diferenciál funkce, kontrolu správnosti proveďte výpočtem na kalkulačce (bez výsledku)

a) Je dána funkce $f(x) = \sqrt{1-x}$, bod $a = 0$. Pomocí diferenciálu odhadněte $\sqrt{0{,}9}$ a $\sqrt{0{,}99}$.

b) Je dána funkce $f(x) = \sqrt[3]{1+x}$, bod $a = 0$. Pomocí diferenciálu odhadněte $\sqrt[3]{0{,}9}$ a $\sqrt[3]{0{,}99}$.

6. Určete diferenciál pro funkce
   a) $y = x^2 \sin 2x$ $\{dy = (2x \sin 2x + 2x^2 \cos 2x)dx\}$
   b) $y = \frac{s}{1+2s}$ $\{dy = 1/(1+2s)^2\, ds\}$
   c) $y = \operatorname{tg}\sqrt{t}$ $\{dy = 1/\left(2\sqrt{t}\cos^2\sqrt{t}\right) dt\}$
   d) $y = (x + \sin 2x)^5$ $\{dy = 5(x + \sin 2x)^4(1 + 2\cos 2x)dx\}$
7. Nalezněte diferenciál dy a vypočtěte dy pro dané hodnoty dx a x
   a) $y = \operatorname{tg} x,\ x = \frac{\pi}{4},\ dx = -0{,}1$ $\{-0{,}2\}$
   b) $y = \cos \pi x,\ x = \frac{1}{3},\ dx = -0{,}02$ $\{0{,}0544\}$
   c) $y = \sqrt{3 + x^2},\ x = 1,\ dx = -0{,}1$ $\{-0{,}05\}$
   d) $y = \frac{x+1}{x-1},\ x = 2,\ dx = 0{,}05$ $\{-0{,}1\}$
8. Pomocí diferenciálu vypočtěte přibližně a výsledek zkontrolujte na kalkulačce (bez výsledků)
   a) $(1{,}999)^4$
   b) $\frac{1}{4{,}002}$
   c) $\sqrt{99{,}8}$
   d) $\sqrt[3]{1001}$
9. Hrana krychle byla změřena v centimetrech jako $a = 30 \pm 0{,}1$. Pomocí diferenciálu odhadněte maximální absolutní chybu, relativní chybu a relativní chybu v procentech při výpočtu povrchu, resp. objemu dané krychle. (bez výsledků)
10. Poloměr koule byl změřen v centimetrech jako $a = 84 \pm 0{,}5$. Pomocí diferenciálu odhadněte maximální absolutní chybu, relativní chybu a relativní chybu v procentech při výpočtu povrchu, resp. objemu dané koule. (bez výsledků)