

XAMAT, YAMAT

Cvičení 3

Funkce a její limita

1. Vypočítejte následující hodnoty:

- | | |
|--|---------------------------|
| a) $\arcsin(-1)$ | $\{-\frac{\pi}{2}\}$ |
| b) $\arccos(0)$ | $\{\frac{\pi}{2}\}$ |
| c) $\operatorname{arctg}(1)$ | $\{\frac{\pi}{4}\}$ |
| d) $\operatorname{arccotg}(-\sqrt{3})$; | $\{\frac{5\pi}{6}\}$ |
| e) $\sin(\arcsin(\frac{1}{2}))$ | $\{\frac{1}{2}\}$ |
| f) $\cos(\arccos(-\frac{\sqrt{3}}{2}))$ | $\{-\frac{\sqrt{3}}{2}\}$ |
| g) $\arcsin(\sin(\frac{\pi}{3}))$ | $\{\frac{\pi}{3}\}$ |
| h) $\operatorname{arccotg}(\operatorname{cotg}(-\frac{\pi}{2}))$ | $\{\frac{\pi}{2}\}$ |
| i) $\operatorname{arctg}(\operatorname{tg}(-\frac{\pi}{6}))$ | $\{-\frac{\pi}{6}\}$ |

2. Rozhodněte, zda existují následující limity a, pokud ano, vypočtěte je:

- | | |
|---|-------------------------|
| a) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x+5}{x^3+1}$ | $\{4\}$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x-1}{x^2-1}$ | $\{\frac{1}{2}\}$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{x^2-1}$ | $\{\text{neexistuje}\}$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x+1}{(x-1)^2}$ | $\{\infty\}$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow 4} \frac{x^2-5x+4}{7x-x^2-12}$ | $\{-3\}$ |
| f) $\lim_{x \rightarrow -1} (\frac{6}{x^2-1} - \frac{3}{x^2+x})$ | $\{\frac{3}{2}\}$ |
| g) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-\sqrt{4x-3}}{x^2-5x+6}$ | $\{\frac{1}{3}\}$ |
| h) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x^2-5x+7}{6x-2x^2-9}$ | $\{-2\}$ |
| i) $\lim_{x \rightarrow \infty} (\frac{3x-2}{x+1} - \frac{5x+7}{2x+3})$ | $\{\frac{1}{2}\}$ |

3. Vypočítejte limity elementárních funkcí v krajních bodech definičního oboru:

- | | |
|--|----------------------|
| a) $\lim_{x \rightarrow \infty} e^x$ | $\{\infty\}$ |
| b) $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x$ | $\{0\}$ |
| c) $\lim_{x \rightarrow \infty} 0,4^x$ | $\{0\}$ |
| d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x$ | $\{\infty\}$ |
| e) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \ln x$ | $\{-\infty\}$ |
| f) $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arctg} x$ | $\{\frac{\pi}{2}\}$ |
| g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arctg} x$ | $\{-\frac{\pi}{2}\}$ |
| h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arccotg} x$ | $\{0\}$ |
| i) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \operatorname{arccotg} x$ | $\{\pi\}$ |

- j) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^+} \operatorname{tg} x$ $\{-\infty\}$
 k) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}^-} \operatorname{tg} x$ $\{\infty\}$

4. Spočítejte limity funkcí v krajních bodech definičního oboru:

- a) $f(x) = \frac{1}{2x-3}$ $\left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow \frac{3}{2}^\pm} f(x) = \pm\infty \right\}$
 b) $f(x) = \ln(3-5x)$ $\left\{ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow \frac{3}{5}} f(x) = -\infty \right\}$
 c) $f(x) = 4x^2 - x^3 + 9$ $\left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = -\infty, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \infty \right\}$
 d) $f(x) = \frac{e^x}{1+e^x}$ $\left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = 1, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \right\}$
 e) $f(x) = \sin e^x$ $\left\{ \lim_{x \rightarrow \infty} f(x) \text{ neexistuje}, \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 0 \right\}$
 f) $f(x) = \frac{3x^2-5x+2}{x^2+8x+16}$ $\left\{ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 3, \lim_{x \rightarrow -4} f(x) = \infty \right\}$
 g) $f(x) = \ln \sqrt{\frac{x}{x+2}}$ $\left\{ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow -2^-} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = -\infty \right\}$
 h) $f(x) = \arcsin \frac{x}{x-1}$ $\left\{ \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = \frac{\pi}{2}, f\left(\frac{1}{2}\right) = -\frac{\pi}{2} \right\}$
 i) $f(x) = \frac{3x^2+x-14}{x^3-2x^2}$ $\left\{ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 2} f(x) = \frac{13}{4} \right\}$
 j) $f(x) = \frac{\arctg(x+1)}{x}$ $\left\{ \lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 0, \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \infty, \lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = -\infty \right\}$

5. Vypočítejte limitu funkce:

- a) $\lim_{x \rightarrow \infty} 4e^x$ $\{\infty\}$
 b) $\lim_{x \rightarrow \infty} 7e^{-x}$ $\{0\}$
 c) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3}{2^x}$ $\{\infty\}$
 d) $\lim_{x \rightarrow \infty} \ln x$ $\{\infty\}$
 e) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2}$ $\{0\}$
 f) $\lim_{x \rightarrow 0} \operatorname{tg}(x)$ $\{0\}$
 g) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \arctg(x)$ $\{-\frac{\pi}{2}\}$
 h) $\lim_{x \rightarrow \infty} \operatorname{arccotg}(x)$ $\{0\}$
 i) $\lim_{x \rightarrow 2} (x^2 + 2x - 3)$ $\{5\}$
 j) $\lim_{x \rightarrow 3} \frac{x-1}{2x+1}$ $\{\frac{2}{7}\}$
 k) $\lim_{x \rightarrow 5^+} \frac{3}{x-5}$ $\{\infty\}$
 l) $\lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{6}{x-4}$ $\{-\infty\}$
 m) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{3x^3-2x^2+5x}{4x^3+5x-6}$ $\{\frac{3}{4}\}$
 n) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^5-2x^3+7}{-3x^5+7x^2+9x}$ $\{-\frac{1}{3}\}$
 o) $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^4+3x-7}{3x^3+5x^2}$ $\{\infty\}$
 p) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{5x^2-4x+1}{3x^3+6x}$ $\{0\}$
 q) $\lim_{x \rightarrow -2} \frac{x^2-4}{x+2}$ $\{-4\}$

$$\begin{array}{ll} \text{r)} \quad \lim_{x \rightarrow -1} \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 4x - 5} & \left\{\frac{2}{3}\right\} \\ \text{s)} \quad \lim_{x \rightarrow 7^+} \frac{x+5}{x-7} & \{\infty\} \\ \text{t)} \quad \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x}{x^2 - 2x + 1} & \{\infty\} \end{array}$$

6. Funkce definovaná po částech

a) Nalezněte limity funkce zleva i zprava v bodech $-5; 0; 1$ a $\pm\infty$

$$f(x) = \begin{cases} x + 2; & \text{pro } x < 0 \\ 1 - x; & \text{pro } x \geq 0 \end{cases} \quad \{-3; -3; 2; 1; 0; 0; -\infty; -\infty\}$$

b) Nalezněte limity funkce zleva i zprava v bodech $-5; 2; 4$ a $\pm\infty$

$$f(x) = \begin{cases} 3 - \frac{1}{2}x; & \text{pro } x \leq 2 \\ 2x - 5; & \text{pro } x > 2 \end{cases} \quad \{5,5; 5,5; 2; -1; 3; 3; \infty; \infty\}$$

c) Nalezněte limity funkce zleva i zprava v bodech $-5; -1; 4$ a $\pm\infty$

$$f(x) = \begin{cases} x + 2; & \text{pro } x \leq -1 \\ x^2; & \text{pro } x > -1 \end{cases} \quad \{-3; -3; 1; 1; 16; 16; -\infty; \infty\}$$

d) Nalezněte limity funkce zleva i zprava v bodech $-5; -3; 3; 4$ a $\pm\infty$

$$f(x) = \begin{cases} x + 9; & \text{pro } x < -3 \\ -2x; & \text{pro } |x| \leq 3 \\ -6; & \text{pro } x > 3 \end{cases} \quad \{4; 4; 6; 6; -6; -6; -6; -6; -\infty; -6\}$$