

Soustavy Obyčejných Diferenciálních Rovnic prvního řádu (SODR1Ř)

Homogenní lineární DR 2. řádu (HLDR2) – souhrn MII

$$ay'' + by' + cy = 0; a, b, c \in R; a \neq 0$$

Kořeny charakteristické rovnice CHR $ar^2 + br + c = 0$	Obecné řešení
r_1, r_2 reálné různé	$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x}$
$r_1 = r_2 = r$	$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx}$
r_1, r_2 komplexně sdružené $\alpha \pm \beta i$	$y = C_1 e^{\alpha x} \cos \beta x + C_2 e^{\alpha x} \sin \beta x$

PR 1

Nehomogenní lineární DR 2. řádu (NHLDR2)

$$ay'' + by' + cy = G(x); G(x) \neq 0; a, b, c \in R; a \neq 0$$

Obecné řešení se skládá z řešení homogenního y_h a partikulárního y_p

$$y = y_h + y_p$$

y_h určíme viz. výše

y_p určíme metodou neurčitých koeficientů odhadem podle tvaru $G(x)$

- $G(x)$ je polynom stupně n , (např. polynom 2. stupně) $\rightarrow y_p = Ax^2 + Bx + C$ (PR 2)
- $G(x)$ je ve tvaru Ce^{kx} ; $C, k \in R, \rightarrow y_p = Ae^{kx}$ (PR 3)
- $G(x)$ je ve tvaru $C \cos kx$ nebo $C \sin kx$; $C, k \in R, \rightarrow y_p = A \cos kx + B \sin kx$ (PR 4)
- $G(x)$ je součin předcházejících typů $\rightarrow y_p$ je součin odhadů (např. $G(x) = x \cdot \cos 3x \rightarrow y_p = (Ax + B) \cos 3x + (Cx + D) \sin 3x$) (PR 5)
- $G(x)$ je součet předcházejících typů $\rightarrow$ Princip SUPERPOZICE (např. $G(x) = G_1(x) + G_2(x) \rightarrow y_p = y_{p1} + y_{p2}$) (PR 6)
- Zobecnění $G(x) = e^{ax}[P_n(x) \cos bx + Q_m(x) \sin bx]$, m, n stupně $P_n(x)$ a $Q_m(x)$
 $p = \max(m; n)$ je stupeň $R_p(x)$ resp. $S_p(x)$ (PR 7)
 - $a + bi$ není kořenem CHR $y_p = e^{ax}[R_p(x) \cos bx + S_p(x) \sin bx]$
 - $a + bi$ je k -násobným kořenem CHR $y_p = x^k e^{ax}[R_p(x) \cos bx + S_p(x) \sin bx]$ (PR 8)

Nebo metodou variací konstant.

Soustavy Obyčejných Diferenciálních Rovnic 1. řádu (SODR1)

Základní pojmy

- Inženýrská praxe – např. úlohy z Mechaniky
- Soustava n diferenciálních rovnic prvního řádu tvaru
$$\begin{aligned}y_1' &= f_1(x; y_1; \dots; y_n) \\ y_2' &= f_2(x; y_1; \dots; y_n), \quad [A] \\ &\vdots \\ y_n' &= f_n(x; y_1; \dots; y_n)\end{aligned}$$
kde funkce $f_k (k = 1; \dots; n)$ jsou definovány na $(n + 1)$ - rozměrné oblasti $\Omega \in \mathbb{R}^{n+1}$, nazýváme Normální Soustava Diferenciálních Rovnic Prvního Řádu (NSDR1)
- Řešením NSDR1 nazýváme každou skupinu n funkcí tvaru $y_1(x), y_2(x), \dots, y_n(x)$, které jsou spojitě diferencovatelné v nějakém intervalu $I \subset \Omega$ a pro všechny body $x \in I$ vyhovují dané NSDR1
- Úlohu určit řešení NSDR1, které vyhovuje n počátečním podmínkám $y_1(x_0) = b_1, y_2(x_0) = b_2, \dots, y_n(x_0) = b_n$, kde $[x_0; b_1; b_2; \dots; b_n] \in \Omega$, je libovolný, ale pevně zvolený bod, nazýváme počáteční problém pro NSDR1
- Obecným řešením NSDR1R budeme rozumět každou skupinu n funkcí závisících na n obecných parametrech $C_1; C_2; \dots; C_n$ takových, že vhodnou (přípustnou) volbou těchto konstant obdržíme řešení každého počátečního problému
- Partikulárním řešením NSDR1 nazveme takové řešení, které obdržíme z obecného řešení pevnou volbou konstant $C_1; C_2; \dots; C_n$.

Převedení ODRn na NSDR1

- Celá mechanika hmotného bodu a tuhého tělesa (včetně příbuzných oborů) je vybudována na druhém Newtonově zákoně, který má obecně tvar soustavy tří nelineárních ODR2R dle souřadnic:

$$\begin{aligned}x''(t) &= f(t; x(t); y(t); z(t); x'(t); y'(t); z'(t)) \\ y''(t) &= g(t; x(t); y(t); z(t); x'(t); y'(t); z'(t)), \quad [B] \\ z''(t) &= h(t; x(t); y(t); z(t); x'(t); y'(t); z'(t))\end{aligned}$$

kde $x''(t)$ je druhá derivace dráhy podle času, $x'(t)$ je první derivace dráhy podle času a f, g, h jsou dané funkce.

- Počáteční podmínky (charakterizují počáteční polohu a počáteční rychlost) jsou ve tvaru:
 $x(t_0) = x_0; y(t_0) = y_0; z(t_0) = z_0; x'(t_0) = u_0; y'(t_0) = v_0; z'(t_0) = w_0, \quad [C]$
kde $x_0; y_0; z_0; u_0; v_0; w_0$ jsou daná čísla.
- Problém $[B] + [C]$ převedeme na problém $[A]$ takto:
 - položíme: $u(t) = x'(t); v(t) = y'(t); w(t) = z'(t) \quad [D]$
 - přepíšeme rovnice $[B]$ do tvaru:
 $u'(t) = X(t; x(t); y(t); z(t); u(t); v(t); w(t))$
 $y''(t) = Y(t; x(t); y(t); z(t); u(t); v(t); w(t)), \quad [E]$
 $z''(t) = Z(t; x(t); y(t); z(t); u(t); v(t); w(t))$
 - k těmto třem rovnicím připojíme vztahy $[D]$, které přepíšeme na tvar:
 $x'(t) = u(t); y'(t) = v(t); z'(t) = w(t) \quad [F]$
 - počáteční podmínky přepíšeme:
 $x(t_0) = x_0; y(t_0) = y_0; z(t_0) = z_0; u(t_0) = u_0; v(t_0) = v_0; w(t_0) = w_0$
- Soustava rovnic $[E] + [F]$ tvoří soustavu ODR1 pro šest neznámých funkcí x, y, z, u, v, w .

Příklad:

Počáteční problém $y^{(IV)} - 2y'' + y = 0; y(0) = 0, y'(0) = 1, y''(0) = 0, y^{(III)}(0) = -1$ převedeme na počáteční problém pro soustavu ODR1.

- Položíme: $y_1 = y; y_2 = y'; y_3 = y''; y_4 = y^{(III)}$;
- Derivací z toho plyne: $y_1' = y' = y_2; y_2' = y'' = y_3; y_3' = y^{(III)} = y_4;$
- Po dosazení do původní rovnice dostaneme soustavu ODR1R:

$$\begin{aligned}y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ y_3' &= y_4 \\ y_4' &= -y_1 + 2y_3\end{aligned}$$

- S počátečními podmínkami: $y_1(0) = 0; y_2(0) = 1; y_3(0) = 0; y_4(0) = -1;$
- Zobecněním tohoto postupu lze snadno převést každou DR n -tého řádu na normální soustavu n diferenciálních rovnic prvního řádu.

Soustava Lineárních Obyčejných Diferenciálních Rovnic 1. řádu (LODR1)

LODR1 je soustava diferenciálních rovnic tvaru:

$$\begin{aligned} y_1' &= a_{11}(x)y_1 + a_{12}(x)y_2 + \dots a_{1n}(x)y_n + f_1(x) \\ y_2' &= a_{21}(x)y_1 + a_{22}(x)y_2 + \dots a_{2n}(x)y_n + f_2(x) \\ &\dots \\ y_n' &= a_{n1}(x)y_1 + a_{n2}(x)y_2 + \dots a_{nn}(x)y_n + f_n(x) \end{aligned} \quad [G]$$

kde všechny koeficienty (funkce) $a_{ij}(x)$ a funkce $f_k(x)$ jsou funkce spojitě na intervalu I .

- Je-li $f_k(x) = 0, \forall x \in I$ a $k = 1, 2, \dots, n$ mluvíme o homogenní soustavě LODR1
- Je-li $f_k(x) \neq 0$ pro nějaké $x \in I$ a $k = 1, 2, \dots, n$ mluvíme o nehomogenní soustavě LODR1
- Pokud půjde o soustavu s konstantními koeficienty, budeme psát místo $a_{ij}(x)$ jen a_{ij} .
- Exaktně umíme řešit soustavy pouze s konstantními koeficienty, jinak musíme řešit numericky (viz. PAMAP, PAMAK).

PK9

Maticový zápis soustavy LODR1

Uvažujeme pouze konstantní koeficienty

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Sloupcové vektory: $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, y' = \begin{pmatrix} y_1' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}, f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \vdots \\ f_n(x) \end{pmatrix}.$

Pak soustavu LODR1 $[G]$ můžeme zapsat stručně ve tvaru:

$$y' = A \cdot y + f(x).$$

Zavedeme-li ještě konstantní vektor $b = (b_1; b_2; \dots; b_n)^T$, kde $b_i, i = 1, \dots, n$ jsou pravé strany počátečních podmínek, potom můžeme psát počáteční podmínky ve tvaru $y(x_0) = b$.

Obyčejná homogenní soustava LODR1

$$y' = A(x) \cdot y \quad (H)$$

Linearita prostoru řešení

Jsou-li vektory $y_1, y_2, \dots, y_k$ řešením soustavy $y' = A(x) \cdot y$ na intervalu I , potom také jejich lineární kombinace $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_k y_k$ je řešením této soustavy na intervalu I .

Ověření dosazením do H :

$$\begin{aligned} y' = A(x) \cdot y &\rightarrow (C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_k y_k)' = A(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_k y_k) \\ \text{derivujeme} &\rightarrow C_1 y_1' + C_2 y_2' + \dots + C_k y_k' = A(x)(C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_k y_k) \rightarrow \\ &\rightarrow y_1' = A(x) y_1 \dots y_k' = A(x) y_k \end{aligned}$$

Fundamentální systém

Jsou-li vektory $y_1, y_2, \dots, y_n$ lineárně nezávislé na intervalu I a jsou-li řešením soustavy H , potom říkáme, že tvoří *fundamentální systém* řešení soustavy H na intervalu I .

Fundamentální matice

Nechť vektory $y_1, y_2, \dots, y_n$ jsou řešením soustavy H . Tyto vektory jsou lineárně nezávislé na intervalu I právě tehdy, když matice

$$Y = Y(x) = [y_1, y_2, \dots, y_n] = \begin{pmatrix} y_{11} & y_{12} & \dots & y_{1n} \\ y_{21} & y_{22} & \dots & y_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \dots \\ y_{n1} & y_{n2} & \dots & y_{nn} \end{pmatrix}, \text{ jejíž sloupce tvoří vektory } y_1, y_2, \dots, y_n$$

má na intervalu I nenulový determinant. Matice se nazývá *fundamentální matice* soustavy.

Struktura obecného řešení

Tvoří-li vektory $y_1, y_2, \dots, y_n$ fundamentální systém řešení homogenní soustavy $y' = A(x) \cdot y$ na intervalu I , potom každé řešení y této soustavy lze jednoznačně vyjádřit ve tvaru $y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$, kde $C_i, i = 1, \dots, n$ jsou vhodné konstanty

Položíme-li $C = (C_1, C_2, \dots, C_n)^T$, potom lze psát $y = Y \cdot C = C^T \cdot Y^T$, kde Y je fundamentální matice.

$y = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n$ je vyjádření obecného řešení soustavy $y' = A(x) \cdot y$.

Homogenní soustava LODR1 s konstantními koeficienty

Tvar: $y' = A \cdot y$ (G), kde A je konstantní matice

- K určení obecného řešení OŘ soustavy je třeba nalézt n lineárně nezávislých řešení této soustavy
- K nalezení těchto n lineárně nezávislých řešení vede **Eulerova metoda vlastních čísel**
- Konstrukce fundamentálního systému řešení:
 - Hledáme partikulární řešení $y_p = e^{\lambda x} \cdot h = e^{\lambda x} (h_1, h_2, \dots, h_n)^T$, kde je třeba určit neznámé $\lambda \in \mathbb{C}$ a $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T \in \mathbb{C}^n$
 - Vektor $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T$ je nenulový (alespoň jedna složka je různá od nuly)
 - Dosazením do (G) dostaneme: $y_p' = \lambda \cdot e^{\lambda x} \cdot h = A \cdot (e^{\lambda x} \cdot h) = e^{\lambda x} \cdot A \cdot h$
 - V rovnici $\lambda \cdot e^{\lambda x} \cdot h = e^{\lambda x} \cdot A \cdot h$ krátíme $e^{\lambda x} \rightarrow A \cdot h = \lambda \cdot h$
 - Ta čísla λ pro která má rovnice $A \cdot h = \lambda \cdot h$ nenulové řešení $h \neq 0$ (alespoň jedna složka vektoru h je různá od nuly) nazýváme vlastní čísla matice A
 - Konstantní nenulové vektory h , které pro dané vlastní číslo λ vyhovují rovnici $A \cdot h = \lambda \cdot h$ se nazývají vlastní vektory matice A příslušné vlastnímu číslu λ
- Postup pro určení vlastních čísel čtvercové matice A
 - Užitím vztahu $h = E \cdot h$, kde E je jednotková matice (např: $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$)
 - $A \cdot h = \lambda E \cdot h \rightarrow (A - \lambda E) \cdot h = 0$, kde $0 = (0, 0, \dots, 0)^T$
 - Toto je homogenní soustava rovnic, která má nekonečně mnoho řešení $h = (h_1, h_2, \dots, h_n)^T$
 - Determinant této soustavy položíme roven 0 $\rightarrow |A - \lambda E| = 0$
 - Dostaneme charakteristickou rovnici soustavy (G) $\rightarrow$
$$\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0$$
 - Toto je algebraická rovnice n -tého stupně pro neznámou λ , která má n komplexních kořenů včetně násobnosti
 - Např. pro $n = 2$ je to kvadratická rovnice tvaru $\begin{vmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda \end{vmatrix} = 0$ kterou vyřešíme.
- Algoritmus řešení LODR1 $y' = A \cdot y$
 - Nalezneme všechna vlastní čísla λ matice A
 - Ke každému vlastnímu číslu λ matice A nalezneme vlastní vektor h
 - Pokud jsou všechna vlastní čísla reálná a navzájem různá, nalezneme n lineárně nezávislých partikulárních řešení soustavy $y' = A \cdot y$
 - Pokud jsou některá vlastní čísla λ násobnými kořeny charakteristické rovnice nebo jejími komplexními kořeny, použijeme dodatečné úpravy (viz příklady)
- Pro $n = 2$ hledáme dvě lineárně nezávislé neznámé funkce y_1, y_2
- OŘ je pak lineární kombinací těchto řešení

PŘ 10

PR 11

Poznámka k příkladu 11:

- Zkonstruovali jsme tedy komplexní řešení $w = u + iv$
- K nalezení dvou reálných řešení využijeme poznatek:

Má-li homogenní soustava $y' = Ay$ komplexní řešení $y = u + iv$, kde u, v jsou reálné vektory, potom má také komplexně sdružené řešení $\bar{y} = u - iv$ a zároveň řešení u a v .

- Naše soustava má také reálná řešení
 $u = e^{-6x} \begin{pmatrix} \cos x \\ \cos x - \sin x \end{pmatrix}$ a $v = e^{-6x} \begin{pmatrix} \sin x \\ \sin x + \cos x \end{pmatrix}$, jsou lineárně nezávislá.

PR 12

Poznámka k příkladu 12:

- Koeficienty a, b ve vztahu $v = e^{-2x} \begin{pmatrix} ax + a_1 \\ bx + b_1 \end{pmatrix}$ bylo možno volit stejně, jako složky h_1, h_2 vlastního vektoru h .
- Lze ukázat, že je-li λ dvojnásobné reálné vlastní číslo matice A takové, že hodnota matice $A - \lambda E$ je rovna jedné (řádky jsou závislé a alespoň jeden je nenulový), pak lze partikulární řešení u předpokládat v obvyklém tvaru $u = e^{\lambda x} h$ a řešení v pak ve tvaru $v = e^{\lambda x} (hx + \bar{h})$, kde vektor $\bar{h}$ vyhovuje podmínce $(A - \lambda E)\bar{h} = h$.
- Tento postup neplatí v případě, že má matice A dvojnásobné reálné vlastní číslo λ takové, že soustava má tvar:

$$\begin{aligned} y_1' &= \lambda y_1 \\ y_2' &= \lambda y_2 \end{aligned}$$

- Tuto soustavu řešíme postupnou integrací
- Pro $n \geq 3$ je zobecněním ukázaných případů.

Obecná nehomogenní soustava LODR1

Tvar: $y' = A \cdot y + f(x) \quad (H),$

kde A je konstantní matice a $f(x)$ nenulová spojitá vektorová funkce na intervalu I .

Struktura obecného řešení OŘ

Obecné řešení soustavy (H) lze psát ve tvaru $y = y_h + y_p$, kde y_h je OŘ příslušné homogenní LODR1 a y_p je nějaké partikulární řešení původní nehomogenní LODR1.

- Exaktně umíme řešit pouze soustavy s konstantními koeficienty

Princip Superpozice

Lze-li v nehomogenní soustavě (H) vektorovou funkci $f(x)$ rozložit na součet tvaru

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) + \dots + f_r(x)$$

a dovedeme-li určit partikulární řešení $y_{pj}(x)$ rovnice $y' = A \cdot y + f_j(x)$, pak

$y_p(x) = y_{p1}(x) + y_{p2}(x) + \dots + y_{pr}(x)$ je partikulární řešení původní soustavy (H) .

K nalezení OŘ (PŘ) nehomogenní soustavy (H) máme opět k dispozici metody

- variace konstant
- speciálního tvaru pravé strany (metoda neurčitých koeficientů)

Metoda variace konstant

Předpokládáme, že $y_1, y_2, \dots, y_n$ jsou LN partikulární řešení přidružené homogenní soustavy

Nechť $Y(x)$ je příslušná fundamentální matice řešení přidružené homogenní soustavy

- Pak OŘ této homogenní soustavy je tvaru:

$$y_h(x) = C_1 y_1 + C_2 y_2 + \dots + C_n y_n = Y(x) \cdot C, \text{ kde } C = (C_1; C_2; \dots; C_n)^T$$

OŘ $y(x)$ soustavy $y' = A \cdot y + f(x) \quad (H)$

$$y(x) = C_1(x) y_1(x) + C_2(x) y_2(x) + \dots + C_n(x) y_n(x) = Y(x) \cdot C(x) \quad (I)$$

$C(x) = [C_1(x); C_2(x); \dots; C_n(x)] \rightarrow$ složky $C(x)$ je potřeba určit.

- Dosadíme (I) do (H) :

$$Y'(x) \cdot C(x) + Y(x) \cdot C'(x) = A(x) \cdot Y(x) \cdot C(x) + f(x) \quad (J)$$

- Toto je soustava pro neznámé $C'_1(x), C'_2(x), \dots, C'_n(x)$
- Matice soustavy (J) je fundamentální matice $Y(x)$ (má nenulový determinant)
- Integrací $\int C'_j(x) dx$ dostaneme $C_j(x)$ pro $j = 1 \dots n \rightarrow$ OŘ y soustavy $y' = A \cdot y + f(x) \quad (H)$

Metoda neurčitých koeficientů

viz. příklad

PR 1 RES OR $y^{(4)} - 16y = 0$

CHR: $r^4 - 16 = 0$

$(r^2 - 4)(r^2 + 4) = 0 \Rightarrow r^2 - 4 = 0 \vee r^2 + 4 = 0$

$r_1 = 2$

$r_2 = -2$

$r_3 = 2i$

$r_4 = -2i$

$r_{\alpha\beta} = \alpha + \beta i$
 $\alpha = 0 \neq \pm 2i$

OR: $y = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} + C_3 e^{0x} \cos 2x + C_4 e^{0x} \sin 2x$

PR 2 $y'' + y' - 2y = x^2$

a) homogenní: $y'' + y' - 2y = 0$

CHR: $r^2 + r - 2 = 0$

$r_1 = -2, r_2 = 1$

$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$

b) $G(x) = x^2$... pln 2. stupně

odhad $y_p = Ax^2 + Bx + C$

$y_p' = 2Ax + B$

$y_p'' = 2A$

OR: $2A + 2Ax + B - 2(Ax^2 + Bx + C) = x^2$

$2A + 2Ax + B - 2Ax^2 - 2Bx - 2C = x^2$

MVK: $x^2: -2A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{2}$
 $x: 2A - 2B = 0 \Rightarrow B = -\frac{1}{2}$
 $x^0: 2A + B - 2C = 0 \Rightarrow C = -\frac{3}{4}$

OR: $y = y_h + y_p = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}x - \frac{3}{4}$

PR 3 $y'' + 4y = e^{3x}$

a) homogenní: $y'' + 4y = 0$

CHR: $r^2 + 4 = 0$

$r_{\alpha\beta} = 0 \pm 2i$

$\alpha = 0, \beta = 2$

$y_h = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x$

b) $G(x) = e^{3x}$... $Ce^{bx}; C=1, b=3$

odhad $y_p = Ae^{3x}$

$y_p' = 3Ae^{3x}$

$y_p'' = 9Ae^{3x}$

OR: $9Ae^{3x} + 4Ae^{3x} = e^{3x}$

$13Ae^{3x} = e^{3x} \quad | : e^{3x}$

$13A = 1 \Rightarrow A = \frac{1}{13} \quad y_p = \frac{1}{13} e^{3x}$

OR: $y = y_h + y_p = C_1 \cos 2x + C_2 \sin 2x + \frac{1}{13} e^{3x}$

Pr 4 $y'' + y' - 2y = 8 \sin x$

a) H: $y'' + y' - 2y = 0$

chr: $r^2 + r - 2 = 0$

$r_1 = -2$

$r_2 = 1$

$y_h = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x$

b) $G(x) = 8 \sin x$

$C=1; k=1$

odhad: $y_p = A \cos x + B \sin x$

$y_p' = -A \sin x + B \cos x$

$y_p'' = -A \cos x - B \sin x$

DDZ: $-A \cos x - B \sin x - A \sin x + B \cos x - 2A \cos x - 2B \sin x = 8 \sin x$
 $-3A \cos x + B \cos x - 3B \sin x - A \sin x = 8 \sin x$

$\sin x: -3B - A = 1$

$\cos x: -3A + B = 0$

$A = -\frac{1}{10}$

$B = -\frac{3}{10}$

$y_p = -\frac{1}{10} \cos x - \frac{3}{10} \sin x$

ok: $y = y_h + y_p = C_1 e^{-2x} + C_2 e^x - \frac{1}{10} \cos x - \frac{3}{10} \sin x$

Pr 5

y_p ... odhadujeme jako součet obou částí rovnice

Pr: $G(x) = x \cdot \cos 3x \rightarrow y_p = (Ax+B) \cos 3x + (Cx+D) \sin 3x$

Pr 6

$y'' - 4y = x \cdot e^x + \cos 2x$

a) H: $y'' - 4y = 0$

chr: $r^2 - 4 = 0$

$r_{1,2} = \pm 2$

$y_h = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x}$

b1) $y'' - 4y = x \cdot e^x$

odhad: $y_{p1} = (Ax+B) e^x$

$y_{p1}' = A e^x + (Ax+B) e^x$

$y_{p1}'' = A e^x + A e^x + (Ax+B) e^x$

$y_{p1} = (-\frac{1}{3}x - \frac{2}{9}) e^x$

DDZ: $2A e^x + (Ax+B) e^x - 4(Ax+B) e^x = x e^x$

$2A e^x + A x e^x + B e^x - 4A x e^x - 4B e^x = x e^x$

$e^x (2A - 3Ax - 3B) = x e^x / e^x$

$2A - 3Ax - 3B = x$

$x: -3A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{3}$

$P: 2A - 3B = 0 \Rightarrow B = -\frac{2}{9}$

b2) $y'' - 4y = \cos 2x$

odhad $y_{p2} = C \cos 2x + D \sin 2x$

$y_{p2}' = -2C \sin 2x + 2D \cos 2x$

$y_{p2}'' = -4C \cos 2x - 4D \sin 2x$

DDZ: $-4C \cos 2x - 4D \sin 2x - 4C \cos 2x - 4D \sin 2x = \cos 2x$

$-8C \cos 2x - 8D \sin 2x = \cos 2x$

$\cos 2x: -8C = 1 \Rightarrow C = -\frac{1}{8} \rightarrow y_{p2} = -\frac{1}{8} \cos 2x$

$\sin 2x: -8D = 0 \Rightarrow D = 0$

ok: $y = y_h + y_{p1} + y_{p2} = C_1 e^{2x} + C_2 e^{-2x} - (\frac{1}{3}x + \frac{2}{9}) e^x - \frac{1}{8} \cos 2x$

pr 7) $y'' - y' - y = 4xe^x$

CHR: $r^2 - r - 1 = 0$
 $r_1 = 1 \quad r_2 = -\frac{1}{2}$

$G(x) = 4xe^x \rightarrow a=1; b=0 \quad P_1(x) = 4x \rightarrow h=1$
 $a+bi = 1+0i = 1$ JE KOŘENEM CHR
 (hahnova $h=1$)

$\Rightarrow y_p = x'(Ax+B) \cdot e^x$

pr 8) $y'' + 3y' + 2y = 4x^2 - 12$

CHR: $r^2 + 3r + 2 = 0$
 $r_1 = -2 \quad r_2 = -1$

$G(x) = 4x^2 - 12 \quad P_2(x) = 4x^2 - 12 \rightarrow n=2 \quad p=2$
 $\rightarrow a=0, b=0 \quad a+bi=0$ NEJÍ KOŘEN CHR

$\Rightarrow y_p = Ax^2 + Bx + C$

pr 9): ELIMINACNÍ METODA ŘEŠENÍ SOUSTAV LODR

$\rightarrow$ princip: převést soustavu n lineárních DR 1.Ř na jednu lineární diferenciální rovnici n-tého řádu

$\rightarrow$ pomocí vhodných alg. úprav a pomocí derivování zkrátíme rovnice soustavy postupně glibujeme n-1 rovnicech fci's jejich derivacemi

$\rightarrow$ musí se jednat o LODR s konstantními koeficienty

$y_1' = -2y_1 + 2y_2 + x \quad \text{I.}$

$y_2' = 3y_1 - y_2 \quad \text{II.}$

Např. eliminace y_2 a y_2' z rovnice neobsahující y_2'

$\rightarrow$ vyjádříme y_2 z I. $\Rightarrow 2y_2 = y_1' + 2y_1 - x$
 derivujeme $\Rightarrow 2y_2' = y_1'' + 2y_1' - 1$ } dosadíme do II.

$\frac{1}{2}(y_1'' + 2y_1' - 1) = 3y_1 - \frac{1}{2}(y_1' + 2y_1 - x) \quad / \cdot 2$

$y_1'' + 2y_1' - 1 = 6y_1 - y_1' - 2y_1 + x$

$y_1'' + 3y_1' - 4y_1 = x + 1 \Rightarrow$ homogenní LODR 2 s konst. fci y_1

CHR: $r^2 + 3r - 4 = 0$
 $r_1 = -4 \quad r_2 = 1$
 $y_h = 4e^{-4x} + C_2 e^x$

$a=0 \quad b=0$
 $y_p = Ax + B$
 $y_p' = A$
 $y_p'' = 0$

$3A - 4(Ax+B) = x+1$
 $3A - 4Ax - 4B = x+1$
 $3A - 4B = 1$
 $-4A = 1 \Rightarrow A = -\frac{1}{4}$
 $B = -\frac{5}{16}$

$y_p = -\frac{1}{4}x - \frac{5}{16}$

ov: $g_1 = G e^x + H e^{-4x} - \frac{1}{16}(4x+7)$ $G, H \in \mathbb{R}$

ar: $g_1' = G e^x - 4H e^{-4x} - \frac{1}{4}$

→ dosadíme! Oč to sa neobstahuje! $g_1' (\rightarrow I)$ dostaneme

$$g_1' = -2g_1 + 2g_2 + x$$

$$\begin{aligned} g_1' + 2g_1 - x &= 2g_2 \Rightarrow g_2 = \frac{1}{2}g_1' + g_1 - \frac{1}{2}x = \frac{1}{2}g_1' + G e^x + H e^{-4x} - \frac{1}{4}x - \frac{7}{16} - \frac{1}{2}x = \\ &= \frac{1}{2}G e^x - 2H e^{-4x} - \frac{1}{8} + G e^x + H e^{-4x} - \frac{1}{4}x - \frac{7}{16} - \frac{1}{2}x = \\ &= \frac{3}{2}G e^x - 2H e^{-4x} - \frac{1}{4}x - \frac{9}{16} ; G, H \in \mathbb{R} \end{aligned}$$

Oč konštanty JE: $g_1 = G e^x + H e^{-4x} - \frac{1}{16}(4x+7)$

$g_2 = \frac{3}{2}G e^x - 2H e^{-4x} - \frac{3}{4}x - \frac{9}{16} ; G, H \in \mathbb{R}$

→ tato metoda dobre funguje po sustave 2 LODE!

→ pro vcel' rozumitel' je prave' oddiel'.

10) ROKA SUSTAVY: $g_1' = g_1 + 4g_2$
 $g_2' = g_1 + g_2$

Char. vEE: $|A - \lambda E| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 4 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (1-\lambda)^2 - 4 = 0$

$\lambda^2 - 2\lambda - 3 = 0 \Rightarrow (\lambda_1 - 3)(\lambda_2 + 1) = 0$ $\lambda_1 = 3$
 $\lambda_2 = -1$

pro $\lambda_1 = 3$: $(A - \lambda E)u = 0$

$$\left[\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} - 3 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$-2u_1 + 4u_2 = 0 \Rightarrow$ volíme $u_2 = t$
 $u_1 - 2u_2 = 0 \Rightarrow u_1 - 2t = 0$
 $u_1 = 2t$

vlastný vektor $u = t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$

→ 1. partikulárny riešenie: $u = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{3x} = \begin{pmatrix} 2e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix}$

pro $\lambda_2 = -1$: $\left[\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \cdot \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

vlastný vektor $v = t \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$

→ 2. partikulárny riešenie $v = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix} e^{-x} = \begin{pmatrix} -2e^{-x} \\ e^{-x} \end{pmatrix}$ $2v_1 + 4v_2 = 0$ volíme $v_2 = t$
 $v_1 + 2v_2 = 0 \Rightarrow v_1 = -2t$

OK y je pak L k vektorem $y(x)$.

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = G_1 u + G_2 v = G_1 \begin{pmatrix} 2e^{3x} \\ e^{3x} \end{pmatrix} + G_2 \begin{pmatrix} -2e^{-x} \\ e^{-x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2G_1 e^{3x} - 2G_2 e^{-x} \\ G_1 e^{3x} + G_2 e^{-x} \end{pmatrix}, \underline{G_1, G_2 \text{ OR}}$$

(P5 11) : Reske soustava $y_1' = -4y_1 + y_2$
 $y_2' = -2y_1 - 5y_2$

DR: $\begin{vmatrix} -4-\lambda & 1 \\ -2 & -5-\lambda \end{vmatrix} = 0 \rightarrow (-4-\lambda)(-5-\lambda) + 2 = 0$ $\lambda_{1,2} = \frac{-12 \pm \sqrt{144-32}}{2} = \frac{-12 \pm \sqrt{112}}{2}$
 $\lambda^2 + 9\lambda + 22 = 0$
 $\lambda_1 = -6 + i$
 $\lambda_2 = -6 - i$

pro $\lambda_1 = -6 + i$: $\begin{pmatrix} -4-(-6+i) & 1 \\ -2 & -5-(-6+i) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} 1-i & 1 \\ -2 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} (1-i)h_1 + h_2 = 0 & (1-i) \\ -2h_1 + (1-i)h_2 = 0 \end{matrix}$

$(1-i)(1-i)h_1 + (1-i)h_2 = 0$

sejdi na $-2h_1 + (1-i)h_2 = 0$

$-2h_1 + (1-i)h_2 = 0 \quad h_1 =$

$-2 + (1-i)h_2 = 0$

$h_2 = \frac{2}{1-i} \pm \left(\frac{1-i}{1-i} \right)$

$h_2 = (1+i)t$

$\rightarrow$ vektor $h = \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} t$

(λ_2 y je rovněž stejný vektor $\odot$)

$\Rightarrow$ 1 partikulární řešení

$u = e^{(-6+i)x} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = e^{-6x} \cdot e^{ix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} = e^{-6x} (\cos x + i \sin x) \begin{pmatrix} 1 \\ 1+i \end{pmatrix} =$

$= e^{-6x} \begin{pmatrix} \cos x + i \sin x \\ (\cos x + i \sin x)(1+i) \end{pmatrix} = e^{-6x} \begin{pmatrix} \cos x + i \sin x \\ \cos x + i \cos x + \sin x - \sin x \end{pmatrix} =$

$= e^{-6x} \left[\begin{pmatrix} \cos x \\ \cos x - \sin x \end{pmatrix} + i \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x + \sin x \end{pmatrix} \right] = e^{-6x} \underbrace{\begin{pmatrix} \cos x \\ \cos x - \sin x \end{pmatrix}}_u + i e^{-6x} \underbrace{\begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x + \sin x \end{pmatrix}}_v$

→ zkonstruovali jsme tedy komplexní řešení $w = u + i\pi$

→ k nalezení 2 reálných řešení využijeme poznatek:

- má-li homogenní soustava $y' = Ay$ komplexní řešení $y = u + i\pi$, kde u, π jsou reálné rektory, potom má také komplexní sdružené řešení $\bar{y} = u - i\pi$ a zároveň řešení u, π .

⇒ každá soustava má také reálná řešení $u = e^{-bx} \begin{pmatrix} \cos x \\ \cos x - \sin x \end{pmatrix}$ } LDN
 $\pi = e^{-bx} \begin{pmatrix} \sin x \\ \sin x + \cos x \end{pmatrix}$ } LN

⇒ OŘ ve tvaru $y = G u + H \pi$ je tedy

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{-bx} (G \cos x + H \sin x) \\ (G + H) \cos x + (H - G) \sin x \end{pmatrix} \quad G, H \in \mathbb{R}$$

Pr 12. Roste soustava $y_1' = 3y_1 - y_2$
 $y_2' = y_1 - y_2$

chr: $\begin{vmatrix} -3-\lambda & -1 \\ 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (-3-\lambda)(-1-\lambda) + 1 = 0$
 $\lambda^2 + 4\lambda + 4 = 0$
 $(\lambda + 2)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} = -2$

pro $\lambda = -2$ $\begin{pmatrix} -3+2 & -1 \\ 1 & -1+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = 0$

$-h_1 - h_2 = 0$

$h_1 + h_2 = 0$

volíme: $h_1 = t$
 $h_2 = -t$

$u = t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

máme jen jediné
partikulární řešení

$u = e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

→ Ladoj partikulāru risēšanu kļūdas veidā

$$w = e^{-2x} \begin{pmatrix} p_1(x) \\ q_1(x) \end{pmatrix} = e^{-2x} \begin{pmatrix} ax + a_1 \\ bx + b_1 \end{pmatrix}$$

$$\left. \begin{aligned} p_1(x) &= ax + a_1 \\ q_1(x) &= bx + b_1 \end{aligned} \right\} \text{izolē PLN 1. šķirni}$$

$$\begin{aligned} \text{DDZ: } y_1 &= e^{-2x} (ax + a_1) \rightarrow y_1' = -2e^{-2x} (ax + a_1) + e^{-2x} \cdot a \\ y_2 &= e^{-2x} (bx + b_1) \rightarrow y_2' = -2e^{-2x} (bx + b_1) + e^{-2x} \cdot b \end{aligned}$$

$$\rightarrow -2e^{-2x} (ax + a_1) + e^{-2x} a = -3e^{-2x} (ax + a_1) - e^{-2x} (bx + b_1) \quad | : e^{-2x}$$

$$\rightarrow -2e^{-2x} (bx + b_1) + e^{-2x} b = e^{-2x} (ax + a_1) - e^{-2x} (bx + b_1) \quad | : e^{-2x}$$

$$-2ax - 2a_1 + a = -3ax - 3a_1 - bx - b_1$$

$$-2bx - 2b_1 + b = ax + a_1 - bx - b_1$$

parametru koef: $x^1: -2a = -3a - b \wedge -2b = a - b \Rightarrow a = -b \wedge a = -b$

$x^0: -2a_1 + a = -3a_1 - b_1 \wedge -2b_1 + b = a_1 - b_1 \Rightarrow a_1 = -a - b_1 \wedge a_1 = -b_1 + b$

ra jau lineāru sistēmu

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \sim \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 0 \end{array} \right) \textcircled{2}$$

$$\left(\begin{array}{cc} a+b & = 0 \\ a+b & = 0 \\ a+a+b_1 & = 0 \\ -b+a_1+b_1 & = 0 \end{array} \right)$$

$$\textcircled{2} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \quad h=2 \quad \text{varam 2 parametrus } a=1 \quad a_1=0$$

$$\rightarrow b = -1 \rightarrow b_1 = -1$$

dosimies dz $\tau = e^{-2x} \begin{pmatrix} x+0 \\ -x-1 \end{pmatrix} = e^{-2x} \begin{pmatrix} x \\ -x-1 \end{pmatrix}$

$$\text{DDZ: } y = G u + h \tau = G e^{-2x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + h e^{-2x} \begin{pmatrix} x \\ -x-1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} G_1 e^{-2x} + G_2 e^{-2x} x \\ -G_1 e^{-2x} - G_2 e^{-2x} (x+1) \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left. \begin{aligned} y_1 &= e^{-2x} (G_1 + G_2 x) \\ y_2 &= e^{-2x} (-G_1 - G_2 x - G_2) \end{aligned} \right\} G_1, G_2 \in \mathbb{R}$$

→ křivky apb ve vztahu $r = e^{2x} \begin{pmatrix} ax+a_1 \\ bx+b_1 \end{pmatrix}$ lze měnit volit skýně, jako složky h_1, h_2 vlastního vektoru h

→ lze ukázat, že je-li λ dvojnásobná reálná vlastní číslo matice A takové, že hodnota matice $A - \lambda E$ je rovna jedné (řádový nulový a alespoň jeden je nenulový), pak ke partikulárnímu řešení u předpokládá se obecním tvaru $r = e^{\lambda x} h$ a řešení r pak má tvar $r = e^{\lambda x} (hx + \bar{h})$, kde vektor $\bar{h}$ zahrnuje podmínku $(A - \lambda E)\bar{h} = h$

→ tento postup uplatní v případě, že má matice A dvojnásobné reálné vlastní číslo λ takové, že hodnota matice $A - \lambda E$ je 0

→ toto nastane v případě, že soustava má tvar:

$$\left. \begin{aligned} y_1' &= 2y_1 \\ y_2' &= 2y_2 \end{aligned} \right\} \text{ řešíme postupně integrací}$$

→ pro $n \geq 3$ je zobecněním ukázaných případů?

Pr. 13
MVK

určíme OK soustavu

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 4y_2 + \cos x \\ y_2' &= -y_1 - 2y_2 + \sin x \end{aligned}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$$

1. řešíme předchozí homogenní soustavu:

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 4y_2 \\ y_2' &= -y_1 - 2y_2 \end{aligned}$$

CHR: $\begin{vmatrix} 2-\lambda & 4 \\ -1 & -2-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)(-2-\lambda) + 4 = 0$
 $-4 - 2\lambda + 2\lambda + \lambda^2 + 4 = 0$
 $\lambda^2 = 0 \quad \lambda_{1,2} = 0$

v. vektor h příslušný k $\lambda = 0$ $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ $\begin{aligned} 2h_1 + 4h_2 &= 0 \\ -h_1 - 2h_2 &= 0 \end{aligned}$ volíme $h_1 = 2t$
 $h_2 = -t$
 $h = t \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ PD $u = e^{0x} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Přes hledáme ve tvaru $x = \begin{pmatrix} 2x + \bar{h}_1 \\ -x + \bar{h}_2 \end{pmatrix}$, kde složí $\bar{h}_1$ a $\bar{h}_2$

zhrnující soustavu: $\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{h}_1 \\ \bar{h}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\begin{matrix} 2\bar{h}_1 + 4\bar{h}_2 = 2 \\ -\bar{h}_1 - 2\bar{h}_2 = -1 \end{matrix}$ volíme $\bar{h}_1 = t$
 $\bar{h}_2 = \frac{1}{2}(4t)$

$\bar{h} = \begin{pmatrix} t \\ \frac{1}{2}(4t) \end{pmatrix}$ např. pro $t=1$ $\bar{h} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$
 $\Rightarrow y_h = \xi h + \eta v = G \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + G \begin{pmatrix} 2x+1 \\ -x+0 \end{pmatrix}$

2. Hledáme OD y ve tvaru $y = G(x) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + G_2(x) \begin{pmatrix} 2x+1 \\ -x \end{pmatrix}$; $G(x), G_2(x)$ musíme

$\rightarrow$ k určení $G(x), G_2(x)$ najdeme řešnou soustavu pro $G'(x), G_2'(x)$

$$\begin{pmatrix} 2 & 2x+1 \\ -1 & -x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} G'(x) \\ G_2'(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$$

$$G'(x) = \frac{\begin{vmatrix} \cos x & 2x+1 \\ \sin x & -x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 2x+1 \\ -1 & -x \end{vmatrix}} = \frac{-x \cos x - (2x+1) \sin x}{-2x + 2x + 1} = -x \cos x - 2x \sin x - \sin x$$

$$G_2'(x) = \frac{\begin{vmatrix} 2 & \cos x \\ -1 & \sin x \end{vmatrix}}{1} = 2 \sin x + \cos x$$

$$G(x) = - \int (x \cos x + 2x \sin x + \sin x) dx = - \int x \cos x dx - 2 \int x \sin x dx - \int \sin x dx \quad \textcircled{1}$$

$\int x \cos x dx = x \sin x - \int \sin x dx = x \sin x + \cos x + C$ $u=x \quad u'=1$ $v=\cos x \quad v'=-\sin x$	$\int x \sin x dx = -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C$ $u=x \quad u'=1$ $v=\sin x \quad v'=\cos x$
---	--

$$\textcircled{1} -x \sin x - \cos x + 2x \cos x - 2 \sin x + \cos x + C_1$$

$$G(x) = 2x \cos x - (x+2) \sin x + C_1$$

$$G_2(x) = 2 \int \sin x dx + \int \cos x dx$$

$$G_2(x) = -2 \cos x + \sin x + C_2$$

OD: $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = G(x) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + G_2(x) \begin{pmatrix} 2x+1 \\ -x \end{pmatrix} = [2x \cos x - (x+2) \sin x + C_1] \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} +$
 $+ [-2 \cos x + \sin x + C_2] \begin{pmatrix} 2x+1 \\ -x \end{pmatrix} \quad \textcircled{2}$

$$\textcircled{2} \begin{pmatrix} 4x \cos x \\ -2x \cos x \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2(x+2) \sin x \\ -(x+2) \sin x \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} (x+2) \cos x \\ -2x \cos x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} (2x+1) \sin x \\ -x \sin x \end{pmatrix} + C_2 \begin{pmatrix} 2x+1 \\ -x \end{pmatrix} \quad \textcircled{3}$$

$$\textcircled{E} \quad y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cancel{4\cos x} - \cancel{2x\sin x} - \cancel{4\sin x} + 2C - \cancel{4x\cos x} - \cancel{2\cos x} + \cancel{2x\sin x} + \sin x + \frac{1}{2}(2x+1) \\ -\cancel{2x\cos x} + \cancel{x\sin x} + \cancel{2\sin x} - C + \cancel{2x\cos x} - \cancel{x\sin x} - \frac{1}{2}x \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -3\sin x - 2\cos x + 2C + \frac{1}{2}(2x+1) \\ 2\sin x - C - \frac{1}{2}x \end{pmatrix}$$

$$y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = C \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2x+1 \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3\sin x - 2\cos x \\ 2\sin x \end{pmatrix}$$

PR 11 Metoda neurózijl koeficientu

Styjn' pólád PR 11

$$y_1' = 2y_1 + 4y_2 + \cos x$$

$$y_2' = -y_1 - 2y_2 + \sin x$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}$$

úine 2 PR 11 $y_h = C \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2x+1 \\ -x \end{pmatrix}$

→ uróine y_p na zálladi trvan $f(x)$ y_p hľadáme vi trvan

$$y_p = \begin{pmatrix} A\cos x + B\sin x \\ C\cos x + D\sin x \end{pmatrix} \rightarrow y_p' = \begin{pmatrix} -A\sin x + B\cos x \\ -C\sin x + D\cos x \end{pmatrix} \quad DDZ$$

$$\Rightarrow -A\sin x + B\cos x = 2A\cos x + 2B\sin x + 4C\cos x + 4D\sin x + \cos x$$

$$-C\sin x + D\cos x = -A\cos x + B\sin x - 2C\cos x - 2D\sin x + \sin x$$

koef u $\sin x$: $-A = 2B + 4D$

koef u $\cos x$: $B = 2A + 4C + 1$

$-C = -B - 2D + 1$

$D = -A - 2C$

úine souz. $-A - 2B + 0C - 4D = 0$

$-2A + B - 4C + 0D = 1$

$0A + B - C + 2D = 1$

$A + 0B + 2C + D = 0$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 & 0 & 4 & 0 \\ -2 & 1 & -4 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 5 & -4 & 8 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & -2 & 3 & 0 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 4 & 6 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -4 & -4 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -2 & -2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & -2 & -2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 6 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \quad \begin{matrix} A = -2 \\ B = -3 \\ C = 0 \\ D = 2 \end{matrix}$$

↓ skopel

OR: $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = y_h + y_p = C \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} + \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2x+1 \\ -x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2\cos x - 2\sin x \\ 2\sin x \end{pmatrix}$

Wiederholungsfragen: Naturale & OSPD 1K

2. HNK Methode OK re handu

2. HNK Methode OK re handu

$$y = G(x) \begin{pmatrix} \cos x \\ -\sin x \end{pmatrix} + G(x) \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

$$G(x) = 2 \cdot G(x) \cdot 2$$

$$G(x) = b(x)$$

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} y_2^2 - 1 \\ y_2^2 - 1 \end{pmatrix}$$

$$y_1' = y_2 + y_2^2 - 1$$

$$y_2' = -y_1 + y_2$$

1. Formierung 5 ODE 1K:

$$y' = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y$$

$$| -\lambda \quad 1 \\ 1 \quad -\lambda | = 0$$

$$\lambda^2 + 1 = 0$$

$$\lambda = i, -i$$

$$y = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 - \lambda_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0$$

$$y = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} \Rightarrow y' = \begin{pmatrix} -\sin x \\ \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} y$$

$$\begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x + \sin x \\ \sin x + \cos x \end{pmatrix}$$

$$y' = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x + \sin x \\ \sin x + \cos x \end{pmatrix}$$

$$y' = \begin{pmatrix} \cos x \\ \sin x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sin x \\ \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos x + \sin x \\ \sin x + \cos x \end{pmatrix}$$

$$y_2 + \frac{1}{y_2} = \cos x + \frac{1}{\cos x} = \cos x + \sec x$$

$$G(x) = \int \cos x dx = \sin x$$

$$G(x) = \int \frac{\cos x}{\sin x} dx = \ln |\sin x|$$

$$= \int \frac{1}{2} \ln(1 - t^2) dt = \int \frac{1}{2} \ln(1 - t^2) dt$$

$$G(x) = \frac{1}{2} \ln(1 - t^2) = \frac{1}{2} \ln(1 - \sin^2 x) = \frac{1}{2} \ln(\cos^2 x) = \ln |\cos x|$$

$$G(x) = \frac{1}{2} \ln(1 - t^2) = \frac{1}{2} \ln(1 - \sin^2 x) = \frac{1}{2} \ln(\cos^2 x) = \ln |\cos x|$$

⑦

PR 16

$$\begin{aligned} y_1' &= 2y_1 + 3y_2 + 5x \\ y_2' &= 3y_1 + 2y_2 + 8e^x \end{aligned}$$

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} y + \begin{pmatrix} 5x \\ 8e^x \end{pmatrix}$$

1. homogeneous SODR1R:

$$y' = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} y$$

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 3 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{aligned} 4-\lambda^2-9 &= 0 \\ \lambda^2-4\lambda-5 &= 0 \\ (\lambda-5)(\lambda+1) &= 0 \\ \lambda_1=5 & \quad \lambda_2=-1 \end{aligned}$$

$$\lambda=5: \begin{pmatrix} -3 & 3 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} -3h_1 + 3h_2 &= 0 \\ -h_1 + h_2 &= 0 \end{aligned}$$

$$h_1 = t \quad h_2 = t$$

$$\lambda_2 = -1: \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 3 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$3h_1 + 3h_2 = 0$$

$$h_1 = -t \quad h_2 = t$$

$$y_h = 6e^{5x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 6e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

störans funktion

SUPERVISOR

$$2. b(x) = b_1(x) + b_2(x)$$

$$a) y_{p1}: \begin{pmatrix} 5x \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow y_{p1} = \begin{pmatrix} Ax+B \\ Cx+D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix}$$

$$y_{p1}: \begin{pmatrix} A \\ C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ax+B \\ Cx+D \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5x \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A &= 2Ax + 2B + 3Cx + 3D + 5x \\ C &= 3Ax + 3B + 2Cx + 2D \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \lambda x: 0 &= 2A + 3C + 5 & 2x: 0 &= 3A + 2C \\ \lambda x^2: A &= 2B + 3D & 2x^2: C &= 3B + 2D \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 0 & -5 \\ 3 & 0 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -2 & 0 & -3 & 0 \\ 0 & -3 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 4 & 3 & 6 & -5 \\ 0 & 6 & 2 & 9 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -4/3 & -5/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 4/3 & 10/3 & -5 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -4/3 & -5/3 & 0 \\ 0 & 1 & -1/3 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 10/3 & -5 \\ 0 & 0 & 0 & 5 & 20/3 \end{pmatrix}$$

$$y_{p1} = \begin{pmatrix} 2x - 13/5 \\ -3x + 12/5 \end{pmatrix}$$

$$b) y_{p2}: \begin{pmatrix} 0 \\ 8e^x \end{pmatrix} \rightarrow y_{p2} = \begin{pmatrix} Ae^x \\ Be^x \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 8e^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Ae^x \\ Be^x \end{pmatrix}$$

$$y_{p2}: \begin{pmatrix} Ae^x \\ Be^x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} Ae^x \\ Be^x \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 8e^x \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} Ae^x &= 2Ae^x + 3Be^x \\ Be^x &= 3Ae^x + 2Be^x + 8e^x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} A &= 2A + 3B \\ B &= 3A + 2B + 8 \end{aligned}$$

$$\rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & -8 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$y_{p2} = \begin{pmatrix} -3e^x \\ e^x \end{pmatrix}$$

the particular & particular:

$$y = 6e^{5x} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 6e^{-x} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2x - 13/5 \\ -3x + 12/5 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -3e^x \\ e^x \end{pmatrix}$$

$$y = 6e^{5x} + 6e^{-x} + 2x - 13/5 - 3x + 12/5 - 3e^x + e^x$$