



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



*Vytvořeno v rámci projektu Rozvoj kvality vzdělávání, hodnocení
a strategického řízení na Univerzitě Pardubice, reg. č.
CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002320*

MATEMATICKÝ SEMINÁŘ I

Sbírka úloh řešených v rámci matematického semináře I

Další podobné úlohy naleznete na:

<https://www.priklady.eu/cs/matematika.alej>

<https://www.e-matematika.cz/stredni-skoly/>

<https://matematika.cz/matematika-pro-stredni-skoly>

https://www.priklady.com/cs_new/index.php/22-slideshow/286-priklady-z-matematiky-pro-stredni-skoly

<http://www.gvp.cz/~horyna/matematika/Matematika%20v%20kostce.pdf>

<https://mathonline.fme.vutbr.cz/Opakovani-ze-stredni-skoly/sc-71-sr-l-a-40/default.aspx>

I ZÁKLADNÍ ARITMETIKA

1. Mocniny celých čísel: $(-1)^2 - (-2)^3 - (-3)^4$
2. Mocniny výrazů: $(-a)^3 - (1-a)^3 - (-a)^2 - (a-1)^2$
3. Mocniny výrazů: $(2a-5b)^3 - a(3a-2b)^2$
4. Násobení mnohočlenu mnohočlenem: $(b^4 - b^3 + b^2 - b) \cdot (2b^2 - 1)$
5. Násobení mnohočlenu mnohočlenem:
 $(2,1x^3 - 1,8x^2 + 0,9x + 3,2) \cdot (0,2x^2 - 1,7x + 0,8)$
6. Dělení mnohočlenu mnohočlenem:
 $(x^7 - 2x^6 + 5x^5 - 4x^3 + 2x^2 - 5x) : (x^2 + 2x - 1)$
7. Rozklad na součiny: a) $8a^3 + 4a^2$ b) $(3x + 4y) \cdot (c - d) + (2x + y) \cdot (d - c)$
c) $4ax - 8ay - 15bx + 30by$ d) $16a^2 - 1$ e) $16x^2 \pm 40xy + 25y^2$
f) $8ax + 12bx - 10ay - 15by$
g) $2a_1x_1 + 3a_2x_1 - 2a_1x_2 - 3a_2x_2 + 4a_1x_3 + 6a_2x_3$
h) $0,15x^2 - 0,21yz - 0,35xy + 0,09xz$ i) $18a^2 - 45ab^2 + 14ab - 35b^3$
j) $9a^2 - 24ab + 16b^2 - 36c^2$ k) $36x^2 + 60x + 25 - 49y^2$ l) $x^2 - 7x + 12$
m) $a^2 + 10a + 21$ n) $x^2 - 10x + 16$ o) $x^2 - 10x - 200$ p) $k^2 + 7k - 30$
q) $x^2 - x - 20$ r) $y^2 - 3y - 4$ s) $6x^2 + 13x - 8$ t) $4x^2 - 20x + 25$
8. Doplnění na úplný čtverec: a) $-3x^2 + 8x - 27$ b) $1 - x^2 - 4x$

Výsledky úloh

1. -72 2. $-5a^2 + 5a - 2$ 3. $-a^3 - 48a^2b + 146ab^2 - 125b^3$
4. $2b^6 - 2b^5 + b^4 - b^3 - b^2 + b$ 5. $0,42x^5 - 3,93x^4 + 4,92x^3 - 2,33x^2 - 4,72x + 2,56$
6. $x^5 - 4x^4 + 14x^3 - 32x^2 + 74x - 178 + \frac{425x-178}{x^2+2x-1}$ 7. a) $4a^2 \cdot (2a + 1)$
b) $(c - d) \cdot (x + 3y)$ c) $(x - 2y) \cdot (4a - 15b)$ d) $(4a + 1) \cdot (4a - 1)$ e) $(4x \pm 5y)^2$
f) $(2a + 3b) \cdot (4x - 5y)$ g) $(x_1 - x_2 + 2x_3) \cdot (2a_1 + 3a_2)$ h) $(0,3x - 0,7y) \cdot (0,5x + 0,3z)$
i) $(2a - 5b^2) \cdot (9a + 7b)$ j) $(3a - 4b + 6c) \cdot (3a - 4b - 6c)$
k) $(6x + 5 + 7y) \cdot (6x + 5 - 7y)$ l) $(x - 3) \cdot (x - 4)$ m) $(a + 3) \cdot (a + 7)$
n) $(x - 8) \cdot (x - 2)$ o) $(x - 20) \cdot (x + 10)$ p) $(k + 10) \cdot (k - 3)$ q) $(x - 5) \cdot (x + 4)$
r) $(y - 4) \cdot (y + 1)$ s) $6 \left(x + \frac{8}{3}\right) \left(x - \frac{1}{2}\right) = (3x + 8)(2x - 1)$ t) $4 \left(x - \frac{5}{2}\right)^2 = (2x - 5)^2$
8. a) $-3 \left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{65}{3}$ b) $-(x + 2)^2 + 5$

1.1.1 Množina racionálních a reálných čísel

9. Krácení lomených výrazů: a) $\frac{x^2-y^2}{x^2-2xy+y^2}$ b) $\frac{6ax+3x-2a-1}{4a^2+4a+1}$ c) $\frac{x^2-9}{x^2+10x+21}$
10. Sčítání lomených výrazů: $\frac{1}{x-1} + \frac{2}{x^2-2x+1} + \frac{3}{x^3-3x^2+3x-1}$
11. Násobení lomených výrazů: a) $\frac{x^2+3x+2}{x^2+5x+6} \cdot \frac{x^2+7x+12}{x^2+5x+4}$ b) $\frac{3x^2+x-10}{4x^2+x-14}$
12. Dělení lomených výrazů: a) $\frac{x-y}{x^2+y^2} : \frac{x^2-y^2}{x^3+xy^2}$ b) $\frac{\frac{a+b}{a-b}-1}{\frac{a+b}{a-b}+1}$ c) $\frac{a-\frac{9b^2}{a}}{1+\frac{3b}{a}}$
13. Porovnejte výsledky: $25x^2 + 5x^2$; $25x^2 - 5x^2$; $25x^2 \cdot 5x^2$; $25x^2 : 5x^2$; $(25x^2)^2$
14. Procenta: Hřídel o poloměru d je provrtán otvorem polovičního průměru. O kolik procent se tím sníží váha hřídele?
15. Mocniny s celým exponentem:

$$\left(-\frac{1}{3}\right)^{-3} + \left(-\frac{1}{2}\right)^{-2} + (-1)^{-1} + (-2)^0 + (-3)^2 + (-4)^3$$
16. Mocniny s celým exponentem: Dané zlomky napište ve tvaru celého čísla bez zlomkové čáry a ve tvaru zlomku s čitatelem 1. a) $\frac{4a^3b^2}{3c}$ b) $\frac{3rs^{-1}}{2t^{-2}u^3}$
17. Mocniny s celým exponentem: Střední rozhlasové vlny mají délku asi 500 m, viditelné světlo asi 0,5 μ ($\mu = 10^{-3}$ mm). Kolikrát je vlnová délka rozhlasových vln větší než u viditelného světla?
18. Druhé odmocniny, částečné odmocňování: a) $\sqrt{12} \cdot \sqrt{3}$ b) $\sqrt{50}$ c) $3\sqrt{2}$ d) $\sqrt{28 \cdot 40 \cdot 70}$
19. Druhé odmocniny, částečné odmocňování:
a) $\sqrt{18a^3 \cdot 8b^5 \cdot c^4}$ b) $2\sqrt{8} + 3\sqrt{128} - 2\sqrt{18} + 5\sqrt{72}$ c) $(4\sqrt{7} - 7\sqrt{3})^2$
20. Usměrnění zlomků: a) $\frac{2+\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$ b) $\frac{2\sqrt{5}-\sqrt{30}}{\sqrt{12}-5\sqrt{2}}$ c) $\frac{1}{\sqrt[3]{2}}$
21. Částečné odmocňování:
a) $2\sqrt[3]{24} - 3\sqrt[3]{54} + 5\sqrt[3]{128} + 4\sqrt[3]{192} - 3\sqrt[3]{375}$ b) $\sqrt[3]{a^2} \sqrt{a^2 b^3} \sqrt[4]{b^9}$
22. Mocniny s racionálním exponentem:
a) $\left(\frac{8}{27}\right)^{-\frac{2}{3}}$ b) $(36)^{-\frac{3}{4}} \cdot (8)^{\frac{1}{2}} \cdot (81)^{\frac{5}{8}}$ c) $\left(x^{-\frac{1}{3}} \cdot y^{\frac{1}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}$
23. Odmocniny: a) $\sqrt{x^3 \sqrt{x}} \cdot \sqrt[3]{x \sqrt{x}}$ b) $\sqrt[3]{\sqrt{\frac{1}{2}} \sqrt[3]{\frac{1}{16}}}$

Výsledky úloh

9. a) $\frac{x+y}{x-y}$ b) $\frac{3x-1}{2a+1}$ c) $\frac{x-3}{x+7}$ 10. $\frac{x^2+2}{(x-1)^3}$ 11. a) 1 b) $\frac{3x-5}{4x-7}$ 12. a) $\frac{x}{x+y}$ b) $\frac{b}{a}$ c) $a-3b$
13. $30x^2$; $20x^2$; $125x^4$; 5; $625x^4$ 14. o 25% 15. -78
16. a) $4 \cdot 3^{-1} \cdot a^3 \cdot b^2 \cdot c^{-1}$; $\frac{1}{3 \cdot 4^{-1} \cdot a^{-3} \cdot b^{-2} \cdot c}$ b) $3 \cdot 2^{-1} \cdot r \cdot s^{-1} \cdot t^2 \cdot u^{-3}$; $\frac{1}{2 \cdot 3^{-1} \cdot r^{-1} \cdot s \cdot t^{-2} u^3}$
17. 10^9 krát 18. a) 6 b) $5\sqrt{2}$ c) $3\sqrt{2}$ d) 280
19. a) $12ab^2c^2\sqrt{ab}$ b) $52\sqrt{2}$ c) $259 - 56\sqrt{21}$ 20. a) $\frac{2\sqrt{2}+\sqrt{10}}{2}$ b) $\frac{\sqrt{5}(3\sqrt{3}-2\sqrt{2})}{19}$ c) $\frac{\sqrt[3]{4}}{2}$
21. a) $11\sqrt[3]{2} + 5\sqrt[3]{3}$ b) $ab^3\sqrt[12]{a^8b^9}$ 22. a) $\frac{9}{4}$ b) 3 c) $\sqrt[6]{\frac{y}{x}}$ 23. a) $x\sqrt[6]{x}$ b) $\frac{1}{\sqrt[18]{2^{11}}}$

I.1.2 Lineární rovnice a nerovnosti

24. Řešte rovnice: a) $\frac{2x-3}{x-1} = \frac{4x-1}{x-1}$ b) $\frac{3x+7}{6x^2-6} - \frac{9}{x^2-1} = \frac{2}{1-x}$ c) $\frac{t}{2t-4} - \frac{10t-8}{6-3t} - \frac{2t+1}{t-2} = 1$
25. Řešte rovnice: a) $\frac{7}{8x} - \frac{x-1}{2x(x-2)} = \frac{1}{8x-16} + \frac{5-x}{8x-4x^2}$ b) $x - \frac{1-\frac{3x}{2}}{4} - \frac{2-\frac{x}{4}}{3} = 2$
26. Rovnice s neznámou t a parametry m, n :
 $(mt + n)(nt + m) - (mt - n)(nt - m) = (m + n)[m(t + 1) + n(t - 1)]$
27. Poměr: Částku 1260 Kč rozdělte v poměru 2:7.
28. Teplota směsi: Kolik litrů vody 48 stupňů teplé je nutno přidat do 1,2 hl vody 8 stupňů teplé, aby výsledná směs měla teplotu 24 stupňů?
29. Koncentrace roztoku: Kolik dcl čisté vody musíme dolít do 1,5 dcl 8 % solného roztoku, aby se zředil na 5 % roztok?
30. Koncentrace roztoku: V nádrži se nachází 200 l vody s obsahem 0,06 % jedovaté látky. Z jiného zdroje je možné přivést vodu s obsahem 0,02 % této jedovaté látky. Kolik litru této vody je nutno dočerpat do nádrže, aby koncentrace jedovaté látky klesla pod 0,03%?
31. Rovnice s absolutní hodnotou: a) $|x - 4| = 2x - 3$ b) $|x + 1| + |4 - 2x| + x = 5$
32. Lineární nerovnice: a) $\frac{x}{2} - \frac{x-5}{3} < \frac{x-3}{2} - \frac{x-2}{3}$ b) $\frac{x+1}{2x-4} < 0$ c) $(2x - 1)(x + 2) \leq 0$
33. Lineární nerovnice: a) $\frac{2x-1}{x-3} < 2$ b) $|x - 2| < 5$ c) $|x| - |x - 5| \geq 4(x - 3)$
34. Slovní úlohy: Kolik kilogramů mědi a zinku je ve 124 kilogramech mosazi? Hustoty prvků slitiny jsou: $(\rho_{Cu} = 8900 \frac{kg}{m^3}; \rho_{Zn} = 7100 \frac{kg}{m^3}; \rho_{Mosaz} = 8300 \frac{kg}{m^3};)$
35. Slovní úlohy: Dva dělníci dokončí danou práci za 18 dní. Po patnácti dnech však jeden z nich onemocněl a druhý dokončil práci za sedm a půl dne. Za kolik dní by práci vykonal každý z dělníků sám?
36. Slovní úlohy: Osobní auto ujede 1 kilometr o 50 sekund dříve než nákladní auto a za dvě hodiny ujede cestu o 100 kilometrů delší. Jaké jsou rychlosti obou vozidel?

Výsledky úloh

24. a) -1 b) $\frac{7}{3}$ c) $\emptyset$ 25. a) $R - \{0; 2\}$ b) 2 26. $t = \frac{m+n}{m-n}$ pro $m \neq n$; R pro $m = n$
27. 280 Kč a 980 Kč 28. 80 l 29. 0,9 dcl 30. nejméně 600 l 31. a) $\frac{7}{3}$ b) $\{-1; 2\}$
32. a) $\emptyset$ b) $\{-1; 2\}$ c) $\{-2; \frac{1}{2}\}$ 33. a) $(-\infty; 3)$ b) $(-3; 7)$ c) $(-\infty; \frac{7}{2})$
34. 88,34 kg; 35,36 kg 35. 30 dní; 45 dní 36. 90 km/h; 40 km/h

I.1.3 Kvadratické rovnice

37. Řešte rovnice: a) $3x^2 - 7x = 0$ b) $\frac{2x+2}{3x-7} = \frac{3x-2}{2x+7}$ c) $\frac{x-\sqrt{2}}{2} + \frac{x\sqrt{2}}{x+\sqrt{2}} = \sqrt{2}$
38. Řešte rovnice: a) $2x^2 + \frac{x}{2} - \frac{3}{25} = 0$ b) $\frac{x}{x+1} + \frac{3x}{x-1} = \frac{5x^2-8}{x^2-1}$
39. Sestavení rovnice: Sestavte kvadratickou rovnici, jejímiž kořeny jsou čísla a) $5; \frac{1}{3}$ b) $0; \frac{2}{3}$
40. Kvadratická rovnice s parametrem: Určete v rovnici $5x^2 + 6x + k = 0$ číslo k tak, by daná rovnice měla jen jeden reálný kořen.
41. Kvadratická rovnice s parametrem: U dané kvadratické rovnice určete kořen x_2 a parametr m , znáte-li kořen x_1 :
- $$a) x^2 + mx + 24 = 0, x_1 = 8 \quad b) 3x^2 + mx + 2 = 0, x_1 = \frac{1}{3}$$
42. Kvadratická rovnice s absolutní hodnotou:
- $$a) x|x-5| = 6 \quad b) x^2 + 2|x-1| - 6 = 0$$
43. Kvadratická nerovnice: a) $x^2 - 8x + 12 \geq 0$ b) $\frac{x^2}{2} + \frac{x}{6} + \frac{7}{3} < \frac{(x-3)^2}{6} + 3x$ c) $\frac{x^2-7x+10}{x^2-10x+21} < 0$
44. Vztahy mezi kořeny a koeficienty kvadratické rovnice: Zapište všechny kvadratické rovnice, které mají kořeny a) čtyřikrát větší resp. a) o čtyři větší, než jsou kořeny rovnice $x^2 - 9x + 15 = 0$ aniž tuto rovnici řešíte.
45. Slovní úloha: Na dráze dlouhé 420 metrů závodí dva běžci. První uběhne za 1 sekundu o 1 metr více než druhý a potřebuje na jedno kolo o 10 sekund méně než druhý. Jaká je vteřinová rychlost každého z nich?
46. Soustava lineární a kvadratické rovnice: $x - y = 0,7 \wedge x^2 + y^2 = 1,69$

Výsledky úloh

37. a) $0; \frac{7}{3}$ b) $0; 9$ c) $\pm \sqrt{6}$ 38. a) $0,15; -0,4$ b) $4; -2$ 39. a) $3x^2 - 16x + 5 = 0$ b) $3x^2 - 2x = 0$ 40. $k = \frac{9}{5}$ 41. a) $x_2 = 3; m = -11$ b) $x_2 = 2; m = -7$
42. a) $2; 3; 6$ b) $1 - \sqrt{5}; 2$ 43. a) $(-\infty; 2) \cup (6; \infty)$ b) $(\frac{1}{2}; 5)$ c) $(2; 3) \cup (5; 7)$
44. a) $a(x^2 - 36x + 240) = 0; a \in \mathbb{R} - \{0\}$ b) $a(x^2 - 17x + 67) = 0; a \in \mathbb{R} - \{0\}$
45. rychlost prvního je 7 m/s 46. $[1,2; 0,5], [-0,5; -1,2]$

I.1.4 Iracionální rovnice a nerovnice

47. Řešte rovnici: $3 + \sqrt{2x + 2} = x$
48. Řešte rovnici: $\sqrt{x + 5} + \sqrt{x - 2} = 7$
49. Řešte rovnici: $\frac{2\sqrt{x}-9}{3} + \frac{4\sqrt{x}+3}{5} = 2$
50. Řešte rovnici: $\sqrt{x + 3} + \sqrt{x + 4} = \sqrt{5}$
51. Řešte rovnici: $\sqrt{7 - 2\sqrt{x}} = \sqrt{18 - 13\sqrt{x}}$
52. Řešte rovnici: $\frac{x-\sqrt{x+1}}{x+\sqrt{x+1}} = \frac{5}{11}$
53. Řešte rovnici: $1 + \sqrt{1 + x\sqrt{x^2 - 24}} = x$
54. Řešte nerovnici: $\sqrt{x + 3} < 19$
55. Řešte nerovnici: $\sqrt{x^2 - 6} \geq 5\sqrt{10}$
56. Řešte nerovnici: $\sqrt{x^2 + 4} \leq x + 2$

Výsledky úloh

47. 7 48. 11 49. 9 50. $-\frac{11}{5}$ 51. 1 52. 8 53. 7 54. $\langle -3; 358 \rangle$
55. $(-\infty; -16) \cup \langle 16; \infty)$ 56. $\langle 0; \infty)$

I.1.5 Logaritmy, logaritmické a exponenciální rovnice

57. Vypočtěte logaritmy: a) $\log_4 16$ b) $\log_4 1$ c) $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{27}$ d) $\log_{0,1} 10$

58. Vypočtěte základ logaritmů z:

$$a) \log_z 100 = 2 \quad b) \log_z 25 = -2 \quad c) \log_z \frac{1}{8} = -3 \quad d) \log_z 64 = 3$$

59. Vypočtěte číslo a:

$$a) \log_2 a = 5 \quad b) \log_5 a = 0 \quad c) \log_{0,1} a = -6 \quad d) \log_6 a = -3$$

60. Vypočtěte: $A = (\sqrt{2})^{\log_2 \frac{1}{4} + 2 \log 100} + \frac{1}{3} \log_3 27 - \log_3 1$

61. Logaritmujte přirozeným logaritmem výraz: Pro $a, b, c > 0$ a) $\frac{a\sqrt{b}}{4c^3}$ b) $\sqrt[3]{a^2(b-c)}$

62. Určete výraz, jehož logaritmováním vzniklo: Pro $a, b, c > 0$

$$a) \ln 3 + 5 \ln a - \ln c \quad b) 3 \ln a - \frac{1}{2}(\ln b + \ln 7)$$

63. Řešte rovnice: a) $\log x^2 - \log x^3 + \log x^4 = 3$ b) $\log\left(x + \frac{1}{2}\right) = \log \frac{1}{2} + \log x$

64. Řešte rovnice:

$$a) \frac{5 \log x + 3}{3 \log x - 4} = \frac{\log x + 5}{3 \log x - 4} - 2 \quad b) \log_4 \log_3 \log_2 x = \frac{1}{2} \quad c) \log x + \frac{3}{\log x} = 4$$

65. Řešte rovnice:

$$a) \log \sqrt{x+1} + \log \sqrt{x-1} = 2 - \log 2 \quad b) x^{\log x} + 10x^{-\log x} = 11 \quad c) x^{\log x} = 10^{\frac{1}{4}}$$

66. Řešte rovnice: a) $2^x = 4,7$ b) $5^x = \frac{1}{125}$ c) $7^{2x-1} = 1$ d) $2^x \cdot 4 = 6,25$ e) $\sqrt[3]{10} = 5$

67. Řešte rovnice: a) $\frac{1}{2} = \sqrt[3]{2}$ b) $\left(\frac{2}{3}\right)^x = \frac{81}{16}$ c) $\left(\frac{4}{25}\right)^{x+3} \cdot \left(\frac{125}{8}\right)^{4x-1} = \frac{5}{2}$

68. Řešte rovnice:

$$a) 4^x + 3^{x+3} = 4^{x+3} - 3^{x+2} \quad b) 9^x + 2 \cdot 3^x - 3 = 0 \quad c) \frac{3^{x-6}}{3^{5-2x}} = \frac{\log 27}{\log 3}$$

69. Monotonnost funkce: Určete, pro které hodnoty parametru a jsou funkce

$$f: y = \left(\frac{a-3}{a+5}\right)^x, \quad g: y = \log_{\frac{a+1}{a}} x \quad a) \text{ klesající, } b) \text{ rostoucí.}$$

70. Definiční obory funkcí: Určete definiční obory daných funkcí.

$$a) y = \log(2x^2 + 4x - 6) \quad b) y = \log \sqrt{\frac{3-x}{x^3+2x}} \quad c) y = \frac{1}{\ln 1-x} + \sqrt{x+2}$$

Výsledky úloh

57. a) 2 b) 0 c) 3 d) -1 58. a) 10 b) $\frac{1}{5}$ c) 2 d) 4 59. a) 32 b) 1 c) 10^6 d) $\frac{1}{216}$ 60. 3

61. a) $\ln a + \frac{1}{2} \ln b - \ln 4 - 3 \ln c$ b) $\frac{1}{3}[2 \ln a + \ln(b-c)]$ 62. a) $\frac{3a^5}{c}$ b) $\frac{a^3}{\sqrt{7b}}$

63. a) 10 b) $\emptyset$ 64. a) 10 b) 2^9 c) 10; 1000 65. a) $\sqrt{2501}$ b) 0,1; 1; 10 c) $\frac{\sqrt{10}}{10}$; $\sqrt{10}$

66. a) 2,23 b) -3 c) 0,5 d) 0,64 e) 1,43 67. a) -1 b) -4 c) 1 68. a) $\log_3 \frac{7}{4}$ b) 0 c) 4

69. a) $f: (3; \infty)$; $g: (-\infty; -1)$ b) $f: (-\infty; -5)$; $g: (0; \infty)$

70. a) $R - \{-3; 1\}$ b) $(0; 3)$ c) $\{-2; 0\} \cup (0; 1)$

2 ZÁKLADNÍ GEOMETRIE

2.1 SHODNOST A PODOBNOST V ROVINĚ

71. *Podobnost trojúhelníků:* Určete výšku stromu, je-li jeho stín 14,3 metrů dlouhý a stín svislé tyče 2 metry vysoké ve stejný okamžik měří 175 centimetrů.
72. *Podobnost trojúhelníků:* Sestrojte trojúhelník ABC , jsou-li dány úhly α, β a těžnice na stranu a .
73. *Stejnolehlost:* Sestrojte kružnici, která prochází daným bodem a dotýká se dvou daných přímek.
74. *Stejnolehlost:* Sestrojte společné tečny dvou kružnic o různých poloměrech.
75. *Podobnost:* Na mapě s měřítkem 1:75000 měří obvod přehrady 27 centimetrů, její plošný obsah je 480 milimetrů čtverečných. Kolik kilometrů měří skutečný obvod přehrady a kolik hektarů má její rozloha?
76. *Stejnolehlost:* Sestrojte spojnici daného bodu s nepřístupným průsečíkem dvou přímek.

Výsledky úloh, návody k řešení

71. 16,34 m **72.** Sestrojíme libovolný trojúhelník s danými úhly a k němu stejnohlý podle středu A. **73.** Sestrojíme libovolnou kružnici dotýkající se daných přímek a k ní kružnici stejnohlou, která prochází daným bodem. **74.** Z vnitřního a vnějšího středu stejnohllosti vedeme tečny k daným kružnicím. **75.** 20,25 km; 270 ha **76.** Sestrojíme dva stejnohlé trojúhelníky, nichž jeden má dva své vrcholy na daných přímkách a třetí vrchol v daném bodě. Spojnice daného bodu se stejnohlým vrcholem druhého trojúhelníku je hledaná přímka.

2.2 VĚTY EUKLIDOVY, PYTHAGOROVA VĚTA

77. *Euklidovy věty:* Vypočtete výšku kruhové úseče, je-li dána tětiva $t = 7,4$ cm a poloměr kružnice $r = 6,3$ cm.
78. *Euklidovy věty:* Vypočtete délku tětivy v kružnici o poloměru $r = 8,3$ cm, je-li vzdálenost tětivy od středu kružnice $x = 3,5$ cm.
79. *Euklidovy věty:* Vypočtete poloměr kružnice, je-li dána hraniční tětiva $t = 16$ cm a výška kruhové úseče $v = 5$ cm.
80. *Euklidovy věty:* Vypočtete obsah pravoúhlého trojúhelníku, jsou-li dány výškou vyřtuté úseky na přeponě $c_1 = 8,5$ cm, $c_2 = 12,3$ cm.
81. *Euklidovy věty:* Vypočtete délky odvěsen pravoúhlého trojúhelníka, je-li dána přepona $c = 16$ cm a výška na přeponu $v = 6$ cm.
82. *Aplikace:* Předpokládejme, že Země má tvar koule o poloměru r kilometrů. Ve výšce h kilometrů nad povrchem Země je stacionární družice. Určete vzdálenost stacionární družice od místa na povrchu Země, ze kterého by bylo možné pozorovat družici právě na horizontu. Vyjádřete povrch části Země, který lze z této družice spatřit.
83. *Aplikace:* Předpokládejme, že Země má tvar koule o poloměru $r = 6370$ kilometrů. Určete jak daleko je od pozorovatele bod na obzoru viditelné části povrchu Země, je-li pozorovatel v letadle letícím ve výšce 4 kilometry nad Zemí. Z jaké výšky nad Zemí by viděl kosmonaut 0,1 zemského povrchu?
84. *Pythagorova věta:* Určete velikost úhlopříčky čtverce o straně a .
85. *Pythagorova věta:* Určete velikost výšky a obsah rovnostranného trojúhelníka o straně a .
86. *Pythagorova věta:* Určete velikost výšky rovnoramenného trojúhelníka o základně a a rameně b .
87. *Heronův vzorec:* Určete obsah trojúhelníka o stranách délky 13, 14, 15 cm.
88. *Obsah šestiúhelníku:* Vypočtete obsah pravidelného šestiúhelníku o straně $a = 6,4$ cm.
89. *Obsah šestiúhelníku:* Vypočtete obsah pravidelného šestiúhelníku vepsaného do kružnice o poloměru $r = 8,4$ cm.
90. *Obsah trojúhelníku:* Stanovte obsah rovnoramenného pravoúhlého trojúhelníku, je-li dán jeho obvod $o = 20$ cm.
91. *Pravoúhlý trojúhelník:* V pravoúhlém trojúhelníku určete odvěsny a , b a úhel α , je-li dáno: $c = 39$ cm, $v_c = 18$ cm.

Výsledky úloh (jednotky viz zadání úloh)

77. 11,4; 1,2 78. 15,05 79. 8,9 80. 106,3

81. 14,58; 6,58 82. $\sqrt{2hr + h^2}$; $\frac{2\pi r^2 h}{r+h}$ 83. 226; 1592 84. $u = a\sqrt{2}$ 85. $v = \frac{a}{2}\sqrt{3}$;

$S = \frac{a^2}{4}\sqrt{3}$ 86. $v = \sqrt{b^2 - \frac{a^2}{4}}$ 87. 84 88. 106,42 89. 183,3 90. 17,16 91. $9\sqrt{13}$; $6\sqrt{13}$;

$\alpha = 56^\circ 18'$

2.3 OBLOUKOVÁ MÍRA ÚHLU A TRIGONOMETRIE PRAVOÚHLÉHO TROJÚHELNÍKU

92. *Převod míry úhlu:* Převeďte z míry obloukové do stupňové a naopak
a) $30^\circ; 45^\circ; 90^\circ; 120^\circ; 225^\circ; 310^\circ; 360^\circ; 945^\circ; -1320^\circ; 38^\circ 12'; 316^\circ 10'$
b) $\frac{\pi}{3}; \frac{3\pi}{4}; \frac{7\pi}{6}; \pi; \frac{3\pi}{2}; \frac{8\pi}{5}; \frac{\pi}{12}; -\frac{9\pi}{2}; 0,8\pi; 4,5$
93. *Konstrukce trojúhelníka:* Sestrojte trojúhelník ABC , je-li dáno:
a) c, v_c, γ b) a, t_a, α
94. *Kružnice trojúhelníku opsaná a vepsaná:* Vypočtěte poloměry kružnice trojúhelníku vepsané a opsané, jsou-li dány délky jeho stran 13 cm, 20 cm a 21 cm.
95. *Pravoúhlý trojúhelník:* Řešte rovnoramenný trojúhelník, je-li dána základna $a = 24$ cm a úhel při vrcholu $\alpha = 48^\circ 12'$.
96. *Pravoúhlý trojúhelník:* Vypočtěte délku kruhového oblouku, příslušného k tětivě $t = 13,2$ cm, na kružnici o poloměru $r = 10,8$ cm.
97. *Pravoúhlý trojúhelník:* Vypočtěte poloměr kružnice opsané pravidelnému pětiúhelníku, je-li dána jeho strana $a = 8$ cm.
98. *Pravoúhlý trojúhelník:* Určete výslednici dvou stejně velkých sil $F = 250$ N, které svírají úhel $\alpha = 50^\circ$.
99. *Pravoúhlý trojúhelník:* Řešte pravoúhlý trojúhelník, je-li dána velikost jeho přepony $c = 50$ cm a součet délek jeho odvěsen $a + b = 70$ cm.
100. *Pravoúhlý trojúhelník:* Řešte pravoúhlý trojúhelník, je-li dána velikost jeho přepony $c = 39$ cm a výšky $v_c = 18$ cm.

Výsledky úloh

92. a) $\frac{\pi}{6}; \frac{\pi}{4}; \frac{\pi}{2}; \frac{2\pi}{3}; \frac{5\pi}{4}; \frac{31\pi}{18}; 2\pi; \frac{21\pi}{4}; -\frac{22\pi}{3}; 0,66672; 5,518$ b) $60^\circ; 135^\circ; 210^\circ; 180^\circ; 270^\circ; 228^\circ; 15^\circ; -810^\circ; 144^\circ; 257^\circ 50'$ 93. a) Sestrojíme množinu vrcholů obvodových úhlů γ nad tětivou c a pak rovnoběžku se základnou ve vzdálenosti v_c b) Množinu vrcholů obvodových úhlů nad úsečkou BC protne ze středu strany a kružnicí o poloměru t_a
94. 4,67; 10,83 95. $\beta = 65^\circ 54'; b = 29,39$ cm 96. Kratší oblouk 14,2 cm 97. 6,805 cm 98. 453,2 N 99. $40; 30; 53^\circ 08'$ 100. $a = 9\sqrt{3}$ cm; $b = 6\sqrt{13}$ cm; $\alpha = 56^\circ 18'$

2.4 OBSAHY ROVINNÝCH OBRAZCŮ, POVRCH A OBJEM HRANOLU, VÁLCE, JEHLANU, KUŽELE A KOULE

101. *Obsahy rovinných obrazců:* Vypočtete obsah pravidelného desetiúhelníku, je-li dána strana $a = 6 \text{ cm}$.
102. *Obsahy rovinných obrazců:* Vypočtete poloměr kružnice opsané pravidelnému osmiúhelníku, je-li dán jeho obsah $S = 240 \text{ cm}^2$.
103. *Obsahy rovinných obrazců:* Vypočtete obsah kruhové úseče, je-li dán poloměr $r = 15 \text{ cm}$ a velikost příslušného středového úhlu $\alpha = 64^\circ$.
104. *Povrch a objem hranolu:* Určete povrch a objem šestibokého pravidelného hranolu, je-li $a = 6 \text{ cm}$, $v = 15 \text{ cm}$.
105. *Povrch a objem válce:* Určete hmotnost železné roury dlouhé 4 metry, jejíž vnější průměr je $d = 30 \text{ cm}$ a tloušťka stěn $t = 2 \text{ cm}$, je-li hustota železa $\rho = 7,8 \text{ g/cm}^3$?
106. *Povrch a objem jehlanu:* Určete povrch a objem pravidelného osmistěnu o hraně a .
107. *Povrch a objem jehlanu:* Určete povrch a objem pravidelného šestibokého jehlanu, jehož podstavná hrana je $a = 3 \text{ cm}$ a pobočná hrana $b = 8 \text{ cm}$.
108. *Povrch a objem jehlanu:* Určete povrch a objem pravidelného osmibokého komolého jehlanu, je-li dáno $a_1 = 8 \text{ cm}$, $a_2 = 5 \text{ cm}$, $v = 20 \text{ cm}$.
109. *Povrch a objem kuželu:* Určete povrch a objem rotačního kuželu, je-li dáno $s = 15 \text{ cm}$ a úhel při vrcholu $\alpha = 45^\circ$.
110. *Povrch a objem kuželu:* Určete povrch a objem komolého rotačního kuželu, je-li dáno $r_1 = 10 \text{ cm}$, $r_2 = 6 \text{ cm}$ a úhel strany s podstavou $\alpha = 60^\circ$.
111. *Povrch koule a jejích částí:* Určete poloměr koule, jejíž povrch je $S = 500 \text{ cm}^2$.
112. *Povrch koule a jejích částí:* Vypočtete povrch kulového vrchlíku, je-li dán poloměr základní kružnice $\rho = 8,3 \text{ cm}$ a výška $v = 4,7 \text{ cm}$.
113. *Objem koule a jejích částí:* Vypočtete poloměr koule, je-li dán její objem $V = 200 \text{ cm}^3$.
114. *Objem koule a jejích částí:* Určete hustotu dřevěné koule, která plave po vodě a je ponořena do tří pětín svého svislého průměru.
115. *Objem koule a jejích částí:* Určete množství vody, kterou pojme kotel ukončený na obou stranách stejnými kulovými úsečemi, je-li délka válce 5 m a vnitřní průměr $1,6 \text{ m}$.

Výsledky úloh

101. 277 cm^2 102. $9,21 \text{ cm}$ 103. $24,55 \text{ cm}^2$ 104. $727,06 \text{ cm}^2$, 1403 cm^3 105. $548,9 \text{ kg}$ 106. $2\sqrt{3}a^2$; $\frac{2}{3}\sqrt{3}a^3$ 107. $94,1 \text{ cm}^2$; $57,8 \text{ cm}^3$ 108. 1470 cm^2 , $4152,5 \text{ cm}^3$ 109. $374,02 \text{ cm}^2$, $478,2 \text{ cm}^3$ 110. $829,38 \text{ cm}^2$, 1422 cm^3 111. $6,308 \text{ cm}$ 112. $285,8 \text{ cm}^2$ 113. $3,63 \text{ cm}^2$ 114. $0,648 \text{ g/cm}^3$ 115. $10,57 \text{ m}^3$