CVIČENÍ 1

Převod ODR vyššího řádu na soustavu ODR 1. řádu

Př 1: $y'' - 2y' + y = 0$

$$(y_1 = y)' \rightarrow y_1' = y' = y_2$$
$$(y_2 = y')' \rightarrow y_2' = y''$$

DOSAĎ: $y_2' - 2y_2 + y_1 = 0$

$$y_2' = 2y_2 - y_1$$

$\Rightarrow$ $y_1' = y_2$
$y_2' = 2y_2 - y_1$

MATICOVĚ

$$y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

Př 2: $y'' - 2y' + y = x^2 + 1 + e^x$

$$(y_1 = y)' \rightarrow y_1' = y' = y_2$$
$$(y_2 = y')' \rightarrow y_2' = y''$$

DOSAĎ: $y_2' - 2y_2 + y_1 = x^2 + 1 + e^x$

$$y_2' = 2y_2 - y_1 + x^2 + 1 + e^x$$

$\Rightarrow$ $y_1' = y_2$
$y_2' = 2y_2 - y_1 + x^2 + 1 + e^x$

MATICOVĚ

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ e^x \end{pmatrix}$$

SUPERPOZICE

$$y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ x^2 + 1 + e^x \end{pmatrix}$$

Př 3: $y''' - 4y'' + 3y' = x^2 + x e^{2x}$

$$(y_1 = y)' \rightarrow y_1' = y' = y_2$$
$$(y_2 = y')' \rightarrow y_2' = y'' = y_3$$
$$(y_3 = y'')' \rightarrow y_3' = y'''$$

DOSAĎ: $y_3' - 4y_3 + 3y_2 = x^2 + x \cdot e^{2x}$

$$y_3' = 4y_3 - 3y_2 + x + x \cdot e^{2x}$$

$\Rightarrow$ $y_1' = y_2$
$y_2' = y_3$
$y_3' = -3y_2 + 4y_3 + x^2 + x \cdot e^{2x}$

MATICOVĚ

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x \cdot e^{2x} \end{pmatrix}$$

$$y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ y_3' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x^2 + x e^{2x} \end{pmatrix}$$

Př 4: $y_1'' + 3y_2' - 4y_1 + 6y_2 = 0$

$y_1' + y_2'' - 2y_1 + 4y_2 = 0$

$(z_1 = y_1)' \to z_1' = y_1' = z_2$ DOSAĎ

$(z_2 = y_1')' \to z_2' = y_1''$ I. $z_2' + 3z_4 - 4z_1 + 6z_3 = 0 \Rightarrow z_2' = 4z_1 - 6z_3 - 3z_4$

$(z_3 = y_2)' \to z_3' = y_2' = z_4$ II $z_2 + z_4' - 2z_1 + 4z_3 = 0 \Rightarrow z_4' = 2z_1 - z_2 - 4z_3$

$(z_4 = y_2')' \to z_4' = y_2''$

$$\Rightarrow \begin{aligned} z_1' &= z_2 \\ z_2' &= 4z_1 - 6z_3 - 3z_4 \\ z_3' &= z_4 \\ z_4' &= 2z_1 - z_2 - 4z_3 \end{aligned}$$

MATICOVĚ:

$$z' = \begin{pmatrix} z_1' \\ z_2' \\ z_3' \\ z_4' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & -6 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & -1 & -4 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{pmatrix}$$

ELIMINAČNÍ METODA

$y = y(x)$ NEZN

$z = z(x)$

PŘ: $y' + 2y - 2z = x$

$z'' - 3y' + z' = -1$

OŘ: $y = C_1 + C_2 e^{-4x} + C_3 e^{x} + \frac{1}{4}x$

$z = C_1 - C_2 e^{-4x} + \frac{3}{2}C_3 e^{x} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}$

$$\begin{pmatrix} y \\ z \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} e^{-4x} \\ -e^{-4x} \end{pmatrix} + C_3\begin{pmatrix} e^{x} \\ \frac{3}{2}e^{x} \end{pmatrix} + x\begin{pmatrix} \frac{1}{4} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1/8 \end{pmatrix}$$

z. I vyj z $\Rightarrow$ $2z = y' + 2y - x$

$z = \frac{1}{2}(y' + 2y - x)$

$z' = \frac{1}{2}(y'' + 2y' - 1)$

$z'' = \frac{1}{2}(y''' + 2y'')$

dos do II: $\frac{1}{2}y''' + y'' - 3y' + \frac{1}{2}y'' + y' - \frac{1}{2} = -1 \quad / \cdot 2$

$y''' + 2y'' - 6y' + y'' + 2y' - 1 = -2$

$y''' + 3y'' - 4y' = -1$

1. Řešíme homogenní rci $y''' + 3y'' - 4y' = 0$

ChR $\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda = 0$

$\lambda(\lambda^2 + 3\lambda - 4) = 0$

$\lambda(\lambda + 4)(\lambda - 1) = 0$

$\left.\begin{matrix} \lambda_1 = 0 \\ \lambda_2 = -4 \\ \lambda_3 = 1 \end{matrix}\right\}$ $y_h = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-4x} + C_3 e^{x}$

y_p: spec. tvar PS: -1

$e^{ax}(P_m(x)\cos bx + Q_n(x)\sin bx)$

$a = 0 \quad b = 0 \quad m = 1 \quad p = 1$

$a + bi$

0 je kořenem ChR · odhadnji $x \cdot e^{ax}(S_p(x)\cos bx + R_p(x)\sin bx)$

$a + bi$

$\Rightarrow y_p = Ax + B$

$y_p' = A$

$y_p'' = 0$

$y_p''' = 0$

DOSAD: $0 + 3 \cdot 0 - 4A = -1 \Rightarrow A = \frac{1}{4}$

$B = 0$

$\Big] y_p = \frac{1}{4}x$

OŘ: $y = C_1 e^{0x} + C_2 e^{-4x} + C_3 e^{x} + \frac{1}{4}x$

$y' = -4C_2 e^{-4x} + C_3 e^{x} + \frac{1}{4}$

Dos do $\rightarrow$ $z = \frac{1}{2}\left(-4C_2 e^{-4x} + C_3 e^{x} + \frac{1}{4} + 2C_1 + 2C_2 e^{-4x} + 2C_3 e^{x} + \frac{1}{2}x - x\right) =$

$= -2C_2 e^{-4x} + \frac{1}{2}C_3 e^{x} + \frac{1}{8} + C_1 + C_2 e^{-4x} + C_3 e^{x} + \frac{1}{4}x - \frac{1}{2}x =$

$= C_1 - C_2 e^{-4x} + \frac{3}{2}C_3 e^{x} - \frac{1}{4}x + \frac{1}{8}$

Př: $y_1' = 8y_1 + 5y_2$ $\qquad y_1(0) = 1$

$y_2' = -13y_1 - 8y_2$ $\qquad y_2(0) = 0$

OŘ maticově

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} \cos x \\ -\frac{1}{5}\sin x - \frac{8}{5}\cos x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} \sin x \\ \frac{1}{5}\cos x - \frac{8}{5}\sin x \end{pmatrix}$$

PŘ maticově

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \\ -\frac{1}{5}\sin x - \frac{8}{5}\cos x \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} \sin x \\ \frac{1}{5}\cos x - \frac{8}{5}\sin x \end{pmatrix}$$

z I. vyj y_2: $\quad y_2 = \frac{1}{5}(y_1' - 8y_1)$

$y_2' = \frac{1}{5}(y_1'' - 8y_1')$

Dos do II: $\quad \frac{1}{5}(y_1'' - 8y_1') = -13y_1 - \frac{8}{5}(y_1' - 8y_1) \quad | \cdot 5$

$y_1'' - \cancel{8y_1'} = -65y_1 - \cancel{8y_1'} + 64y_1$

$y_1'' + y_1 = 0$

CHR: $\lambda^2 + 1 = 0$

$\lambda_1 = i$, $\lambda_2 = -i$ $\Big\}$ $y_{1,2} = e^{\pm 1 i x} = \cos x \pm 1 i \sin x$ $\qquad y_{1R} = \cos x$, $\; y_{1I} = \sin x$

$\lambda_1 = 0 + 1i$, $\lambda_2 = 0 - 1i$ $\Big\}$ $a = 0$, $b = 1$

OŘ $y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

$y_1' = -C_1 \sin x + C_2 \cos x$

Dos $y_2 = \frac{1}{5}(-C_1 \sin x + C_2 \cos x - 8C_1 \cos x - 8C_2 \sin x) =$

$= -\frac{C_1}{5}\sin x + \frac{C_2}{5}\cos x - \frac{8}{5}C_1 \cos x - \frac{8}{5}C_2 \sin x =$

$= \sin x\left(-\frac{C_1}{5} - \frac{8}{5}C_2\right) + \cos x\left(\frac{C_2}{5} - \frac{8}{5}C_1\right)$

OŘ: $y_1 = C_1 \cos x + C_2 \sin x$

$y_2 = \sin x\left(-\frac{8}{5}C_2 - \frac{C_1}{5}\right) + \cos x\left(\frac{C_2}{5} - \frac{8}{5}C_1\right)$

PP: $1 = C_1 \cdot \cos 0 + C_2 \sin 0$

$0 = \sin 0 \cdot \left(-\frac{8}{5}C_2 - \frac{C_1}{5}\right) + \cos 0\left(\frac{C_2}{5} - \frac{8}{5}C_1\right)$ $\Big\} \Rightarrow$ $C_1 = 1$, $\; 0 = \frac{C_2}{5} - \frac{8}{5}C_1$

$0 = \frac{C_2}{5} - \frac{8}{5} \Rightarrow C_2 = 8$

$$\boxed{\text{PŘ: } y_1 = \cos x + 8 \sin x, \quad y_2 = -13 \sin x}$$

SOUSTAVY ODR1

Ⓐ Homogenní soustavy LODR1

Př 1 Eulerovou metodou nalezněte obecné řešení soustavy

$$y_1' = 2y_1 - 4y_2$$
$$y_2' = y_1 - 3y_2$$

→ soustava 2 homogenních lineárních DR s konstantní maticí

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$$

→ pomocí vlastních čísel a vektorů matice A nalezneme 2 LN řešení u, v
⇒ OŘ

• vlastní čísla matice A:
$$\det(A-\lambda E) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 1 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(2-\lambda)(-3-\lambda)+4=0$$
$$-6-2\lambda+3\lambda+\lambda^2+4=0$$
$$\lambda^2+\lambda-2=0$$
$$(\lambda_1+2)(\lambda_2-1)=0 \Rightarrow \lambda_1=-2 \quad \lambda_2=1$$

⇒ předpokládáme 2 LN řešení ve tvaru
$$u = e^{\lambda_1 x}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = e^{-2x}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix}$$
$$v = e^{\lambda_2 x}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = e^{x}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix}$$
vlastní vektory matice A

• vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu $\lambda_1=-2$:
$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_1 & -4 \\ 1 & -3-\lambda_1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 4h_1-4h_2=0 \\ h_1-h_2=0 \end{matrix} \quad \begin{matrix} 0=0 \\ h_2=t \\ h_1=t \end{matrix}$$
$$h = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

• vlastní vektor příslušný k vlastnímu číslu $\lambda_2=1$
$$\begin{pmatrix} 2-\lambda_2 & -4 \\ 1 & -3-\lambda_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow k_1-4k_2=0 \Rightarrow \begin{matrix} k_2=t \\ k_1=4t \end{matrix}$$
$$k = t\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow u = e^{-2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad v = e^{x}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$$

⇒ OŘ y je LK u a v

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 e^{x}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 e^{-2x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad c_1, c_2 \in \mathbb{R}$$

Př. Pomocí EULEROVY METODY určete řešení soustavy (3)

$$y_1' = y_1 - 4y_2$$
$$y_2' = 2y_1 - 3y_2 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$

1. Vlastní čísla:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$(1-\lambda)(-3-\lambda) + 8 = 0$$
$$-3 + 2\lambda + \lambda^2 + 8 = 0$$
$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm 2i \quad \begin{cases} \lambda_1 = -1+2i \\ \lambda_2 = -1-2i \end{cases}$$

2. Vlastní vektor příslušný $\lambda_1 = -1+2i$

$$\begin{pmatrix} 2-2i & -4 \\ 2 & -2-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{aligned} (2-2i)h_1 - 4h_2 &= 0 \\ 2h_1 + (-2-2i)h_2 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} h_1 &= a+bi \\ h_2 &= c+di \end{aligned}$$

$$(2-2i)(a+bi) - 4(c+di) = 0 \qquad 2a + 2bi - 2ai + 2b - 4c - 4di = 0 \quad \begin{cases} r: & 2a + 2b - 4c = 0 \\ i: & 2b - 2a - 4d = 0 \end{cases}$$
$$2(a+bi) + (-2-2i)(c+di) = 0 \qquad 2a + 2bi - 2c - 2di - 2ci + 2d = 0 \quad \begin{cases} r: & 2a - 2c + 2d = 0 \\ i: & 2b - 2d - 2c = 0 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

volím $c = t$, $d = s$; $\quad a = c - d = t - s$, $\quad b = c + d = t + s$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-s \\ t+s \\ t \\ s \end{pmatrix} \quad \text{volím } t = 0,\ s = 1 \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+bi \\ c+di \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+i \\ i \end{pmatrix}$$

uvažujeme komplexní řešení v soustavě ve tvaru $v = e^{\lambda x}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = e^{(-1+2i)x}\begin{pmatrix} -1+i \\ i \end{pmatrix} =$

$$= e^{-x} \cdot e^{2ix}\begin{pmatrix} -1+i \\ i \end{pmatrix} = e^{-x}(\cos 2x + i \sin 2x)\begin{pmatrix} -1+i \\ i \end{pmatrix} = e^{-x}\begin{pmatrix} -\cos 2x + i\cos 2x - i \sin 2x - \sin 2x \\ -\sin 2x + i \cos 2x \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{e^{-x}\begin{pmatrix} -\cos 2x - \sin 2x \\ -\sin 2x \end{pmatrix}}_{u} + i\, \underbrace{e^{-x}\begin{pmatrix} \cos 2x - \sin 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix}}_{v}$$

3. OŘ

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = c_1 e^{-x}\begin{pmatrix} -\cos 2x - \sin 2x \\ -\sin 2x \end{pmatrix} + c_2 e^{-x}\begin{pmatrix} \cos 2x - \sin 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix}$$

Př: Pomocí EULEROVY METODY urči řešení soustavy

$$y_1' = y_1 - 4y_2 \qquad A = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 2 & -3 \end{pmatrix}$$
$$y_2' = 2y_1 - 3y_2$$

1. Vlastní čísla:
$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & -4 \\ 2 & -3-\lambda \end{vmatrix} = 0$$
$$(1-\lambda)(-3-\lambda) + 8 = 0$$
$$-3 + 2\lambda + \lambda^2 + 8 = 0$$
$$\lambda^2 + 2\lambda + 5 = 0$$
$$\lambda_{1,2} = \frac{-2 \pm \sqrt{4-20}}{2} = -1 \pm 2i \quad \begin{matrix} \lambda_1 = -1+2i \\ \lambda_2 = -1-2i \end{matrix}$$

2. Vlastní vektor příslušný $\lambda_1 = -1+2i$

$$\begin{pmatrix} 2-2i & -4 \\ 2 & -2-2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} (2-2i)h_1 - 4h_2 = 0 \\ 2h_1 + (-2-2i)h_2 = 0 \end{matrix} \qquad \begin{matrix} h_1 = a+bi \\ h_2 = c+di \end{matrix}$$

$$(2-2i)(a+bi) - 4(c+di) = 0 \qquad 2a + 2bi - 2ai + 2b - 4c - 4di = 0 \quad \begin{matrix} r: & 2a + 2b - 4c = 0 \\ i: & 2b - 2a - 4d = 0 \end{matrix}$$
$$2(a+bi) + (-2-2i)(c+di) = 0 \qquad 2a + 2bi - 2c - 2di - 2ci + 2d = 0 \quad \begin{matrix} r: & 2a - 2c + 2d = 0 \\ i: & 2b - 2d - 2c = 0 \end{matrix}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} \end{array}\right)$$

volím $c = t$, $d = s$ $\qquad a = c - d = t - s$, $\quad b = c + d = t + s$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-s \\ t+s \\ t \\ s \end{pmatrix} \quad \text{volím } t = 0,\ s = 1 \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a+bi \\ c+di \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1+i \\ i \end{pmatrix}$$

napíšeme komplexní řešení u soustavy ve tvaru $u = e^{\lambda x}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = e^{(-1+2i)x}\begin{pmatrix} -1+i \\ i \end{pmatrix} =$

$$= e^{-x} \cdot e^{2ix}\begin{pmatrix} -1+i \\ i \end{pmatrix} = e^{-x}(\cos 2x + i \sin 2x)\begin{pmatrix} -1+i \\ i \end{pmatrix} = e^{-x}\begin{pmatrix} -\cos 2x + i\cos 2x - i\sin 2x - \sin 2x \\ -\sin 2x + i\cos 2x \end{pmatrix} =$$

$$= \underbrace{e^{-x}\begin{pmatrix} -\cos 2x - \sin 2x \\ -\sin 2x \end{pmatrix}}_{u} + i\,\underbrace{e^{-x}\begin{pmatrix} \cos 2x - \sin 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix}}_{v}$$

3. OŘ

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 e^{-x}\begin{pmatrix} -\cos 2x - \sin 2x \\ -\sin 2x \end{pmatrix} + C_2 e^{-x}\begin{pmatrix} \cos 2x - \sin 2x \\ \cos 2x \end{pmatrix}$$

Př: $y_1' = y_2$
$y_2' = -y_1$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$$

1. vl. čísla: $\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda^2 + 1 = 0$
$\lambda^2 = -1 \quad \lambda_1 = i \quad \lambda_2 = -i$

2. vl. vektor pro $\lambda_1 = i$: $\begin{pmatrix} -i & 1 \\ -1 & -i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad -ih_1 + h_2 = 0 \quad h_1 = A + Bi$
$-h_1 - ih_2 = 0 \quad h_2 = C + Di$

$-i(A+Bi) + C + Di = 0$
$-A - Bi - i(C+Di) = 0$

$-iA + B + C + Di = 0$
$-A - Bi - Ci + D = 0$

re: $B + C = 0$, $-A + D = 0$ $\quad$ im: $-A + D = 0$, $-B - C = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & | & \cancel{0} \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & | & \cancel{0} \end{pmatrix} \sim$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad h = 2 \quad \text{volím } D = t,\ C = s \quad \begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ -s \\ s \\ t \end{pmatrix} \quad \text{pro } t = 1,\ s = 0 \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

→ uvažujeme komplexní řešení v soustavě ve tvaru

$$v = e^{ix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = e^{ix}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = (\cos x + i \sin x)\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x + i \sin x \\ i\cos x - \sin x \end{pmatrix} =$$
$$= \underbrace{\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix}}_{u} + i\underbrace{\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}}_{v}$$

⇒ OŘ dané soustavy je: $\boxed{y = C_1\begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix};\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}}$

pro $\lambda = -i$ to musí vyjít stejně:

$\begin{pmatrix} i & 1 \\ -1 & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\quad ih_1 + h_2 = 0 \quad h_1 = A + Bi \quad iA - B + C + Di = 0$
$-h_1 + ih_2 = 0 \quad h_2 = C + Di \quad -A - Bi + Ci - D = 0$

re: $-B + C = 0$, $-A - D = 0$ $\quad$ im: $A + D = 0$, $-B + C = 0$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 & 0 & | & 0 \\ -1 & 0 & 0 & -1 & | & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & | & \cancel{0} \\ 0 & 1 & -1 & 0 & | & 0 \\ \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & \cancel{0} & | & \cancel{0} \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & | & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & | & 0 \end{pmatrix} \quad h = 2 \quad \text{volím: } D = t,\ C = s$$

$$\begin{pmatrix} A \\ B \\ C \\ D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ s \\ s \\ t \end{pmatrix} \quad \text{pro } t = 1,\ s = 0 \quad \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad h = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} \Rightarrow v = e^{-ix}\begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} = (\cos(-x) + i\sin(-x))\begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} =$$

$$= (\cos x - i\sin x)\begin{pmatrix} -1 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\cos x + i\sin x \\ \sin x + i\cos x \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{pmatrix}}_{u} + i\underbrace{\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}}_{v}$$

OŘ: $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} -\cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$ ✓

zk: $y_1 = -C_1\cos x + C_2\sin x \quad y_1' = C_1\sin x + C_2\cos x$
$y_2 = C_1\sin x + C_2\cos x \quad y_2' = C_1\cos x - C_2\sin x$
$C_1\sin x + C_2\cos x = C_1\sin x + C_2\cos x$ ✓
$C_1\cos x - C_2\sin x = C_1\cos x - C_2\sin x$ ✓

Př: Eulerovou metodou nalezněte řešení soustavy

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - 4y_2 \\ y_2' &= y_1 - 2y_2 \end{aligned}\right\}$$ které vyhovuje poč. podmínkám $y_1(0) = 0$; $y_2(0) = -1$

→ soustava 2 HLDR s konstantní maticí $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

→ vlastní čísla $\det(A - \lambda E) = 0$ $\quad \begin{vmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$(2-\lambda)(-2-\lambda) + 4 = 0$$

$$\cancel{-4} - \cancel{2\lambda} + \cancel{2\lambda} + \lambda^2 \cancel{+4} = 0$$

$$\lambda^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

→ Lin. Nez. řešení u, v předpokládáme ve tvaru

$$u = e^{\lambda x}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = e^{0x}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \quad v = e^{\lambda x}\begin{pmatrix} h_1 x + k_1 \\ h_2 x + k_2 \end{pmatrix} = e^{0x}\begin{pmatrix} h_1 x + k_1 \\ h_2 x + k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 x + k_1 \\ h_2 x + k_2 \end{pmatrix}$$

→ vektor h – vlastní vektor příslušný k vl. číslu $\lambda = 0$ → nenulové řešení lin. alg. soust.

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{aligned} 2h_1 - 4h_2 &= 0 \\ h_1 - 2h_2 &= 0 \end{aligned} \quad 0=0 \quad \begin{aligned} h_2 &= t \\ h_1 &= 2t \end{aligned}$$

$$h = t\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

→ vektor k → nenulové řešení alg. lin. soust.

$$\begin{pmatrix} 2-\lambda & -4 \\ 1 & -2-\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 2k_1 - 4k_2 &= 2 \\ k_1 - 2k_2 &= 1 \end{aligned} \quad 0=0 \quad \begin{aligned} k_2 &= t \\ k_1 &= 1+2t \end{aligned}$$

$k = \begin{pmatrix} 1+2t \\ t \end{pmatrix}$ $t \in R$: volím $t = 0$ $k = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

→ hledaná LN řešení jsou : $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\quad v = \begin{pmatrix} 2x+1 \\ x \end{pmatrix}$

→ OŘ: $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} 2x+1 \\ x \end{pmatrix}$ $\quad C_1, C_2 \in R$

→ PŘ: dosazení PP do OŘ: $\begin{aligned} 0 &= 2C_1 + C_2 \\ -1 &= C_1 \end{aligned} \Rightarrow C_2 = 2$

PŘ: $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = -1\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 2x+1 \\ x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2+4x+2 \\ -1+2x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4x \\ 2x-1 \end{pmatrix}$

Př. 2. Nalezněte OŘ soustavy

$$y_1' = 2y_1 - 3y_2$$
$$y_2' = y_1 - 2y_2$$

→ soustava 2HLDR s konst. maticí $A = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}$

→ vlastní čísla: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & -3 \\ 1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0$

$$(2-\lambda)(-2-\lambda)+3 = 0$$
$$-4-2\lambda+2\lambda+\lambda^2+3 = 0$$
$$\lambda^2-1 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1$$

→ vlastní vektory: pro $\lambda_1 = 1$ $\begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $1h_1 - 3h_2 = 0$ $h_2 = t$, $h_1 = 3t$ $h = t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow u = e^x\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

pro $\lambda_2 = -1$ $\begin{pmatrix} 3 & -3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $3k_1 - 3k_2 = 0$ $k_2 = t$, $k_1 = t$ $k = t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow v = e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

→ OŘ: $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 u + C_2 v = C_1 e^x\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-x}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

Př.: Nalezněte řešení počátečního problému

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= -7y_1 + 9y_2 \\ y_2' &= -y_1 - y_2 \end{aligned}\right\} \quad y_1(0) = 2;\ y_2(0) = 1$$

→ soustava 2HLDR s konst. m. $\begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}$

→ vl. čísla: $\begin{vmatrix} -7-\lambda & 9 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-7-\lambda)(-1-\lambda)+9 = 0$

$$7+7\lambda+\lambda+\lambda^2+9 = 0$$
$$\lambda^2+8\lambda+16 = 0$$
$$(\lambda+4)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -4$$

→ pro $\lambda = -4$ $\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $-h_1 + 3h_2 = 0$ $h_2 = t$, $h_1 = 3t$ $h = t\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -3 & 9 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $-3k_1 + 9k_2 = 3$, $-k_1 + 3k_2 = 1$ $k_2 = t$, $k_1 = -1+3t$ $k = \begin{pmatrix} -1+3t \\ t \end{pmatrix}$ pro $t=0$ $k = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$u = e^{-4x}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ $v = e^{-4x}\begin{pmatrix} 3x-1 \\ x \end{pmatrix}$

⇒ OŘ: $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 e^{-4x}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + C_2 e^{-4x}\begin{pmatrix} 3x-1 \\ x \end{pmatrix} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

→ PŘ:
$$2 = 3C_1 - C_2 \Rightarrow C_2 = 1$$
$$1 = C_1$$

PŘ: $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = e^{-4x}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} + e^{-4x}\begin{pmatrix} 3x-1 \\ x \end{pmatrix} = e^{-4x}\begin{pmatrix} 3x+2 \\ x+1 \end{pmatrix}$

Př: Eulerovou metodou nalezněte řešení soustavy

$$\left.\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - 4y_2 \\ y_2' &= y_1 - 2y_2 \end{aligned}\right\}$$ které vyhovuje poč. podmínkám $y_1(0)=0$; $y_2(0)=-1$

→ soustava 2 HLDR s konstantní maticí $A=\begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & -2\end{pmatrix}$

→ vlastní čísla $\det(A-\lambda E)=0$ $\qquad \begin{vmatrix}2-\lambda & -4\\ 1 & -2-\lambda\end{vmatrix}=0$

$$(2-\lambda)(-2-\lambda)+4=0$$

$$\cancel{-4}-\cancel{2\lambda}+\cancel{2\lambda}+\lambda^2\cancel{+4}=0$$

$$\lambda^2=0 \Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=0$$

→ Lin. Nez. řešení u, v předpokládáme ve tvaru

$$u=e^{\lambda x}\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix}=e^{0x}\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix} \qquad v=e^{\lambda x}\begin{pmatrix}h_1x+k_1\\ h_2x+k_2\end{pmatrix}=e^{0x}\begin{pmatrix}h_1x+k_1\\ h_2x+k_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h_1x+k_1\\ h_2x+k_2\end{pmatrix}$$

→ vektor h – vlastní vektor příslušný k vl. číslu $\lambda=0$ → nenulové řešení lin. alg. soust.

$$\begin{pmatrix}2-\lambda & -4\\ 1 & -2-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ 0\end{pmatrix} \to \begin{aligned}2h_1-4h_2&=0\\ h_1-2h_2&=0\end{aligned} \quad 0=0 \quad \begin{aligned}h_2&=t\\ h_1&=2t\end{aligned}$$

$$h=t\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$$

→ vektor k → nenulové řešení alg. lin. soust.

$$\begin{pmatrix}2-\lambda & -4\\ 1 & -2-\lambda\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}h_1\\ h_2\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix}2 & -4\\ 1 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}k_1\\ k_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned}2k_1-4k_2&=2\\ k_1-2k_2&=1\end{aligned} \quad 0=0 \quad \begin{aligned}k_2&=t\\ k_1&=1+2t\end{aligned}$$

$k=\begin{pmatrix}1+2t\\ t\end{pmatrix}$ $t\in R$: volím $t=0$ $k=\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$

→ hledaná LN řešení jsou : $u=\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}$ $\quad v=\begin{pmatrix}2x+1\\ x\end{pmatrix}$

→ OŘ: $y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=C_1\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}+C_2\begin{pmatrix}2x+1\\ x\end{pmatrix}$ $\quad C_1,C_2\in R$

→ PŘ: dosazení PP do OŘ: $\begin{aligned}0&=2C_1+C_2\\ -1&=C_1\end{aligned}$ $\Rightarrow C_2=2$

PŘ: $y=\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=-1\begin{pmatrix}2\\ 1\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}2x+1\\ x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2+4x+2\\ -1+2x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4x\\ 2x-1\end{pmatrix}$

NEHOMOGENNÍ SOUSTAVY LODR1

Př Nalezněte OR soustavy

$$\begin{aligned} \text{I.}\quad & y_1' = 2y_1 - 4y_2 \\ \text{II.}\quad & y_2' = y_1 - 3y_2 + x \end{aligned}$$

} Nehomogenní S2LDR s konst. maticí $A = \begin{pmatrix} 2 & -4 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ vektor pravé strana $f(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}$

$\boxed{A}$ ELIMINAČNÍ METODA

→ převod na jednu nehomogenní LDR 2. řádu s konst. koeficienty.

→ eliminujeme y_1 ⇒ I. − 2.II. :

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 - 4y_2 \\ -2y_2' &= -2y_1 + 6y_2 - 2x \\ \hline y_1' - 2y_2' &= 2y_2 - 2x \quad \text{III.} \end{aligned}$$

→ eliminace y_1' : → z II. vyjádříme y_1 (ta, která neobsahuje y_1' → II.)

$$y_1 = y_2' + 3y_2 - x$$

→ derivujeme

$$y_1' = y_2'' + 3y_2' - 1.$$

→ dosadíme do III. : $y_2'' + 3y_2' - 1 - 2y_2' = 2y_2 - 2x$

$$\Rightarrow y_2'' + y_2' - 2y_2 = 1 - 2x$$

Nehom. LDR 2. řádu s konst. koef. s pravou str. $(1-2x)$

→ řešíme metodou neurčitých koeficientů:

$y_2'' + y_2' - 2y_2 = 0$

Ch.r.: $\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$

$(\lambda+2)(\lambda-1) = 0 \quad \lambda_1 = -2 \quad \lambda_2 = 1$

$y_{2h} = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x}$; $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

PŘ: předpokládáme ve tvaru $Ax + B$

$$\left.\begin{aligned} y_p &= Ax + B \\ y_p' &= A \\ y_p'' &= 0 \end{aligned}\right\}$$

dosadíme: $0 + A - 2(Ax+B) = 1 - 2x$

$$\begin{aligned} A - 2Ax - 2B &= 1 - 2x \\ \hline x:\ -2A &= -2 \Rightarrow A = 1 \\ x^0:\ A - 2B &= 1 \Rightarrow B = 0 \end{aligned}$$

$y_{2p} = x$

OŘ: $y_2 = C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} + x$, $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

→ řeš. y_1 určíme dosazením y_2 do II. rce soustavy

$$y_1 = y_2' + 3y_2 - x = C_1 e^{x} - 2C_2 e^{-2x} + 1 + 3C_1 e^{x} + 3C_2 e^{-2x} + 3x - x =$$

$$= 4C_1 e^{x} + C_2 e^{-2x} + 1 + 2x \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C_1 \begin{pmatrix} 4e^{x} \\ e^{x} \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} e^{-2x} \\ e^{-2x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x+1 \\ x \end{pmatrix} ;\ C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

B METODA VARIACE KONSTANT

1. Nalezneme řešení přidružené homogenní soustavy:
$$y_1' = 2y_1 - 4y_2$$
$$y_2' = y_1 - 3y_2$$

→ řešení viz Př 1 z minulého cvičení

$\Rightarrow$ $y_h = C_1 e^{x}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} + C_2 e^{-2x}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$

2. hledáme nějaké partikulární řešení y_p → dle variace konstant předpokládáme ve tvaru $y_p = C_1(x) e^{x}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} + C_2(x) e^{-2x}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ → $C_1(x) = ?\,;\ C_2(x) = ?$

→ k nalezení $C_1(x)$ a $C_2(x)$ potřebujeme určit $C_1'(x), C_2'(x)$ jako řešení soustavy $U(x)\, C'(x) = b(x)$

$U(x)$... fundamentální matice přidružené homogenní soust.

$$U(x) = \begin{pmatrix} 4e^{x} & e^{-2x} \\ e^{x} & e^{-2x} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4e^{x} & e^{-2x} \\ e^{x} & e^{-2x} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 4e^{x} C_1'(x) + e^{-2x} C_2'(x) &= 0 \\ e^{x} C_1'(x) + e^{-2x} C_2'(x) &= x \end{aligned}$$

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ x & e^{-2x} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4e^{x} & e^{-2x} \\ e^{x} & e^{-2x} \end{vmatrix}} = \frac{-x \cdot e^{-2x}}{4e^{x} e^{-2x} - e^{x} \cdot e^{-2x}} = \frac{-x \cdot e^{-2x}}{3e^{-x}} = -\frac{1}{3} x e^{-x}$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 4e^{x} & 0 \\ e^{x} & x \end{vmatrix}}{3e^{-x}} = \frac{4x \cdot e^{x}}{3e^{-x}} = \frac{4}{3} x e^{2x}$$

$$C_1(x) = \int -\frac{1}{3} x e^{-x}\,dx = -\frac{1}{3}\int x e^{-x}\,dx = -\frac{1}{3}\left[-x e^{-x} + \int e^{-x}\,dx\right] = -\frac{1}{3}\left[-x e^{-x} - e^{-x}\right] = \frac{1}{3} e^{-x}(x+1) + C_1$$

$u = x \quad u' = 1$
$v' = e^{-x} \quad v = -e^{-x}$

$$C_2(x) = \int \frac{4}{3} x e^{2x} = \frac{4}{3}\int x e^{2x}\,dx = \frac{4}{3}\left[\frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}\,dx\right] = \frac{4}{3}\left[\frac{x}{2} e^{2x} - \frac{1}{4} e^{2x}\,dx\right] = \frac{2}{3} e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C_2$$

$u = x \quad u' = 1$
$v' = e^{2x} \quad v = \frac{1}{2} e^{2x}$

Dosadíme

$$y = \left[\frac{1}{3} e^{-x}(x+1) + C_1\right] e^{x}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} + \left[\frac{1}{3} e^{2x}(2x-1) + C_2\right] e^{-2x}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x+1) + C_1 e^{x}\right]\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} + \left[\frac{1}{3}(2x-1) + C_2 e^{-2x}\right]\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{4}{3}(x+1) \\ \frac{1}{3}(x+1) \end{pmatrix} + C_1 e^{x}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \frac{1}{3}(2x-1) \\ \frac{1}{3}(2x-1) \end{pmatrix} + C_2 e^{-2x}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} =$$

$$= C_1\begin{pmatrix} 4e^{x} \\ e^{x} \end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix} e^{-2x} \\ e^{-2x} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x+1 \\ x \end{pmatrix} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

$\boxed{C}$ METODA NEURČITÝCH KOEFICIENTŮ

1. Řešení přidružené homogenní soustavy:

$$y_h = C_1 e^{x}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} + C_2 e^{-2x}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad C_1, C_2 \in R$$

2. Protože $f(x) = \begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix}$ lze y_p předpokládat ve tvaru $y_p = \begin{pmatrix}Ax+B\\Cx+D\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}y_1\\y_2\end{pmatrix}$

A, B, C, D jsou nezn.

$$y_{p1} = Ax + B \qquad y_{p1}' = A$$
$$y_{p2} = Cx + D \qquad y_{p2}' = C$$
$$y_p' = \begin{pmatrix}A\\C\end{pmatrix}$$

→ dosadíme do soustavy zadání: $y_p' = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} y_1 - \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix} y_2 + \begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}A\\C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix}(Ax+B) - \begin{pmatrix}4\\3\end{pmatrix}(Cx+D) + \begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}A\\C\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2Ax+2B-4Cx-4D\\Ax+B-3Cx-3D\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\x\end{pmatrix}$$

u x: $0 = 2A - 4C$ $\qquad 0 = A - 3C + 1$

x^0: $A = 2B - 4D$ $\qquad C = B - 3D$

$$\begin{aligned}
A \quad\; - 2C \quad\quad &= 0\\
A \quad\; - 3C \quad\quad &= -1\\
A - 2B \quad\; + 4D &= 0\\
B - C - 3D &= 0
\end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-2&0&0\\1&0&-3&0&-1\\1&-2&0&4&0\\0&+1&-1&-3&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-2&0&0\\0&1&-1&-3&0\\0&-2&2&4&0\\0&0&-1&0&-1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-2&0&0\\0&1&-1&-3&0\\0&0&0&-2&0\\0&0&-1&0&-1\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&-2&0&0\\0&1&-1&-3&0\\0&0&1&0&1\\0&0&0&2&0\end{array}\right) \sim$$

$$\sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&2\\0&1&0&-3&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c}1&0&0&0&2\\0&1&0&0&1\\0&0&1&0&1\\0&0&0&1&0\end{array}\right) \Rightarrow \begin{array}{l}A=2\\B=1\\C=1\\D=0\end{array} \Rightarrow y_p = \begin{pmatrix}2x+1\\x+0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow OŘ: y = C_1\begin{pmatrix}4e^{x}\\e^{x}\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}e^{-2x}\\e^{-2x}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2x+1\\x\end{pmatrix}$$

8 METODA VARIACE KONSTANT

1. Nalezneme řešení přidružené homogenní soustavy: $y_1' = 2y_1 - 4y_2$, $y_2' = y_1 - 3y_2$

→ řešení viz Př 1 z minulého cvičení

$$\Rightarrow y_H = C_1 e^{x}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} + C_2 e^{-2x}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$

2. hledáme nějaké partikulární řešení y_p → dle variace konstant předpokládáme ve tvaru

$$y_p = C_1(x) e^{x}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} + C_2(x) e^{-2x}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad \to C_1(x) = ?\,;\ C_2(x) = ?$$

→ k nalezení $C_1(x)$ a $C_2(x)$ potřebujeme určit $C_1'(x), C_2'(x)$ jako řešení soustavy $U(x)\,C'(x) = b(x)$

$U(x)$... fundamentální matice přidružené homogenní soust.

$$U(x) = \begin{pmatrix} 4e^{x} & e^{-2x} \\ e^{x} & e^{-2x}\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 4e^{x} & e^{-2x} \\ e^{x} & e^{-2x}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} C_1'(x) \\ C_2'(x)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{aligned} 4e^{x}C_1'(x) + e^{-2x}C_2'(x) &= 0 \\ e^{x}C_1'(x) + e^{-2x}C_2'(x) &= x \end{aligned}$$

$$C_1'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 0 & e^{-2x} \\ x & e^{-2x}\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 4e^{x} & e^{-2x} \\ e^{x} & e^{-2x}\end{vmatrix}} = \frac{-x\cdot e^{-2x}}{4e^{x}e^{-2x} - e^{x}e^{-2x}} = \frac{-x\cdot e^{-2x}}{3e^{-x}} = -\frac{1}{3}xe^{-x}$$

$$C_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 4e^{x} & 0 \\ e^{x} & x\end{vmatrix}}{3e^{-x}} = \frac{4x\cdot e^{x}}{3e^{-x}} = \frac{4}{3}xe^{2x}$$

$$C_1(x) = \int -\frac{1}{3}xe^{-x}dx = -\frac{1}{3}\int xe^{-x}dx = -\frac{1}{3}\left[-xe^{-x} + \int e^{-x}dx\right] = -\frac{1}{3}\left[-xe^{-x} - e^{-x}\right] = \frac{1}{3}e^{-x}(x+1) + C_1$$

$u = x \quad u' = 1$

$v' = e^{-x} \quad v = -e^{-x}$

$$C_2(x) = \int \frac{4}{3}xe^{2x} = \frac{4}{3}\int xe^{2x}dx = \frac{4}{3}\left[\frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{2}\int e^{2x}dx\right] = \frac{4}{3}\left[\frac{x}{2}e^{2x} - \frac{1}{4}e^{2x}dx\right] = \frac{2}{3}e^{2x}\left(x - \frac{1}{2}\right) + C_2$$

$u = x \quad u' = 1$

$v' = e^{2x} \quad v = \frac{1}{2}e^{2x}$

Dostáváme

$$y = \left[\frac{1}{3}e^{-x}(x+1) + C_1\right]e^{x}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} + \left[\frac{1}{3}e^{2x}(2x-1) + C_2\right]e^{-2x}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x+1) + C_1e^{x}\right]\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} + \left[\frac{1}{3}(2x-1) + C_2e^{-2x}\right]\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix}\frac{4}{3}(x+1)\\ \frac{1}{3}(x+1)\end{pmatrix} + C_1e^{x}\begin{pmatrix}4\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\frac{1}{3}(2x-1)\\ \frac{1}{3}(2x-1)\end{pmatrix} + C_2e^{-2x}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} =$$

$$= C_1\begin{pmatrix}4e^{x}\\ e^{x}\end{pmatrix} + C_2\begin{pmatrix}e^{-2x}\\ e^{-2x}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}2x+1\\ x\end{pmatrix} \quad C_1, C_2 \in \mathbb{R}$$