

## Teorie Reziduí

### Laurentova Řada (LŘ)

Nechť je  $\Omega$  mezikruhovatá oblast se středem v bodě  $z_0$ . Jestliže komplexní funkce  $f(z)$  je holomorfní v oblasti  $\Omega$ , potom pro každé  $z \in \Omega$  je možné funkci  $f(z)$  vyjádřit Laurentovou Řadou:  
$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n (z - z_0)^n,$$

kde konstanty  $a_n$  jsou určeny vzorcem:  $a_n = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{f(z)}{(z - z_0)^{n+1}} dz$  a  $\Gamma$  je libovolná kružnice ležící v mezikruží  $\Omega$ .

- Část  $\sum_{n=-\infty}^{-1} a_n (z - z_0)^n$  se nazývá hlavní část LŘ
- Taylorova Řada je zvláštním případem LŘ (hlavní část je rovna 0)
- Pro rozvoj racionální komplexní funkce v LŘ využíváme vzorec na součet geometrické řady (je to jednodušší, než křivkový integrál)
  - Geometrická řada: posloupnost  $\{a_n\}_{n=1}^{\infty} = \{a_0 q^n\}_{n=0}^{\infty}$  se nazývá geometrická posloupnost. Je-li  $|q| \geq 1$  GŘ diverguje, je-li  $|q| < 1$  GŘ konverguje a  $\sum_{n=0}^{\infty} a_0 q^n = \frac{a_0}{1-q}$ .

### Singulární body komplexní funkce, Reziduová věta

Nechť komplexní funkce  $f(z)$  je holomorfní v určitém okolí bodu  $z_0$  s výjimkou bodu  $z_0$ . Pak se  $z_0$  nazývá *singulárním bodem* funkce  $f(z)$ .

Klasifikace singulárních bodů:

- Odstranitelná singularita
  - Hlavní část LŘ v bodě  $z_0$  se rovná 0
  - $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = a_0$  a je konečná
- Podstatná singularita
  - Hlavní část LŘ v bodě  $z_0$  se má nekonečně mnoho nenulových členů
  - $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$  neexistuje
- Pól  $m$ -tého řádu
  - Hlavní část LŘ v bodě  $z_0$  se má konečně mnoho nenulových koeficientů
  - tj. pro  $a_n = 0$  pro  $n < -m$ ;  $a_{-m} \neq 0$  a platí, že  $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z) = \infty$

Nejdůležitější singulární body komplexní funkce jsou póly.

- Pro určení řádu pólu užíváme limity  $\lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) f(z) = a_{-m}$ , která musí být vždy konečná a nenulová.
- Koeficient  $a_{-1}$  z LŘ funkce  $f(z)$  v bodě  $z_0$  se nazývá reziduem funkce  $f(z)$  v bodě  $z_0$ . Značíme  $a_{-1} = \operatorname{res}_{z=z_0} f(z)$
- Vzorec pro určení rezidua pro pól prvního řádu  $\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \lim_{z \rightarrow z_0} (z - z_0) \cdot f(z)$
- Vzorec pro určení rezidua pro pól m-tého řádu

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{1}{(m-1)!} \lim_{z \rightarrow z_0} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} [(z - z_0)^m \cdot f(z)]$$

- Necht'  $f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)}$ , kde funkce  $\varphi(z)$  a  $\psi(z)$  jsou holomorfní v bodě  $z_0$ ,  $\varphi(z_0) \neq 0$ ,  $\psi(z_0) = 0$ ,  $\psi'(z_0) \neq 0$ , potom má funkce  $f(z)$  v bodě  $z_0$  pól prvního řádu a platí, že

$$\operatorname{res}_{z=z_0} f(z) = \frac{\varphi(z_0)}{\psi'(z_0)}.$$

#### Reziduová Věta

Necht' komplexní funkce  $f(z)$  je holomorfní uvnitř a na jednoduché uzavřené, kladně orientované křivce  $\Gamma$  s výjimkou pólů  $z_1, z_2, \dots, z_n$ . Uvnitř křivky  $\Gamma$  potom platí:

$$\int_{\Gamma} f(z) dz = 2\pi i \cdot \sum_{k=1}^n \operatorname{res}_{z=z_k} f(z).$$

Sčítáme tedy pouze rezidua v pólech, které leží uvnitř křivky  $\Gamma$ .

PŘ1

PŘ2

PŘ3

PŘ4

PR1) Vypočítejte residua v pólech fu  $f(z) = \frac{1}{z^3 - z^5}$

fu  $f(z)$  je racionální/bimerná fu  $\Rightarrow$  singulární body jsou kořeny jmenovatele

$$z^3 - z^5 = 0$$

$$z^3(1 - z^2) = 0$$

$$z^3(1 - z)(1 + z) = 0 \Leftrightarrow z^3 = 0 \vee 1 - z = 0 \vee 1 + z = 0$$

$$\begin{array}{ccc} z_1 = 0 & z_2 = 1 & z_3 = -1 \\ k=3 & k=1 & k=1 \\ \text{pól 3. řádu} & \text{pól 1. řádu} & \text{pól 1. řádu} \end{array}$$

$$\text{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \cdot \frac{1}{z^3 - z^5} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{z-1 \text{ (1)}}{z^3(1-z)(1+z)} = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{-1}{z^3(1+z)} = \frac{-1}{1 \cdot 2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

$$\text{res}_{z=-1} f(z) = \lim_{z \rightarrow -1} (z+1) \cdot \frac{1}{z^3 - z^5} = \lim_{z \rightarrow -1} \frac{z+1}{z^3(1-z)(1+z)} = \frac{1}{(-1)^3 \cdot 2} = \underline{\underline{-\frac{1}{2}}}$$

$$\begin{aligned} \text{res}_{z=0} f(z) &= \frac{1}{2!} \lim_{z \rightarrow 0} \left[ (z-0)^2 \frac{1}{z^3 - z^5} \right]' = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \left[ \frac{z^2}{z^3(1-z^2)} \right]' = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \left[ \frac{1}{1-z^2} \right]' = \\ &= \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \left( \frac{-(-2z)}{(1-z^2)^2} \right)' = \frac{1}{2} \lim_{z \rightarrow 0} \frac{2(1-z^2)^2 + 2z \cdot 2(1-z^2) \cdot (-2z)}{(1-z^2)^4} = \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{2 \cdot 1 + 2 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 0}{1} = \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{1} = \underline{\underline{\frac{1}{2}}} \end{aligned}$$

PR2) Vypočítejte residua v pólech fu  $f(z) = \frac{1}{\sin z}$

$$f(z) = \frac{\varphi(z)}{\psi(z)} \rightarrow \begin{array}{l} \varphi(z) = 1 \\ \psi(z) = \sin z \end{array} \quad \text{pro } \text{Holomorfní v } \mathbb{C}$$

fu  $\varphi(z) = 1$  je holomorfní

$\psi(z) = \sin z$  je holomorfní v bodech  $\sin z = 0$

$$z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$$

$$(\sin z)' = \cos z \quad \text{v pólech } z_k \text{ je holomorfní}$$

$\Rightarrow f(z)$  má v pólech  $z = k\pi, k \in \mathbb{Z}$  pól 1. řádu

$$\text{res}_{z=z_k} f(z) = \frac{1}{(\sin z)' } = \frac{1}{\cos k\pi} = \frac{1}{(-1)^k} = \underline{\underline{(-1)^k}}$$

Pr3) Určete a dají-li se najít póla a vyjádřete v těchto pólech residua.

a)  $f(z) = \frac{1}{1+z^3}$

$1+z^3=0$

$z^3=-1$

$z=\sqrt[3]{-1}$

$H=1$

$\cos y = -1 \text{ } y = \pi + 2k\pi$

$\sin y = 0$

$z = \sqrt[3]{-1} \left[ \cos \frac{\pi+2k\pi}{3} + i \sin \frac{\pi+2k\pi}{3} \right] =$

$z = \cos \frac{\pi}{3} + i \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$z = \cos \pi + i \sin \pi = -1$

$z = \cos \frac{5\pi}{3} + i \sin \frac{5\pi}{3} = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i$

$(1+z^3)' = 3z^2$  je nulová k pólu

$\text{res}_{z=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i} f(z) = \frac{1}{3z^2} = \frac{1}{3\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2} = \frac{1}{3\left(\frac{1}{4}+2\frac{1}{2}\frac{\sqrt{3}}{2}i+\frac{3}{4}i^2\right)} = \frac{1}{3\left(-\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} = \frac{1}{3\left(-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)\left(-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)} =$

$= \frac{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{3\left(\frac{1}{4}-\frac{3}{4}i^2\right)} = \frac{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{3\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\right)} = \frac{-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i}{3 \cdot 1} = -\frac{1}{6} - \frac{\sqrt{3}}{6}i$

$\text{res}_{z=-1} f(z) = \frac{1}{3z^2} = \frac{1}{3(-1)^2} = \frac{1}{3}$

$\text{res}_{z=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i} f(z) = \frac{1}{3z^2} = \frac{1}{3\left(\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)^2} = \dots = -\frac{1}{6} + \frac{\sqrt{3}}{6}i$

Pr4) Vyjádřete integrály pomocí residui

a)  $\int \frac{dz}{z(z-1)^2}$

$\Gamma: z^2-2z+1$

$(z^2-2z+1)' = 2z-2$

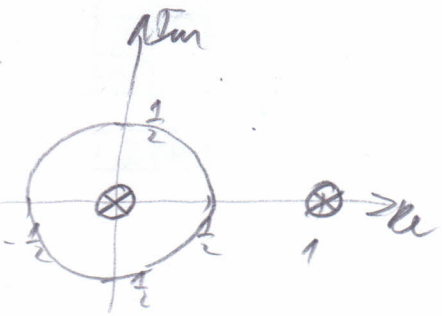
$\text{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{2z-2} = -\frac{1}{2}$

$z(z-1)^2=0 \Leftrightarrow z_1=0 \vee z_{2,3}=1$

IN

OUT

$\Gamma: |z|=\frac{1}{2}$



$\int_{\Gamma} \frac{1}{z(z-1)^2} dz = 2\pi i \sum_{k=1}^1 \text{res}_{z=z_k} f(z) = 2\pi i \cdot 1 = 2\pi i$

$$b) \int_{\Gamma} \frac{z^2 + z + 1}{z(z-1)^2} dz$$

$$\text{p.d. } z(z-1)^2 = 0$$

$$\Leftrightarrow z_1 = 0 \vee z_2 = 1$$

$$1. \text{r.}$$

$$2. \text{r.}$$

$$z(z^2 - 2z + 1)$$

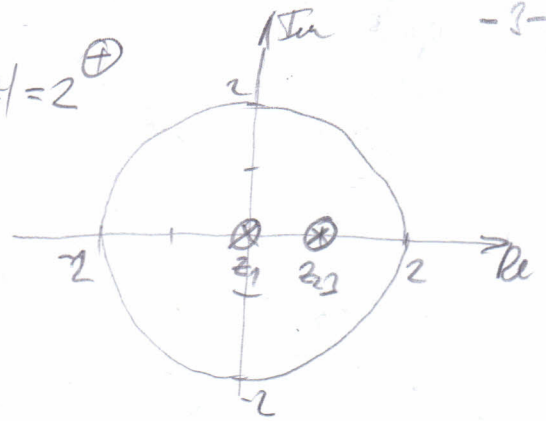
$$z^3 - 2z^2 + z$$

$$(z^3 - 2z^2 + z)' = 3z^2 - 4z + 1$$

$$IN$$

$$IN$$

$$\Gamma: |z| = 2 \oplus$$



$$\text{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{z^2 + z + 1}{3z^2 - 4z + 1} = \frac{1}{1} = 1$$

$$\begin{aligned} \text{res}_{z=1} f(z) &= \frac{1}{1} \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \cancel{(z-1)^2} \frac{z^2 + z + 1}{\cancel{z(z-1)^2}} \right]' = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{z^2 + z + 1}{z} \right]' = \lim_{z \rightarrow 1} \left( z + 1 + \frac{1}{z} \right)' \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left( 1 + 0 - \frac{1}{z^2} \right) = 1 - 1 = 0 \end{aligned}$$

$$\int_{\Gamma} \frac{z^2 + z + 1}{z(z-1)^2} dz = 2\pi i \left[ \text{res}_{z=0} f(z) + \text{res}_{z=1} f(z) \right] = 2\pi i (1 + 0) = \underline{\underline{2\pi i}}$$

Pr: Vypočíte residue v pólech fu  $z(f) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2}$

residue:  $(z^2+1)^2 = 0$   
 $(z+i)^2(z-i)^2 = 0 \quad z_1 = i \quad z_2 = -i \quad \text{póly 2. ř}$

$$\begin{aligned} \text{res}_{z=i} f(z) &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow i} \left[ (z-i)^2 \frac{z^2}{(1+z^2)^2} \right]' = \lim_{z \rightarrow i} \left[ \frac{z^2(z-i)^2}{(z-i)^2(z+i)^2} \right]' = \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \left[ \frac{z^2}{(z+i)^2} \right]' = \lim_{z \rightarrow i} \frac{2z(z+i)^2 - z^2 \cdot 2(z+i)}{(z+i)^4} = \\ &= \lim_{z \rightarrow i} \frac{2z^2 + 4iz - 2z^2}{(z+i)^3} = \frac{-2}{8i^3} = \underline{\underline{-\frac{1}{4}i}} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{res}_{z=-i} f(z) &= \lim_{z \rightarrow -i} \left[ (z+i)^2 \frac{z^2}{(1+z^2)^2} \right]' = \lim_{z \rightarrow -i} \left[ \frac{z^2(z+i)^2}{(z-i)^2(z+i)^2} \right]' = \\ &= \lim_{z \rightarrow -i} \frac{2z(z-i)^2 - z^2 \cdot 2(z-i)}{(z-i)^3} = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{2z^2 - 4iz - 2z^2}{(z-i)^3} = \frac{-2}{8(-i)^3} = \underline{\underline{\frac{1}{4}i}} \end{aligned}$$

Pr: Vypočíte residue v pólech kufel fu'

a)  $f(z) = \frac{1}{1+z^4}$  (podíl 2 holomorfních fu')  $g(z) = 1$  je neměnná  
 $1+z^4$

$(1+z^4)' = 4z^3$   
 v pólech  $\neq 0$

$(z^2+i)(z^2-i) = 0 \Leftrightarrow z^2+i=0 \vee z^2-i=0$

$z^2 = -i$   
 $z = \sqrt{-i}$

$i \cdot |i| = 1$

$\cos \varphi = 0$   
 $\sin \varphi = -1 \quad \left\{ \varphi = \frac{3\pi}{2} + 2k\pi \right.$

$z^2 = i$   
 $z = \sqrt{i}$

$i \cdot |i| = 1$

$\cos \varphi = 0$   
 $\sin \varphi = 1 \quad \left\{ \varphi = \frac{\pi}{2} + 2k\pi \right.$

$\sqrt{-i} = \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$      $\sqrt{i} = \cos \frac{\pi}{4} + i \sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$

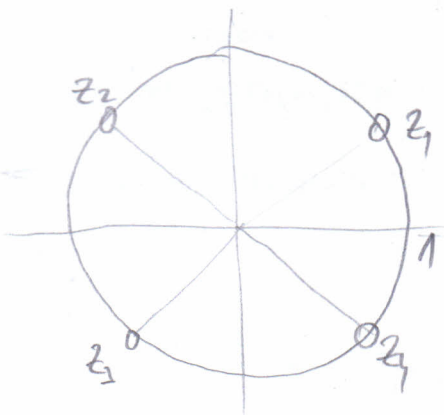
$k=0: \cos \frac{3\pi}{4} + i \sin \frac{3\pi}{4} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$

$k=0: \frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2}$

$k=1: \cos \frac{7\pi}{4} + i \sin \frac{7\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$

$k=1: -\frac{\sqrt{2}}{2} - i \frac{\sqrt{2}}{2}$

4 póly 1. ř



$$\operatorname{res}_{z=z_1} f(z) = \lim_{z \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{1}{4z_1^3} = \lim_{z \rightarrow \frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}} \frac{z_1}{4z_1^4} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}}{4 \cdot (-1)} = -\frac{1}{4} z_1$$

$$\operatorname{res}_{z=z_2} f(z) = -\frac{1}{4} z_2 \quad \dots \quad \operatorname{res}_{z=z_k} = -\frac{1}{4} z_k$$

$$b) f(z) = \frac{1}{1+z^4} \quad 1+z^4=0 \quad z_k = \frac{(2k+1)\pi i}{4} \quad k=0,1,\dots,3$$

derivace  $1+z^4 = 4z^3$  je v  $z_k \neq 0 \rightarrow$  pole 1. řádu

$$\operatorname{res}_{z=z_k} f(z) = \frac{1}{4z_k^3} = \frac{z_k}{4z_k^4} = -\frac{1}{4} z_k$$

pro úlohu n. stupně f(z) řád polu a ypočíte v těchto pólech rezidua

$$a) f(z) = \frac{1}{z(1-z^2)}$$

$$z(1-z^2)=0$$

$$z(1-z)(1+z)=0$$

$$z_1=0 \quad z_2=1 \quad z_3=-1$$

$$(z-z^3)' = 1-3z^2 \neq 0 \text{ pro } z_k$$

1. ř.

$$\operatorname{res}_{z=0} f(z) = \frac{1}{1-3z^2} = 1$$

$$\operatorname{res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{1-3z^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\operatorname{res}_{z=-1} f(z) = \frac{1}{1-3z^2} = -\frac{1}{2}$$

$$b) f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-2)^2}$$

$$(z-1)(z-2)^2=0$$

$$z_1=1 \quad z_2=2$$

1. ř. 2. ř.

$$[(z-1)(z-2)^2]' = (z-2)^2 + (z-1) \cdot 2(z-2) = z^2 - 4z + 4 + 2z^2 - 6z + 4 = 3z^2 - 10z + 8 \neq 0 \text{ pro } z_k$$

$$\operatorname{res}_{z=1} f(z) = \frac{1}{3z^2 - 10z + 8} = 1$$

$$\operatorname{res}_{z=2} f(z) = \lim_{z \rightarrow 2} \left[ (z-2)^2 \frac{1}{(z-1)(z-2)^2} \right]' = \lim_{z \rightarrow 2} \left( \frac{1}{z-1} \right)' = \lim_{z \rightarrow 2} -\frac{1}{(z-1)^2} = -\frac{1}{1} = -1$$

$$c) f(z) = \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z-1)}$$

$$(z^2+1)^2(z-1) = 0$$

$$(z+1)^2(z-1)^2(z-1) = 0$$

$$z_0 = -1 \quad z_1 = 1 \quad z_2 = 1$$

$$1. \tilde{A} \quad \text{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \frac{z^2}{(z^2+1)^2(z-1)} = \frac{1}{4}$$

$$\begin{aligned} 2. \tilde{R}: \quad \text{res}_{z=1} f(z) &= \frac{1}{1!} \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (z-1) \frac{z^2}{(z+1)^2(z-1)^2(z-1)} \right]' = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{z^2}{(z+1)^2(z-1)} \right]' = \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} \left[ \frac{z^2}{z^3 - z^2 + 2iz^2 - 2zi - z + 1} \right]' = \lim_{z \rightarrow 1} \frac{2z(z^3 - z^2 + 2iz^2 - 2zi - z + 1) - z^2(3z^2 - 2z + 4i - 2)}{(z^3 - z^2 + 2iz^2 - 2zi - z + 1)^2} = \\ &= \frac{2i(i^3 - 1^2 + 2i^3 - 2i^2 - 1 + 1) + 1^2(3i^2 - 2i + 4i^2 - 2i - 1)}{(i^3 - i^2 + 2i^3 - 2i - i + 1)^2} = \frac{2+4i+4i^2+2i-8-4i-4}{(-1+1-2i+2-i+1)^2} = \\ &= \frac{4i}{(1-4i)^2} = \frac{4i}{16-32i-16} = \frac{4i}{-32i} = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2. \tilde{R}: \quad \text{res}_{z=-1} f(z) &= \lim_{z \rightarrow -1} \left[ (z+1)^2 \frac{z^2}{(z+1)^3(z-1)^2(z-1)} \right]' = \lim_{z \rightarrow -1} \left[ \frac{z^2}{(z-1)^2(z-1)} \right]' = \\ &= \lim_{z \rightarrow -1} \frac{2z(z-1)^2(z-1) - z^2[2(z-1)(z-1) + (z-1)^2]}{(z-1)^4(z-1)^2} = \\ &= \frac{(-2i)(-2i)^2(-1-1) - 1^2[2(-2i)(-1-1) + (-2i)^2]}{(2i)^4(-1-1)^2} = \frac{(-2i)(4i^2)(-1-1) + [(-4i)(-1-1) + 4i^2]}{16i^4(-1-1)^2} = \\ &= \frac{8i(-1-1) + (4i^2 + 4i) - 4}{16(i^4 + 2i + 1)} = \frac{-8i^2 - 8i + 4i^2 + 4i - 4}{16(i^4 + 2i + 1)} = \frac{-4i}{32i} = -\frac{1}{8} \end{aligned}$$

4)  $f(z) = \frac{1}{\cos z}$   $\left. \begin{array}{l} \psi(z) = 1 \\ \psi(z) = \cos z \end{array} \right\}$  H funkce  $\psi(z) = 1$  nemá nulů

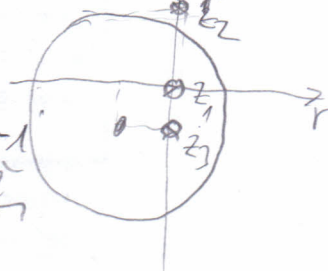
$\cos z = 0 \Rightarrow z_k = \frac{\pi}{2} + k\pi, k \in \mathbb{Z}$  pols 1. R.

$\text{res}_{z=z_k} f(z) = \frac{1}{-\sin(\frac{\pi}{2} + k\pi)} = \frac{1}{-(-1)^k} = (-1)^{k+1} \underline{\underline{1 \text{ k } \cos}}$   
 $z = \frac{\pi}{2} + k\pi$

Pr Vypočíte následující integrály pomocí Residuí

a)  $\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z(z^2+1)} dz$   
 $\frac{z^3+z}{3z^2+1}$

$\Gamma: |z+1+i| = 2$   $\oplus$   $\text{Dor.}$   
 $z(z^2+1) = 0$   
 $z_1 = 0 \vee (z^2 = -1) \Rightarrow z_2 = i \vee z_3 = -i$   
 $\begin{array}{ccc} 1.R & 1.R & 1.R \\ \in \Gamma & \notin \Gamma & \in \Gamma \end{array}$



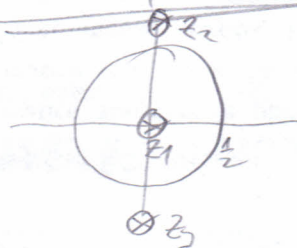
$\text{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{e^z}{3z^2+1} = 1$

$\text{res}_{z=-i} f(z) = \lim_{z \rightarrow -i} \frac{e^z}{3z^2+1} = \frac{e^{-i}}{-2} = -\frac{1}{2} e^{-i} = -\frac{1}{2} [\cos(-1) + i \sin(-1)]$   
 $= -\frac{1}{2} [\cos 1 - i \sin 1]$

$\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z(z^2+1)} dz = 2\pi i [\text{res}_{z=0} f(z) + \text{res}_{z=-i} f(z)] = 2\pi i [1 - \frac{1}{2} (\cos 1 - i \sin 1)] =$   
 $= 2\pi i - \pi i \cos 1 - \pi \sin 1 = -\pi \sin 1 + i(2\pi - \pi \cos 1)$

b)  $\int_{\Gamma} \frac{e^z}{z(z^2+1)} dz \oplus \Gamma: |z| = \frac{1}{2} \oplus \text{Dor.}$

$\begin{array}{ccc} z_1=0 & z_2=i & z_3=-i \\ 1.R & 1.R & 1.R \\ \in \Gamma & \notin \Gamma & \notin \Gamma \end{array}$



$\oplus 2\pi i [\text{res}_{z=0} f(z)] = 2\pi i$  (1/2 min. příklad)

c)  $\int_{\Gamma} \frac{1}{z(z-1)^2} dz \oplus \Gamma: |z|=2 \oplus \text{Dor.}$   
 $\frac{z^3-2z^2+z}{3z^2-4z+1}$

$\begin{array}{cc} z_1=0 & z_2=1 \\ 1.R & 2.R \\ \in \Gamma & \in \Gamma \end{array}$

$\text{res}_{z=0} f(z) = \lim_{z \rightarrow 0} \frac{1}{3z^2-4z+1} = 1$

$\text{res}_{z=1} f(z) = \lim_{z \rightarrow 1} \left[ (z-1)^2 \frac{1}{z(z-1)^2} \right]' = \lim_{z \rightarrow 1} \left( \frac{1}{z} \right)' = \lim_{z \rightarrow 1} \left( -\frac{1}{z^2} \right) = -1$

$\oplus 2\pi i [\text{res}_{z=0} f(z) + \text{res}_{z=1} f(z)] = 2\pi i (1-1) = 0$

