Komplexní čísla (KČ), základní pojmy

- KČ nikdo nevynalezl, první diskuse a použití v 16. století
- Koncept KČ se vyvíjel v průběhu více staletí $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$
- 18. století – velký skok ve výzkumu a využití KČ – Carl Friedrich Gauss (zavedl název *imaginární*)

Imaginární jednotka (Gauss, Cauchy)

$$x^2 + 1 = 0 \rightarrow x^2 = -1 \rightarrow |x| = \sqrt{-1} = i \rightarrow i^2 = -1$$

Pozn.:

- Elektrikáři používají pro označení imaginární jednotky písmeno j, protože i používají pro označení okamžité hodnoty proudu
- My budeme používat obě značení
- Matlab také nerozlišuje i nebo j

Definice:

Každá uspořádaná dvojice $[a_1; a_2]$ reálných čísel a_1, a_2 se nazývá *komplexní číslo*

- Zapisujeme $a = [a_1; a_2]$
- a_1 je *reálná část* komplexního čísla a, zkrácený zápis $Re(a) = a_1$
- a_2 je *imaginární část* komplexního čísla a, zkrácený zápis $Im(a) = a_2$

Dále definujeme:

Jsou dána dvě KČ $a = [a_1; a_2]$ a $b = [b_1; b_2]$

- Rovnost dvou KČ a,b: $a = b \Leftrightarrow a_1 = b_1 \wedge a_2 = b_2$
- Součet a rozdíl dvou KČ a,b: $a \pm b = [a_1 \pm b_1; a_2 \pm b_2]$
- Součin dvou KČ a,b: $a \cdot b = [a_1 b_1 - a_2 b_2; a_1 b_2 + a_2 b_1]$
- Podíl dvou KČ a,b: $\frac{a}{b} = \left[\frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{b_1^2 + b_2^2}; \frac{a_2 b_1 - a_1 b_2}{b_1^2 + b_2^2}\right]$
- Komplexně sdružené číslo ke KČ a: $\bar{a} = [a_1; -a_2]$
- Opačné KČ ke KČ a: $-a = [-a_1; -a_2]$
- Reálné číslo je KČ $[a_1; 0]$
- Ryze imaginární je KČ $[0; a_2]$
- Imaginární jednotka je ryze imaginární číslo $i = j = [0; 1]$

Algebraický tvar KČ

$$a = [a_1; a_2] = [a_1; 0] + [0; a_2] = a_1 + a_2 i = a_1 + a_2 j$$

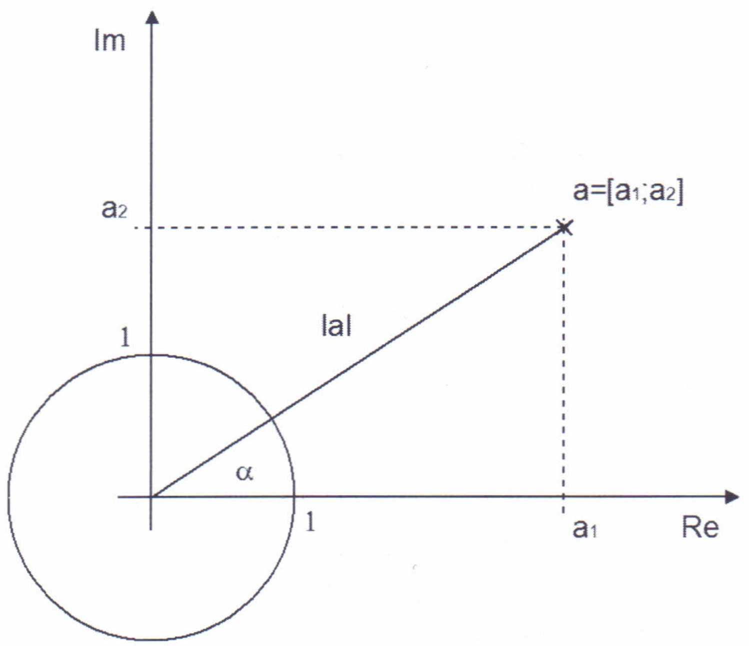
Gaussova rovina KČ

množinu všech KČ lze jednoznačně zobrazit na množinu bodů roviny

$$a = [a_1; a_2]$$

Absolutní hodnota KČ $a = [a_1; a_2]$ se nazývá reálné nezáporné číslo $|a| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$, které vyjadřuje vzdálenost obrazu KČ od počátku soustavy souřadné v Gaussově rovině

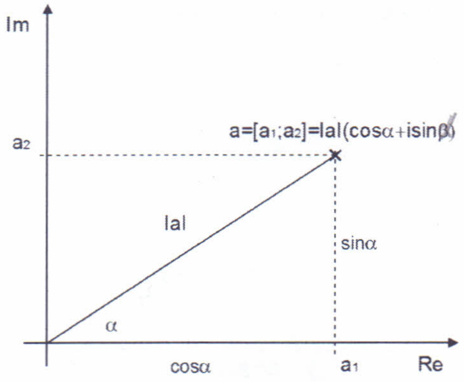
- Komplexní jednotka je každé KČ, jehož absolutní hodnota je rovna jedné
- Obrazy všech komplexních jednotek leží na jednotkové kružnici se středem v počátku soustavy souřadné v Gaussově rovině



Goniometrický tvar KČ

$a = [a_1; a_2] = a_1 + a_2 i = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$, kde α nazýváme argument KČ, pro nějž platí: $\cos\alpha = \frac{a_1}{|a|} \wedge \sin\alpha = \frac{a_2}{|a|}$

Základní argument $\alpha \in \langle 0; 2\pi)$



Umocňování a odmocňování KČ

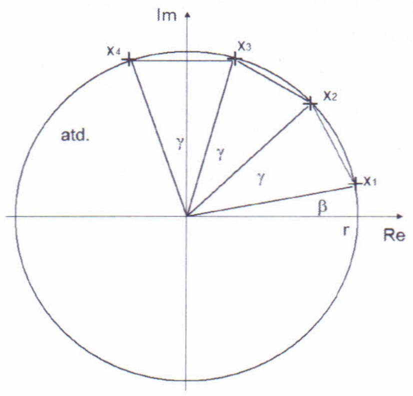
Pro libovolná dvě KČ

$$a = [a_1; a_2] = a_1 + a_2 i = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha)$$

$$b = [b_1; b_2] = b_1 + b_2 i = |b|(\cos\beta + i\sin\beta)$$

a pro každé $n \in N$ platí:

- $a^n = |a|^n(\cos n\alpha + i\sin n\alpha)$ (Moivreova věta)
- $a \cdot b = |a||b|[\cos(\alpha + \beta) + i\sin(\alpha + \beta)]$
- $\frac{a}{b} = \frac{|a|}{|b|}[\cos(\alpha - \beta) + i\sin(\alpha - \beta)]; b \neq 0$
- $\sqrt[n]{a}$ je každý z n kořenů binomické rovnice $x^n = a, a \in C, n \in N$, pro které platí:
$$x = \sqrt[n]{|a|}\left[\cos\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\alpha + 2k\pi}{n}\right)\right]$$
- V Gaussově rovině KČ jsou obrazy všech n kořenů binomické rovnice vrcholy pravidelného n-úhelníka, který je vepsán kružnici se středem $[0; 0]$ a poloměrem $\sqrt[n]{|a|}$
- Komplexní funkce $\sqrt[n]{a}$ patří do skupiny tzv. mnohoznačných komplexních funkcí
- $\beta = \frac{\alpha}{n}, \gamma = \frac{2\pi}{n}, r = \sqrt[n]{|a|}$



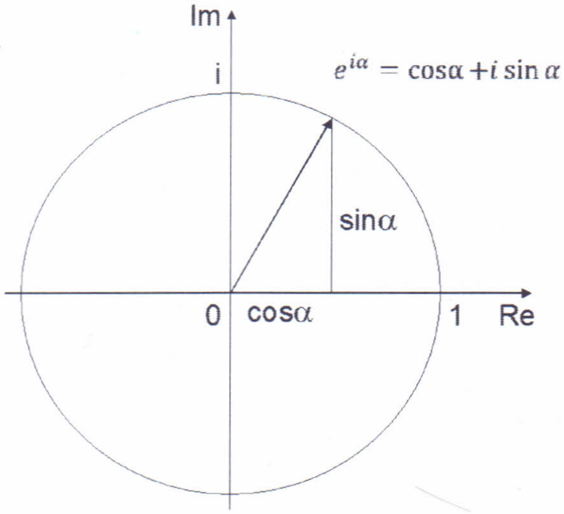
PR1 PR2 PR3 PR4 PR5

Exponenciální (Eulerův) tvar KČ

$$a = [a_1; a_2] = a_1 + a_2 i = |a|(\cos\alpha + i\sin\alpha) = |a|e^{i\alpha}$$

Kde $|a|$ je absolutní hodnota KČ a a α je jeho argument.

- Vztah $e^{i\alpha} = (\cos\alpha + i\sin\alpha)$ se nazývá Eulerův vzorec a určuje vztah mezi goniometrickými a exponenciálními funkcemi



PŘ 6 PŘ 7

Funkce komplexní proměnné

Funkce $w = f(z)$ definovaná na oblasti $\Omega \in C$ s funkčními hodnotami v oboru komplexních čísel se nazývá funkce komplexní proměnné.

- Jednoznačná komplexní funkce → je-li každému $z \in \Omega$ přiřazeno právě jedno komplexní číslo w (např.: $w = z + 1$)
- Mnohoznačná komplexní funkce → je-li každému $z \in \Omega$ přiřazeno více komplexních čísel (např.: $w = \sqrt{z+1}$)
- Algebraický tvar komplexní funkce: $w = f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$, kde $z = x + iy$, $u(x;y)$, $v(x;y)$ jsou reálné funkce dvou proměnných x a y
- $u(x;y)$ je reálná část $f(z)$, $Re(f) = u(x;y)$
- $v(x;y)$ je imaginární část $f(z)$, $Im(f) = v(x;y)$

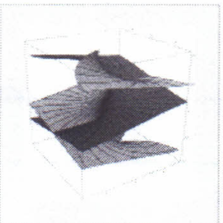
PŘ 8 PŘ 9 PŘ 10

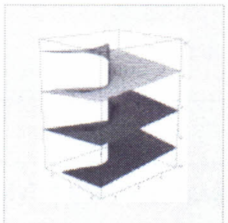
Přehled vybraných komplexních funkcí

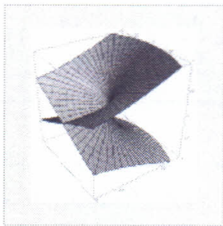
Název	Definiční vzorec	Podmínky platnosti
Exponenciální funkce	$e^z = e^x(\cos y + i\sin y)$	$z = x + iy; z \in C$
Kosinus	$\cos z = \dfrac{e^{iz} + e^{-iz}}{2}$	$z = x + iy; z \in C$
Sinus	$\sin z = \dfrac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i}$	$z = x + iy; z \in C$
Tangens	$\mathrm{tg}\, z = \dfrac{\sin z}{\cos z}$	$z \neq (2k+1)\dfrac{\pi}{2}; k \in Z$
Kotangens	$\mathrm{cotg}\, z = \dfrac{\cos z}{\sin z}$	$z \neq k\pi; k \in Z$
Kosinus hyperbolický	$\cosh z = \dfrac{e^z + e^{-z}}{2}$	$z \in C$
Sinus hyperbolický	$\sinh z = \dfrac{e^z - e^{-z}}{2}$	$z \in C$
Logaritmická funkce	$Ln\, z = ln\lvert z\rvert + iArg(z)$	$z \in C; z \neq 0$
Mocninná funkce	$z^\alpha = e^{\alpha Ln\, z}$	$z, \alpha \in C; z \neq 0$

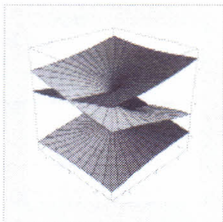
- Funkce e^z, $\sinh z$, $\cosh z$ jsou periodické s periodou $2\pi i$
- Funkce $\sin z$, $\cos z$ jsou periodické s periodou 2π
- Funkce $Ln\, z, z^\alpha$ jsou mnohoznačné, omezíme-li se na $Arg(z) \in \langle 0; 2\pi)$ dostaneme tzv. hlavní větev funkce

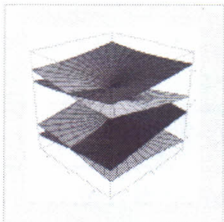
Pozn.: příklady grafů vybraných komplexních funkcí


$f(z) = \arcsin z$


$f(z) = \log z$


$f(z) = z^{1/2}$


$f(z) = z^{1/3}$


$f(z) = z^{1/4}$

Limita funkce komplexní proměnné

- Pojmy: $\lvert z - a\rvert < \varepsilon \to$ epsilonové okolí bodu a, $0 < \lvert z - a\rvert < \varepsilon \to$ prstencové okolí bodu a
- Nechť $z = x + iy$ a $f(z) = u(x;y) + iv(x;y)$.

Funkce komplexní proměnné má v bodě $a = a_1 + ia_2$ limitu právě tehdy, když reálné funkce $u(x;y)$ a $v(x;y)$ mají limitu v bodě $[a_1; a_2]$.

- Platí: $\lim\limits_{z\to a} f(z) = \lim\limits_{[x;y]\to[a_1;a_2]} u(x;y) + \mathrm{i}\cdot\lim\limits_{[x;y]\to[a_1;a_2]} v(x;y)$

PŘ 11

Spojitost funkce komplexní proměnné

- Funkci $f(z)$ komplexní proměnné nazýváme spojitou v komplexním bodě a, jestliže má v tomto bodě limitu a platí-li: $\lim_{z \to a} f(z) = f(a)$.
- Funkci $f(z)$ komplexní proměnné nazýváme spojitou na množině $M \subset C$, jestliže je spojitá v každém bodě množiny M.

PR 12

Derivace funkcí komplexní proměnné

- Stejné zavedení jako u reálných funkcí
- Derivace komplexní funkce $f(z)$ v komplexním bodě a nazýváme číslo $f'(a)$ dané vztahem $f'(a) = \lim_{z \to a} \frac{f(z) - f(a)}{z - a}$
- Pro výpočty derivací platí stejné vzorce jako pro funkce reálné proměnné (viz. MI a M2)
- Jestliže $f'(a)$ existuje, říkáme, že funkce $f(z)$ je diferencovatelná v bodě a
- Jestliže $f'(z)$ existuje v bodě a a v nějakém jeho okolí, nazývá se funkce $f(z)$ Holomorfní v bodě a

Souvislost mezi derivací funkce komplexní proměnné a parciálními derivacemi její reálné a imaginární části řeší Cauchy-Riemannovy podmínky:

- Funkce $f(z) = u(x; y) + iv(x; y)$ má v komplexním bodě $a = a_1 + ia_2$ derivaci právě tehdy, když jsou funkce $u(x; y)$ a $v(x; y)$ v $A[a_1; a_2]$ diferencovatelné a platí $\frac{\partial u}{\partial x}(A) = \frac{\partial v}{\partial y}(A) \wedge \frac{\partial u}{\partial y}(A) = -\frac{\partial v}{\partial x}(A)$.
- Pak $f'(a) = \frac{\partial u}{\partial x}(A) + i\frac{\partial v}{\partial x}(A) = \frac{\partial v}{\partial y}(A) - i\frac{\partial v}{\partial y}(A)$

PR 13 PR 14 PR 15

Integrál funkce komplexní proměnné – výpočet pomocí parametrizace křivky

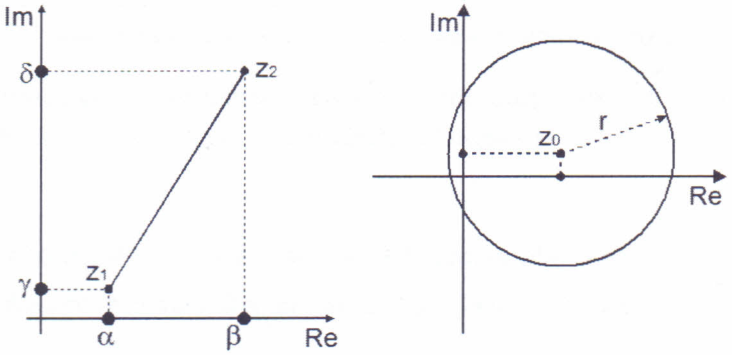
- Při integraci funkcí, které nejsou Holomorfní na C $\{Re(z); Im(z); |z|; \bar{z}\}$

Nechť je dána $\Gamma: R \to C$ komplexní funkce reálné proměnné t. $\Gamma: z(t) = x(t) + iy(t);\ \ t \in \langle\alpha; \beta\rangle$,

kde $x(t), y(t)$ jsou spojité reálné funkce jedné proměnné t takové, že jejich derivace $x'(t), y'(t)$ jsou po částech spojité. Potom říkáme, že Γ je po částech hladká orientovaná křivka v komplexní rovině začínající v bodě $z(\alpha)$ a končící v bodě $z(\beta)$.

Z křivek budeme uvažovat úsečky a kružnice (viz. obrázek parametrizace)

- Úsečka s krajními body z_1, z_2 má parametrickou rovnici $z(t) = z_1 + (z_2 - z_1)t; t \in \langle 0; 1\rangle$
- Úsečky ležící na souřadnicových osách:
  - Na ose x mezi body $z_1 = \alpha;\ z_2 = \beta$: $z(t) = t; t \in \langle\alpha; \beta\rangle$
  - Na ose y mezi body $z_1 = i\gamma;\ z_2 = i\delta$: $z(t) = it; t \in \langle\gamma; \delta\rangle$
- Kladně orientovaná kružnice se středem v bodě z_0 o poloměru r má parametrickou rovnici $z(t) = z_0 + re^{it};\ t \in \langle 0; 2\pi\rangle$



Parametrizace

Nechť je $w = f(z)$ komplexní funkce, jednoznačná a spojitá na křivce Γ. Potom integrál z funkce f po křivce Γ je definován takto:

$$\oint_{\Gamma} f(z)dz = \int_{\alpha}^{\beta} f[z(t)] \cdot z'(t)dt$$

O integrálu funkce komplexní proměnné platí řada vět analogických k větám o integrálu reálných funkcí:

- $\oint_{\Gamma} [kf_1(z) + lf_2(z)]dz = k\oint_{\Gamma} f_1(z)dz + l\oint_{\Gamma} f_2(z)\,dz$
- Skládá-li se křivka Γ z křivek Γ_1 a Γ_2, které mají jediný společný bod (platí analogicky pro n křivek)
    - $\oint_{\Gamma} f(z)dz = \oint_{\Gamma_1} f(z)dz + \oint_{\Gamma_2} f(z)dz$
- Značí-li křivka Γ_1 opačně orientovanou křivku ke křivce Γ
    - $\oint_{\Gamma} f(z)dz = -\oint_{\Gamma_1} f(z)dz$

PŘ 16 PŘ 17 PŘ 18 PŘ 19 PŘ 20 PŘ 21

Integrál funkce komplexní proměnné – výpočet bez parametrizace křivky

- Při integraci funkcí, které jsou Holomorfní na C nemusíme křivky parametrizovat
- Využíváme Cauchyovu větu nebo Cauchyův vzorec nebo Reziduovou větu (viz. později)

Cauchyova věta:

Jestliže je funkce $f(z)$ holomorfní v jednoduše souvislé oblasti, v níž leží křivka Γ, potom hodnota integrálu $\oint_\Gamma f(z)dz$ nezávisí na tvaru křivky Γ, pouze na jejích krajních bodech a platí:

$$\oint_\Gamma f(z)dz = F(z_2) - F(z_1),$$

kde z_1 je počáteční bod a z_2 koncový bod křivky Γ.

- Pro funkci $F(z)$ platí $F'(z) = f(z)$.
- Pro uzavřenou křivku Γ v této oblasti platí, že $\oint_\Gamma f(z)dz = 0$.

Cauchyův vzorec:

Jestli-že je komplexní funkce $f(z)$ holomorfní v jednoduše souvislé oblasti Ω v níž leží uzavřená křivka Γ, potom platí:

$$\oint_\Gamma \frac{f(z)}{z - z_0} dz = \begin{cases} 2\pi i f(z_0); & jestliže\ z_0\ leží\ uvnitř\ \Gamma \\ 0; & jestliže\ z_0\ leží\ vně\ \Gamma \end{cases}$$

Reziduová věta (viz. později)

PŘ 22 PŘ 23

PŘÍKLADY KOMPLEXNÍ ČÍSLA

Př 1 Je dáno $a = \frac{15-5i}{1+2i} - \frac{1-3i}{i} + (3+i)(-1+2i)$. Vypočítejte a^5.

$$\frac{15-5i}{1+2i}\cdot\frac{1-2i}{1-2i} = \frac{15-30i-5i+\overset{-10}{10i^2}}{1\underset{+4}{-4i^2}} = \frac{5-35i}{5} = 1-7i$$

$$\frac{1-3i}{i}\cdot\frac{(-i)}{(-i)} = \frac{-i+\overset{-3}{3i^2}}{\underset{+1}{-i^2}} = \frac{-3-i}{1} = -3-i$$

$$(3+i)(-1+2i) = -3+6i-i+\overset{-2}{2i^2} = -5+5i$$

$$a = 1-7i-(\overset{+3}{-3}\ \overset{+i}{-i})-5+5i = -1-i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4}+i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$$

$a=-1-i \qquad |a| = \sqrt{(-1)^2+(-1)^2} = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{aligned}\cos\varphi &= \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\varphi &= -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right\}\ \varphi = \frac{5\pi}{4}$$

$$a^5 = (\sqrt{2})^5\left(\cos\frac{25\pi}{4}+i\sin\frac{25\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 4\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right) = \underline{\underline{4+4i}}$$

$\underbrace{\sqrt{2}\sqrt{2}}_{2}\cdot\underbrace{\sqrt{2}\sqrt{2}}_{2}\cdot\sqrt{2}$

$\frac{25\pi}{4}$

Př 2 V C řešte rovnici: $\bar{z} = z^2$

$$z = x+iy \rightarrow \quad x-iy = (x+iy)^2$$
$$x-iy = x^2+2xyi+\overset{-y^2}{i^2y^2}$$
$$\underline{x-iy = x^2+2xyi-y^2}$$

porovnáme Re části: I. $x = x^2-y^2$

Im části: II. $-y = 2xy$ } soustava 2R2N

z II. $\Rightarrow 2xy+y=0$

$y(2x+1)=0 \Leftrightarrow y=0 \vee x=-\frac{1}{2}$

dos. do I: a) $y=0 \Rightarrow x=x^2 \Rightarrow x^2-x=0$

$x(x-1)=0 \Leftrightarrow x_1=0 \vee x_2=1$

b) $x=-\frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} = \left(-\frac{1}{2}\right)^2-y^2$

$y^2 = \frac{1}{4}+\frac{1}{2} = \frac{1+2}{4} = \frac{3}{4}$

$|y| = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow y_1 = \frac{\sqrt{3}}{2} \vee y_2 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$

Řešení: $\left\{z_1=0;\ z_2=1;\ z_3=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i;\ z_4=-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i\right\}$

(Př 3) V C řešte rci: $z^2 - \frac{3}{2}zi + 1 = 0$

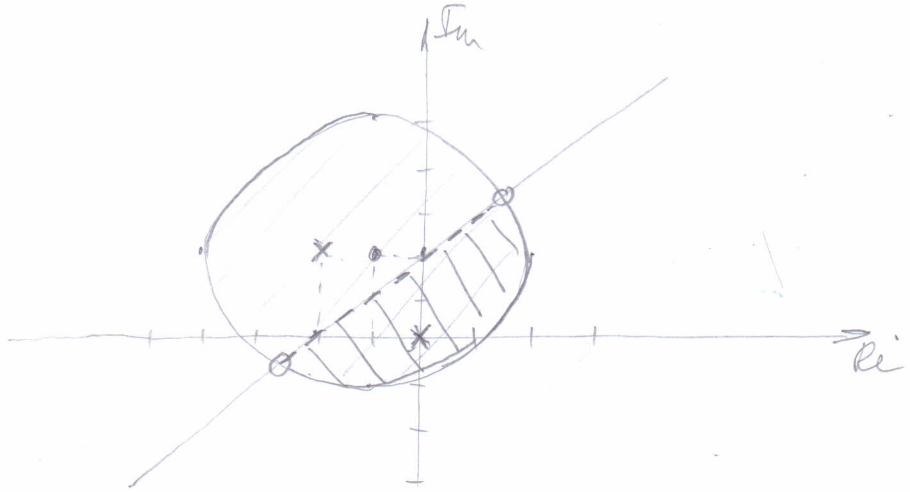
$$D = b^2 - 4ac = \left(-\frac{3}{2}i\right)^2 - 4\cdot 1\cdot 1 = \frac{9}{4}i^2 - 4 = -\frac{9}{4} - \frac{16}{4} = -\frac{25}{4}$$

$$z_{1,2} = \frac{\frac{3}{2}i \pm \sqrt{-\frac{25}{4}}}{2} = \frac{\frac{3}{2}i \pm \sqrt{\frac{25}{4}i^2}}{2} = \frac{\frac{3}{2}i \pm \frac{5}{2}i}{2} = \begin{cases} z_1 = 2i \\ z_2 = -\frac{1}{2}i \end{cases}$$

$\underline{\{2i; -\frac{1}{2}i\}}$

(Př 4) V C znázorněte: $\underbrace{|z+1-2i| \leq 3}_{\text{vzdálenost kč z od } -1+2i \leq 3} \wedge |z+\underbrace{2-2i}_{\text{vzd. kč od } -2+2i}| > |z|$

vzdálenost kč z od $-1+2i \leq 3$; vzd. kč od $-2+2i$ > než vzd. kč o $0+0i$



(Př 5) V C řešte Binomickou rci: $x^5 = 2-2i$

$$x = \sqrt[5]{2-2i}$$

$z = 2-2i$

$|z| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

$\cos\varphi = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$, $\sin\varphi = -\frac{2}{2\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ $\Big\}\ \varphi = \frac{7\pi}{4}$

$$x^5 = 2\sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{7\pi}{4}+2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{7\pi}{4}+2k\pi\right)\right]$$

$$x = \sqrt[5]{2\sqrt{2}}\left[\cos\left(\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{5}\right) + i\sin\left(\frac{\frac{7\pi}{4}+2k\pi}{5}\right)\right]$$

MOIVREOVA VĚTA

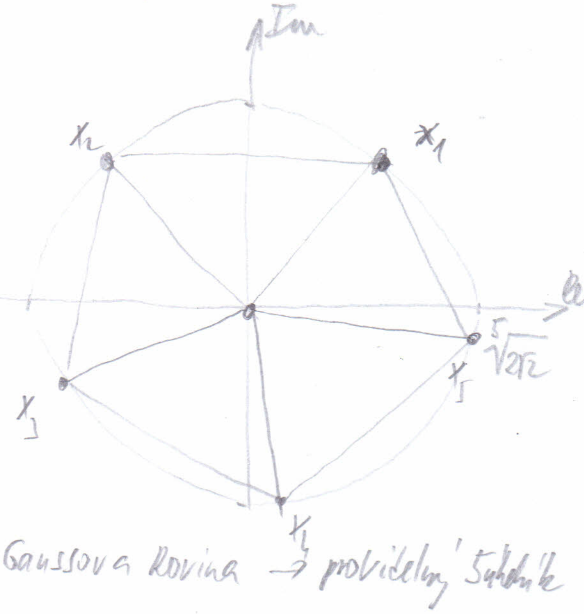
$\rightarrow k=0 \rightarrow x_1 = \sqrt[5]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{7\pi}{20} + i\sin\frac{7\pi}{20}\right)$

$k=1 \rightarrow x_2 = \sqrt[5]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

$k=2 \rightarrow x_3 = \sqrt[5]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{23\pi}{20} + i\sin\frac{23\pi}{20}\right)$

$k=3 \rightarrow x_4 = \sqrt[5]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{31\pi}{20} + i\sin\frac{31\pi}{20}\right)$

$k=4 \rightarrow x_5 = \sqrt[5]{2\sqrt{2}}\left(\cos\frac{39\pi}{20} + i\sin\frac{39\pi}{20}\right)$



Gaussova Rovina → pravidelný 5úhelník

(Ř 6) odvození Eulerova vztahu $e^{ix} = \cos x + i\sin x$

Taylorův rozvoj fce do mocninné řady

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x-x_0)^k = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \dots \quad ; \; x_0, a_k \text{ jsou konstanty}$$

→ dosadíme $x = x_0$ → $f(x_0) = a_0 + a_1(x_0-x_0) + a_2(x_0-x_0)^2 + \dots \Rightarrow f(x_0) = a_0$

→ derivujeme $f'(x) = a_1 \cdot 1 + 2a_2(x-x_0) + 3a_3(x-x_0)^2 + \dots$

$$f'(x_0) = a_1 + 2a_2\underbrace{(x_0-x_0)}_{0} + 3a_3\underbrace{(x_0-x_0)}_{0}^2 + \dots \Rightarrow f'(x_0) = a_1$$

→ 2. derivace $f''(x) = 2a_2 + 3\cdot 2 a_3(x-x_0) + \dots$

$$f''(x_0) = 2a_2 + 3\cdot 2\cdot a_3\underbrace{(x_0-x_0)}_{0} + \dots \Rightarrow f''(x_0) = 2a_2$$

→ 3. derivace $f'''(x) = 3\cdot 2\cdot 1\cdot a_3 + 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1 a_4(x-x_0) + \dots$

$$f'''(x_0) = 3\cdot 2\cdot 1\, a_3 + 4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot a_4\underbrace{(x_0-x_0)}_{0} + \dots \Rightarrow f'''(x_0) = 3\cdot 2\cdot 1\cdot a_3$$

$$\longrightarrow f^{k}(x_0) = k!\,a_k \Rightarrow a_k = \frac{f^k(x_0)}{k!}$$

∃ derivace všech řádů $\Rightarrow f(x) = T_f^{x_0}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$

pokud $x_0 = 0$ (Mc Laurinův tvar) $\rightarrow f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^k(0)}{k!} x^k$

$f(x) = e^x \quad x_0 = 0 \qquad f'(x) = e^x \qquad e^0 = 1 \qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = e^x \qquad f''(0) = 1$

$f^k(x) = e^x \qquad f^k(0) = 1$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} \qquad x \in (-\infty; \infty)$$

$f(x) = \sin x \quad x_0 = 0 \qquad f'(x) = \cos x \qquad \sin 0 = 0 \qquad f'(0) = 1$

$f''(x) = -\sin x \qquad f''(0) = 0$

$f'''(x) = -\cos x \qquad f'''(0) = -1$

$$\sin x = 0 + \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{(2k+1)!} \qquad x \in (-\infty; \infty)$$

$f(x) = \cos x \quad x_0 = 0 \qquad f'(x) = -\sin x \qquad \cos 0 = 1 \qquad f'(0) = 0$

$f''(x) = -\cos x \qquad f''(0) = -1$

$f'''(x) = \sin x \qquad f'''(0) = 0$

$f^{IV}(x) = \cos x \qquad f^{IV}(0) = 1$

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \frac{x^8}{8!} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} \qquad x \in (-\infty; \infty)$$

→ Vezmeme rozvoj e^x a za x dosadíme ix $(i^2=-1;\ i^3=-i;\ i^4=1;\ \dots)$

$$e^{ix} = 1 + \frac{ix}{1!} + \frac{i^2x^2}{2!} + \frac{i^3x^3}{3!} + \frac{i^4x^4}{4!} + \frac{i^5x^5}{5!} + \frac{i^6x^6}{6!} + \frac{i^7x^7}{7!} + \dots =$$

$$= 1 + \frac{ix}{1!} - \frac{x^2}{2!} - i\frac{x^3}{3!} + \frac{x^4}{4!} + i\frac{x^5}{5!} - \frac{x^6}{6!} - i\frac{x^7}{7!} + \dots =$$ zvlášť Re složky
Im složky

$$= \underbrace{\left(1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots\right)}_{\cos x} + i\underbrace{\left(\frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots\right)}_{\sin x}$$

$$\Rightarrow \underline{e^{ix} = \cos x + i\sin x}$$

Př 7) zapište v E exp. tvaru

a) $z = 1 - i\sqrt{3}$ $\quad |z| = 2 \quad \left.\begin{array}{l}\cos\varphi = \frac{1}{2}\\ \sin\varphi = -\frac{\sqrt{3}}{2}\end{array}\right\} \varphi = \frac{5\pi}{3} + 2k\pi \quad z = 2e^{i\left(\frac{5\pi}{3}+2k\pi\right)} = 2e^{i\pi\left(\frac{5}{3}+2k\right)}$; $k\in\mathbb{Z}$

$z = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}$

b) $z = -i = e^{i\left(\frac{3\pi}{2}+2k\pi\right)}$

c) $z = -1 = e^{i(\pi+2k\pi)}$

d) $z = 1 = e^{i2k\pi}$ $\qquad k\in\mathbb{Z}$

Př 8) a) fce $w = \frac{1}{z}$ $\qquad$ def. $\mathbb{C} - \{0\}$

$w(1+i) = \frac{1}{1+i} = \frac{1}{1+i}\cdot\frac{1-i}{1-i} = \frac{1-i}{1+1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}i$

$w(2i) = \frac{1}{2i} = -\frac{1}{2}i$

} jednoznačné fce

b) fce $w = z - \sqrt{z+1}$ $\qquad z\in\mathbb{C}$ $\qquad$ $\forall z$ má $\sqrt{z}$ 2 hodnoty MNOHOZN. FCE

$w(0) = 0 - \sqrt{0+1} = \sqrt{1} = \Big< \begin{array}{l} w_1(0) = 1 \\ w_2(0) = -1 \end{array}$

$\sqrt{1+0i} = \sqrt{1}\left(\cos\frac{2k\pi}{2} + i\sin\frac{2k\pi}{2}\right)$

$k=0 \Rightarrow 1(\cos 0 + i\sin 0) = 1$

$k=1 = 1(\cos\pi + i\sin\pi) = -1$

$w(-1+2i) = -1 + 2i - \sqrt{2i} = \Big< \begin{array}{l} w_1(-1+2i) = -2+i \\ w_2(-1+2i) = 3i \end{array}$

$\sqrt{2i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2} + i\sin\frac{\frac{\pi}{2}+2k\pi}{2}\right)$

$k=0 \Rightarrow \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 1+i$

$k=1 \Rightarrow \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right) = -1-i$

PŘ 9 $f: w = z^2 - 1$ $\quad z = x + iy$ určete $Re(f)$ a $Im(f)$

$$w = (x+iy)^2 - 1 = x^2 + 2xiy + \underbrace{i^2y^2}_{-y^2} - 1 = x^2 - y^2 - 1 + i\,2xy$$

$Re(f) = x^2 - y^2 - 1$

$Im(f) = 2xy$

PŘ 10 která KFCE má $Re(f) = y^2 - y - x^2$ a $Im(f) = x - 2xy$

$$\frac{\begin{array}{l} x+iy = z \\ x-iy = \bar{z} \end{array}}{} \qquad \begin{array}{l} z+\bar{z} = 2x \Rightarrow x = \frac{z+\bar{z}}{2} \\ z-\bar{z} = 2iy \Rightarrow y = \frac{z-\bar{z}}{2i} \end{array} \Bigg\} \; f(x+iy) = y^2 - y - x^2 + i(x - 2xy) \ominus$$

$$\ominus \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2 - \left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) - \left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2 + i\left(\frac{z+\bar{z}}{2} - 2\cdot\frac{z+\bar{z}}{4}\cdot\frac{z-\bar{z}}{2i}\right) =$$

$$= \frac{z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{\underbrace{4i^2}_{-4}} - \frac{(z-\bar{z})i}{\underbrace{2i^2}_{-2}} - \frac{z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2}{4} + \frac{zi + \bar{z}i}{2} - \frac{\overbrace{(z+\bar{z})(z-\bar{z})}^{z^2-\bar{z}^2}}{2} =$$

$$= -\frac{1}{4}z^2 + \cancel{\frac{1}{2}z\bar{z}} - \cancel{\frac{1}{4}\bar{z}^2} + \frac{1}{2}zi - \cancel{\frac{1}{2}\bar{z}i} - \frac{1}{4}z^2 - \cancel{\frac{1}{2}z\bar{z}} - \cancel{\frac{1}{4}\bar{z}^2} + \frac{1}{2}zi + \cancel{\frac{1}{2}\bar{z}i} - \frac{1}{2}z^2 + \cancel{\frac{1}{2}\bar{z}^2} =$$

$$= \underline{-z^2 + zi} \qquad f(z) = -z^2 + zi$$

PŘ 11 $$\lim_{z\to i} \frac{z^2+1}{z-i} = \lim_{z\to i} \frac{(z+i)\cancel{(z-i)}}{\cancel{z-i}} = \lim_{z\to i}(z+i) = \underline{\underline{2i}}$$

PŘ 12 $f(z) = \dfrac{z^2+1}{z-i}$ není spojitá v bodě $z = i$

lze dodefinovat $\lim_{z\to i} \dfrac{z^2+1}{z-i} = 2i$

PŘ 13 $f(z) = \dfrac{3z}{z^2 - i}$ $\qquad \left[z^2 \neq i \quad z \neq \pm\left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right]$

$$f'(z) = \frac{\overbrace{3(z^2-i) - 3z(2z)}^{3z^2 - 3i - 6z^2 = -3z^2 + 3i}}{(z^2-i)^2} = \underline{\underline{-\frac{3(z^2+i)}{(z^2-i)^2}}}$$

$$f'(0) = -\frac{3(i)}{(0-i)^2} = -\frac{3i}{-1} = \underline{\underline{3i}}$$

PŘ 14 a) $f(z) = e^z$ určíme $\mathrm{Re}(f)$ a $\mathrm{Im}(f)$

$$f(x+iy) = e^{x+iy} = e^x \cdot e^{iy} = e^x(\cos y + i\sin y) = e^x\cos y + i\, e^x \sin y$$

$u(x,y) = e^x \cos y$ $\quad \frac{\partial u}{\partial x} = e^x \cos y$ $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = -e^x \sin y$ Platí CR podmínky

$v(x,y) = e^x \sin y$ $\quad \frac{\partial v}{\partial x} = e^x \sin y$ $\quad \frac{\partial v}{\partial y} = e^x \cos y$ fce je HOLOMORFNÍ v $\mathbb{C}$

$$(e^z)' = e^z$$

b) $f(z) = \bar{z}$ $\quad z = x + iy$

$f(\bar{z}) = x - iy$ $\quad u(x,y) = x$ $\quad \frac{\partial u}{\partial x} = 1$ $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0$ neplatí CRP

$v(x,y) = -y$ $\quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ $\quad \frac{\partial v}{\partial y} = -1$ fce nemá derivaci

c) $f(z) = z|z|$ $\quad z = x + iy$ $\quad |z| = \sqrt{x^2+y^2}$

$$f(z) = (x+iy)\cdot\sqrt{x^2+y^2} = x\sqrt{x^2+y^2} + iy\sqrt{x^2+y^2}$$

$u(x,y) = x\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad \frac{\partial u}{\partial x} = \sqrt{x^2+y^2} + x\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+y^2}}$

$v(x,y) = y\sqrt{x^2+y^2}$ $\quad \frac{\partial v}{\partial y} = \sqrt{x^2+y^2} + y\cdot\frac{2y}{2\sqrt{x^2+y^2}}$

$\Big\} \frac{\partial u}{\partial x} \neq \frac{\partial v}{\partial y}$ $\nexists$ derivace

pro $z = 0$ $\quad f(0) = 0$

$$f'(0) = \lim_{z\to 0} \frac{z|z| - 0}{z - 0} = \lim_{z\to 0} \frac{z|z|}{z} = \underline{\underline{0}}$$

$\exists$ derivace pouze v $\underline{\underline{0}}$

PŘ 15 Nalezněte HOLOMORFNÍ fci na $\mathbb{C}$, jejíž $\mathrm{Re}(f) = u(x,y) = 3x^2 - 3y^2 - 2xy + 2y$ a utč.-li pro $f(0) = i$ $\quad v(x,y) = ?$

Musí platit CRP: $\frac{\partial u}{\partial x} = 6x - 2y \Rightarrow \frac{\partial v}{\partial y} = 6x - 2y \rightarrow v(x,y) = \int (6x-2y)\,dy =$

$\frac{\partial u}{\partial y} = -6y - 2x + 2$ $\quad = 6xy - 2\frac{y^2}{2} + \varphi(x) = 6xy - y^2 + \varphi(x)$

$\Rightarrow \frac{\partial v}{\partial x} = 6y + 2x - 2$ $\qquad \frac{\partial v}{\partial x} = 6y + \varphi'(x)$

$$\cancel{6y} + 2x - 2 = \cancel{6y} + \varphi'(x) \Rightarrow \varphi'(x) = 2x - 2$$

$$\varphi(x) = \int (2x-2)\,dx = x^2 - 2x + C$$

$v(x,y) = 6xy - y^2 + x^2 - 2x + C$

⑥

$f(z) = 3x^2 - 3y^2 + 2xy + 2y + i(6xy - y^2 + x^2 - 2x + c)$

$f(z) = ?$ dalo by se použít $\begin{matrix} z = x + iy \\ \bar{z} = x - iy \end{matrix}$ $\begin{matrix} x = \frac{z+\bar{z}}{2} \\ y = \frac{z-\bar{z}}{2i} \end{matrix}$ zdlouhavé

rychlejší $z = x + iy$ kde $x = z$ a $y = 0$

$f(z) = 3z^2 - 0 + 0 + 0 + i(0 - 0 + z^2 - 2z + c) = 3z^2 + iz^2 - 2iz + ci$

konstantu c určíme z podmínky $f(0) = i$

$f(0) = 3 \cdot 0^2 + i \cdot 0^2 - 2i \cdot 0 + ci = i$

$ci = i \rightarrow ci - i = 0$

$i(c-1) = 0 \Leftrightarrow \underline{c = 1}$

$$\underline{\underline{f(z) = 3z^2 + iz^2 - 2iz + i}}$$

kontrola

Vyjádření hledané fce je

$$f(z) = 3x^2 - 3y^2 - 2xy + 2y + i\left(6xy - y^2 + x^2 - 2x + c\right)$$

$z = x + iy$

$\bar{z} = x - iy$

$z + \bar{z} = 2x \Rightarrow x = \frac{z+\bar{z}}{2}$

$z - \bar{z} = 2iy \Rightarrow y = \frac{z-\bar{z}}{2i}$

$-\frac{1}{2i}\frac{i}{i} = -\frac{i}{2i^2} = +\frac{i}{2}$

$\frac{1}{i}\frac{i}{i} = \frac{i}{i^2} = -i$

$$f(z) = 3\frac{(z+\bar{z})^2}{4} - 3\frac{(z-\bar{z})^2}{4i^2} - \cancel{2}\frac{z+\bar{z}}{\cancel{2}}\cdot\frac{z-\bar{z}}{2i} + \cancel{2}\frac{z-\bar{z}}{\cancel{2}i} + i\left(\cancel{6}^{3}\frac{z+\bar{z}}{\cancel{2}}\cdot\frac{z-\bar{z}}{2i} - \frac{(z-\bar{z})^2}{4i^2} + \frac{(z+\bar{z})^2}{4} - \cancel{2}\frac{z+\bar{z}}{\cancel{2}} + c\right)$$

$$= \frac{3}{4}\left(z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2\right) + \frac{3}{4}\left(z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2\right) - \frac{1}{2i}\left(z^2 - \bar{z}^2\right) + \frac{1}{i}\left(z - \bar{z}\right) +$$

$$+ i\left[\frac{3}{2i}\left(z^2 - \bar{z}^2\right) + \frac{1}{4}\left(z^2 - 2z\bar{z} + \bar{z}^2\right) + \frac{1}{4}\left(z^2 + 2z\bar{z} + \bar{z}^2\right) - z - \bar{z} + c\right] =$$

$$= \frac{3}{4}z^2 + \cancel{\frac{3}{2}z\bar{z}} + \frac{3}{4}\bar{z}^2 + \frac{3}{4}z^2 - \cancel{\frac{3}{2}z\bar{z}} + \frac{3}{4}\bar{z}^2 + \frac{i}{2}z^2 - \frac{i}{2}\bar{z}^2 - iz + i\bar{z} +$$

$$i\left[-\frac{3i}{2}z^2 + \frac{3i}{2}\bar{z}^2 + \frac{1}{4}z^2 - \frac{1}{2}z\bar{z} + \frac{1}{4}\bar{z}^2 + \frac{1}{4}z^2 + \frac{1}{2}z\bar{z} + \frac{1}{4}\bar{z}^2 - z - \bar{z} + c\right] =$$

$$= \frac{3}{2}z^2 + \cancel{\frac{3}{2}\bar{z}^2} + \frac{i}{2}z^2 - \cancel{\frac{i}{2}\bar{z}^2} - iz + \cancel{i\bar{z}} + \frac{3}{2}z^2 - \cancel{\frac{3}{2}\bar{z}^2} + \frac{1}{4}iz^2 - \frac{1}{2}iz\bar{z} + \cancel{\frac{1}{4}i\bar{z}^2} + \frac{1}{4}iz^2 +$$

$$+ \frac{1}{2}iz\bar{z} + \cancel{\frac{1}{4}i\bar{z}^2} - iz - \cancel{i\bar{z}} + ci = 3z^2 + iz^2 - 2iz + ci$$

konst. z podmínky: $f(0) = i$

$f(0) = \boxed{3\cdot 0^2 + i\cdot 0^2 + 2i\cdot 0 + ci = i}$

$ci = i$

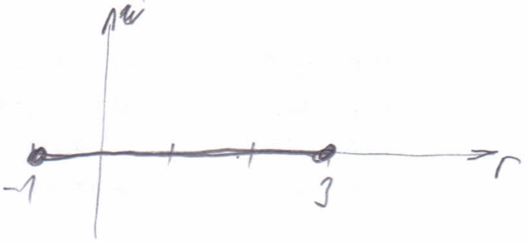
$ci - i = 0$

$i(c-1) = 0 \quad c = 1$

$$f(z) = 3z^2 + iz^2 - 2iz + i$$

(7)

Př 16 Vypočtěte $\int_\Gamma \bar{z}\,dz$; Γ je úsečka z bodu -1 do bodu 3

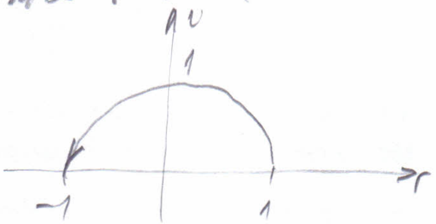


parametrizace úsečky: $z(t)=t\ ;\ t\in\langle -1;3\rangle$

$\Rightarrow \bar{z}(t)=t \qquad dz=1\,dt$

$$\int_\Gamma \bar{z}\,dz=\int_{-1}^{3} t\cdot 1\cdot dt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_{-1}^{3}=\frac{9}{2}-\frac{(-1)^2}{2}=\underline{\underline{4}}$$

Př 17 Vypočtěte $\int_\Gamma |z|\,dz$; Γ je horní půlkružnice z bodu 1 do -1



parametrizace půlkružnice: $z(t)=e^{it}\ ;\ t\in\langle 0;\pi\rangle$

$\Rightarrow |z(t)|=1 \qquad dz=ie^{it}\,dt$

$$\int_\Gamma |z|\,dz=\int_0^{\pi}1\cdot ie^{it}\,dt=i\int_0^{\pi}e^{it}\,dt=i\left[\frac{1}{i}e^{it}\right]_0^{\pi}=e^{i\pi}-e^{0}=\cos\pi+i\sin\pi-1=\underline{\underline{-2}}$$

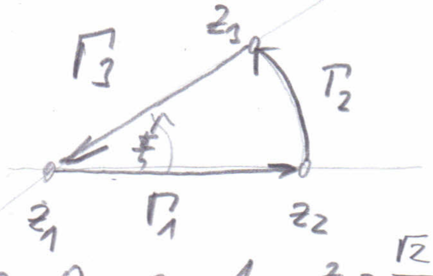
Př 18 Vypočtěte $\int_\Gamma |z|\cdot\bar{z}\,dz$, Γ je horní půlkružnice z bodu -1 do $+1$

PR Γ: $z=e^{it}\ ;\ t\in\langle 0;\pi\rangle$

$\Rightarrow |z|\cdot\bar{z}=1\cdot e^{-it} \qquad dz=ie^{it}\,dt$

$$\int_\Gamma |z|\cdot\bar{z}\,dz=\int_{\pi}^{0}e^{-it}\cdot ie^{it}\,dt=i\int_{\pi}^{0}dt=i\,[t]_{\pi}^{0}=i(0-\pi)=\underline{\underline{-i\pi}}$$

Př 19 Vypočtěte $\int_\Gamma |z|\cdot\bar{z}\,dz$, Γ je dané grafický:



$z_1=0 \qquad z_2=1 \qquad z_3=\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}$

Γ_1: $z(t)=t\ ;\ t\in\langle 0;1\rangle \qquad |z|\cdot\bar{z}=t\cdot t=t^2 \qquad dz=dt$

$$\int_{\Gamma_1}|z|\bar{z}\,dz=\int_0^1 t^2\,dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac{1}{3}-0=\frac{1}{3}$$

Γ_2: $z(t)=e^{it}\ ;\ t\in\langle 0;\frac{\pi}{4}\rangle \qquad |z|\cdot\bar{z}=1\cdot e^{-it} \qquad dz=ie^{it}\,dt$

$$\int_{\Gamma_2}|z|\bar{z}\,dz=\int_0^{\frac{\pi}{4}}e^{-it}\cdot ie^{it}\,dt=i\int_0^{\frac{\pi}{4}}dt=i\,[t]_0^{\frac{\pi}{4}}=i\left(\frac{\pi}{4}-0\right)=i\frac{\pi}{4}$$

$z_0+(z_3-z_0)t \qquad t\in\langle 0;1\rangle$

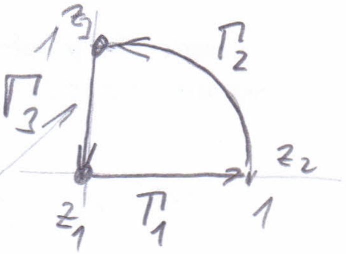
$\Gamma_3: \quad z(t)=0+\left(\frac{\sqrt2}{2}+\frac{\sqrt2}{2}i-0\right)t=\frac{\sqrt2}{2}t+\frac{\sqrt2}{2}it=\frac{\sqrt2}{2}t(1+i) \qquad dz=\frac{\sqrt2}{2}(1+i)\,dt$

$|z|\cdot\bar z=\sqrt{\left(\frac{\sqrt2}{2}t\right)^2+\left(\frac{\sqrt2}{2}t\right)^2}\cdot\left(\frac{\sqrt2}{2}t-\frac{\sqrt2}{2}it\right)=t\left(\frac{\sqrt2}{2}t-\frac{\sqrt2}{2}it\right)=t^2\cdot\frac{\sqrt2}{2}(1-i)$

$$\int_{\Gamma_3}|z|\bar z\,dz=\int_1^0 t^2\frac{\sqrt2}{2}(1-i)\cdot\frac{\sqrt2}{2}(1+i)\,dt=\frac12\underbrace{(1-i)(1+i)}_{\overset{2}{1-i^2}}\int_1^0 t^2\,dt=\frac12\cdot2\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^0=0-\frac13=\underline{\underline{-\frac13}}$$

$$\int_\Gamma|z|\bar z\,dz=\int_{\Gamma_1}|z|\bar z\,dz+\int_{\Gamma_2}|z|\bar z\,dz+\int_{\Gamma_3}|z|\bar z\,dz=\frac13+i\frac{\pi}{4}-\frac13=\underline{\underline{i\frac{\pi}{4}}}$$

Př. 20 $\displaystyle\int_\Gamma|z|\cdot z\,dz \quad ; \; \Gamma$ je



$z_1=0$
$z_2=1$
$z_3=i$

$\Gamma_1: \quad z(t)=t\;;\; t\in\langle0;1\rangle \qquad |z|\cdot z=t\cdot t=t^2$
$dz=dt$

$$\int_{\Gamma_1}|z|\cdot z\,dz=\int_0^1 t^2\,dt=\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1=\frac13$$

$\Gamma_2: \quad z(t)=e^{it}\;;\; t\in\langle0;\frac{\pi}{2}\rangle \qquad |z|\cdot z=1\cdot e^{it}$
$dz=ie^{it}\,dt$

$$\int_{\Gamma_2}|z|\cdot z\,dz=\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{it}\cdot ie^{it}\,dt=i\int_0^{\frac{\pi}{2}}e^{2it}\,dt=i\frac{1}{2i}\left[e^{2it}\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac12\left[\left(e^{2i\frac{\pi}{2}}-e^0\right)\right]=$$

$$=\frac12\left(e^{i\pi}-1\right)=\frac12\left(\overset{-1}{\cos\pi}+i\overset{0}{\sin\pi}-1\right)=\frac12(-2)=\underline{\underline{-1}}$$

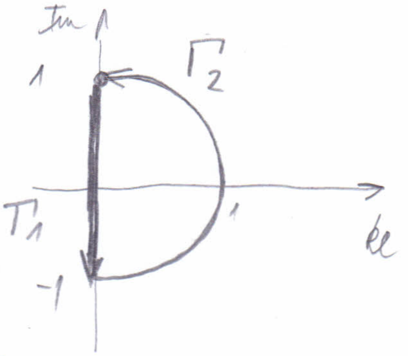
$\Gamma_3: \quad z(t)=it \qquad t\in\langle0;1\rangle \qquad |z|\cdot z=t\cdot it=t^2i$
$dz=i\,dt$

$$\int_{\Gamma_3}|z|z\,dz=\int_1^0 t^2 i\,i\,dt=-\left[\frac{t^3}{3}\right]_1^0=-\left(0-\frac13\right)=\frac13$$

$$\int_\Gamma|z|z\,dz=\frac13-1+\frac13=\underline{\underline{-\frac13}}$$

PŘ 21 $\int_\Gamma |z|^2 dz$

Γ:



Γ_1: $z(t) = it$; $t \in \langle -1; 1 \rangle$ $|z^2| = t^2$ opačně orientovaná

$dz = i\,dt$

$$\int_{\Gamma_1} |z|^2 dz = -\int_{-1}^{1} t^2 i\,dt = -i\left[\frac{t^3}{3}\right]_{-1}^{1} = -i\left[\left(\frac{1}{3}\right) - \left(-\frac{1}{3}\right)\right] = -i\left(\frac{2}{3}\right) = \underline{\underline{-\frac{2}{3}i}}$$

Γ_2: $z(t) = 0 + e^{it}$, $t \in \langle -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \rangle$ $|z^2| = 1$

$dz = i e^{it} dt$

$$\int_{\Gamma_2} |z|^2 dz = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 1 \cdot i \cdot e^{it} dt = i \frac{1}{i}\left[e^{it}\right]_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} = \left[e^{i\frac{\pi}{2}} - e^{-i\frac{\pi}{2}}\right] = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} +$$

$$- \left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\right) = \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} - \cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2} = 2i\sin\frac{\pi}{2} = \underline{\underline{2i}}$$

$$\int_\Gamma |z|^2 dz = -\frac{2}{3}i + 2i = \underline{\underline{\frac{4}{3}i}}$$

PŘ 22 Vypočtěte integrály

a) $\int_\Gamma z^2 dz$; $\Gamma: |z - 3 + 5i| = \frac{1}{2}$ kladně orientovaná kružnice

z^2 je H v C, Γ je uzavřená v C $\Rightarrow \int_\Gamma z^2 dz = 0$

b) $\int_\Gamma e^z dz$; Γ je obvod obdélníka s vrcholy $z_1 = -1$; $z_2 = 1$; $z_3 = 1 + i$; $z_4 = -1 + i$; + orientovaný

e^z je H v C, Γ je uzavřená v C $\Rightarrow \int_\Gamma e^z dz = 0$

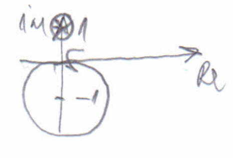
c) $\int_\Gamma \sin iz\, dz = -\frac{1}{i}\left[\cos iz\right]_0^{\pi i} = i\left[\cos \pi i^2 - \cos 0\right] = i[\cos(-\pi) - \cos 0] = i(-2) = \underline{\underline{-2i}}$

Γ je lib. křivka spojující body 0 a πi

d) $\int_\Gamma \frac{e^z}{z-i} dz = 0$

$\Gamma: |z+i| = 1$ + OR

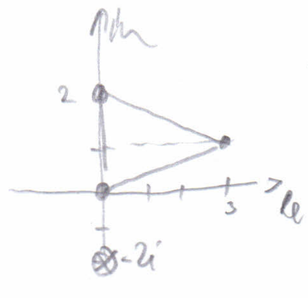
pól: $i \notin \Gamma$



e) $\int \frac{z}{z+2i} = 0$

Γ: Δ spoj. body $0; 2i; 3+i$

pól: $-2i \notin \Gamma$



Př. 2 Vypočtěte integrály:

a) $\Gamma: |z-1|=1$ kladně orientovaná

pól: $1 \in \Gamma$; e^z je H

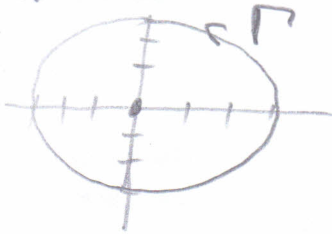
$$\int_\Gamma \frac{e^z}{z-1}\,dz = 2\pi i e^1 = \underline{\underline{2\pi i e}}$$

b) $$\int \frac{z^2+2z+2}{z-2}\,dz$$

$\Gamma: |z|=3$, kladně orientovaná

pól: $2 \in \Gamma$,

z^2+2z+2 je H



$$\int \frac{z^2+2z+2}{z-2}\,dz = 2\pi i\left(2^2+2\cdot 2+2\right) = \underline{\underline{20\pi i}}$$

c) $$\int_\Gamma \frac{dz}{z(z^2+4)}$$; $\Gamma: |z|=1$ +OR

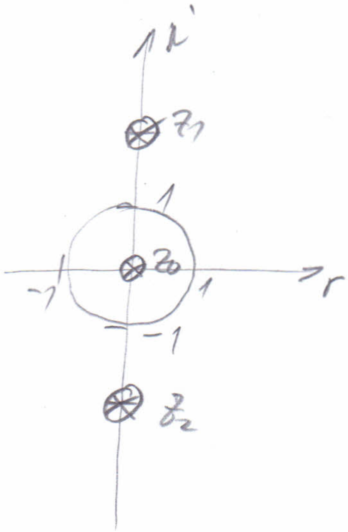
fce: $\frac{1}{z(z^2+4)} = \frac{1}{z(z+2i)(z-2i)}$

je H na $\mathbb{C} \setminus \{0; 2i; -2i\}$

póly: $0; 2i; -2i$

$z_0 = 0 \in \Gamma$

$z_1 = 2i$, $z_2 = -2i$ $\} \notin \Gamma$



$$\int_\Gamma \frac{dz}{z(z^2+4)} = \int_\Gamma \frac{\frac{1}{z^2+4}}{z}\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{0+4}\right) = \underline{\underline{\frac{1}{2}\pi i}}$$

d) $$\int_\Gamma \frac{dz}{(z^2+1)(z+1)^2} \ominus$$ $\Gamma: |z-1-i|=2$ +OR

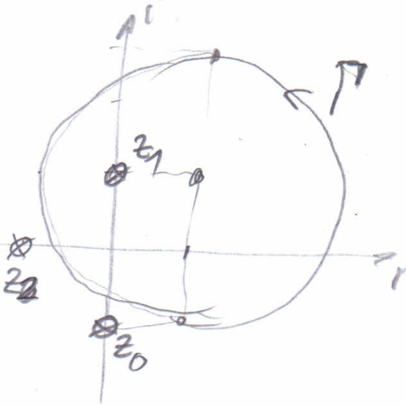
$$\frac{1}{(z^2+1)(z+1)^2} = \frac{1}{(z+i)(z-i)(z+1)^2}$$ je H na $\mathbb{C} \setminus \{-i; i; -1\}$

póly: $z_0 = -i \notin \Gamma$

$z_1 = i \in \Gamma$

$z_2 = -1 \notin \Gamma$

$$\ominus \int_\Gamma \frac{\frac{1}{(z+i)(z+1)^2}}{z-i}\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{2i(i+1)^2}\right) = \frac{\pi}{i^2+2i+1} = \frac{\pi}{2i}\cdot\frac{i}{i} = \underline{\underline{-\frac{\pi i}{2}}}$$



Řešené příklady komplexní čísla

① KČ $z = 2+2i$ zapište v GT a ET.

$|z| = \sqrt{4+4} = 2\sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\} \varphi = \frac{\pi}{4}$$

$$2+2i = 2\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right) = 2\sqrt{2}\cdot e^{i\frac{\pi}{4}}$$

② je číslo $z = \cos\pi + i\sin\frac{\pi}{2}$ v GT?

není → argumenty musí být stejné

$$z = \cos\pi + i\sin\frac{\pi}{2} = -1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$$

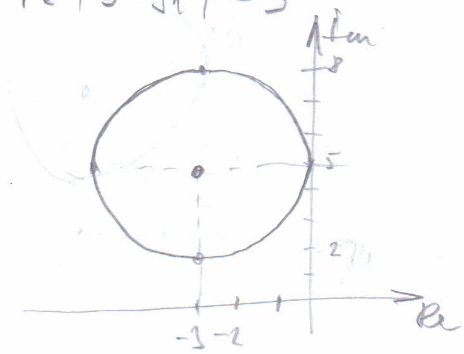
$|z| = \sqrt{2}$

$$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi = \frac{-1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin\varphi = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{array}\right\} \varphi = \frac{3\pi}{4}$$

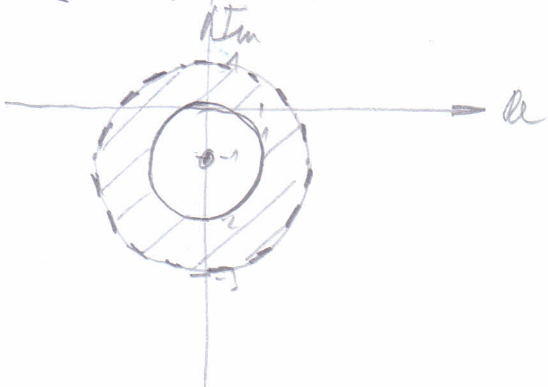
③ Nalezněte v GRKČ čísla z, pro která platí

a) $|z+3-5i| = 3$

b) $1 \leq |z+i| < 2$



kružnice



c) $|z| = 1-2i$

∅ AH je vždy reálné číslo

d) $Re(z) = Im(z)$

e) $Im(z) = -i$

∅ $Im(z)$ je vždy reálné číslo

4) Jsou dány fce $w = f(z)$. Vypočtěte jejich hodnotu v bodě $z = 8-6i$

a) $w(z) = z^2 - 3z + 8i$

$w(z) = (8-6i)^2 - 3(8-6i) + 8i = 64 - 96i + \overset{-36}{36i^2} - 24 + 18i + 8i = \underline{\underline{4-70i}}$

b) $w(z) = \dfrac{z^2-|z|}{z-8}$

$w(z) = \dfrac{(8-6i)^2 - \sqrt{8^2+6^2}}{\cancel{8}-6i-\cancel{8}} = \dfrac{64-96i+\overset{-36}{36i^2} - \overset{-10}{\sqrt{100}}}{-6i} = \dfrac{18-96i}{-6i} = 16 - \dfrac{3}{i}\cdot\dfrac{i}{i} =$

$= 16 - \dfrac{3i}{\underset{-1}{i^2}} = \underline{\underline{16+3i}}$

c) $w(z) = z + (\bar z)^2 + \mathrm{Im}(z\cdot\bar z) = 8-6i + (8+6i)^2 + \mathrm{Im}[(8-6i)(8+6i)] =$

$= 8-6i+64+96i+\overset{-36}{36i^2} + \mathrm{Im}(64 - \overset{+36}{36i^2}) =$

$= \underline{8}-6i+\underline{64}+96i-\underline{36}+\overset{0}{\mathrm{Im}(100)} = \underline{\underline{36+90i}}$

5) Je dána fce $f(z) = xy + i(x^2+y^2)$. Určete

a) $f(-1+2i) = \left|\begin{matrix}x=-1\\y=2\end{matrix}\right| = (-1)2 + i((-1)^2+2^2) = -2 + i(5) = \underline{\underline{-2+5i}}$

b) $f(1) = \left|\begin{matrix}x=1\\y=0\end{matrix}\right| = 0 + i(1+0) = \underline{\underline{i}}$

c) $f(i) = \left|\begin{matrix}x=0\\y=1\end{matrix}\right| = 0 + i(0+1) = \underline{\underline{i}}$

6) Vypočtěte všechny hodnoty mnohoznačné fce $w(z) = \dfrac{\sqrt[3]{z}-1}{z}$ v bodě $z = 1+i$. 2DM

$w(1+i) = \dfrac{\sqrt[3]{1+i}-1}{1+i} =$

$\sqrt[3]{1+i} = \sqrt[6]{2}\left[\cos\dfrac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3} + i\sin\dfrac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{3}\right] = \begin{cases} k=0 & \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right) \\ k=1 & \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right) \\ k=2 & \sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12} + i\sin\frac{17\pi}{12}\right) \end{cases}$

$z = 1+i = \sqrt{2}\left[\cos\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right) + i\sin\left(\frac{\pi}{4}+2k\pi\right)\right]$

$|z| = \sqrt{2}$

$\left.\begin{matrix}\cos\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{2}\end{matrix}\right\}\varphi = \frac{\pi}{4}$

$=$ 1.) $\dfrac{\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{\pi}{12} + i\sin\frac{\pi}{12}\right)-1}{1+i}\cdot\dfrac{(1-i)}{(1-i)} = \dfrac{\overset{(0{,}08+0{,}28i)}{(1{,}08+0{,}29i-1)}(1-i)}{1-\underset{+1}{i^2}} = \dfrac{0{,}08-0{,}08i+0{,}28i-\overset{+0{,}28}{0{,}28i^2}}{2} =$

$= \dfrac{0{,}36+0{,}2i}{2} = \underline{\underline{0{,}18+0{,}1i}}$

⊝ 2| $\frac{\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4}+i\sin\frac{3\pi}{4}\right)-1}{1+i}\cdot\frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{(\overset{-1{,}79+0{,}79i}{-0{,}79+0{,}79i-1})(1-i)}{\underset{+1}{1-i^2}} = \frac{-1{,}79+1{,}79i+0{,}79i\overset{+0{,}79}{-0{,}79i^2}}{2}$ ⊝

⊝ $\frac{-1+2{,}58i}{2} = \underline{-0{,}5+1{,}29i}$

⊝ 3| $\frac{\sqrt[6]{2}\left(\cos\frac{17\pi}{12}+i\sin\frac{17\pi}{12}\right)-1}{1+i}\cdot\frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{(\overset{-1{,}29-1{,}08i}{-0{,}29-1{,}08i-1})(1-i)}{\underset{+1}{1-i^2}} = \frac{-1{,}29+1{,}29i-1{,}08i\overset{-1{,}08}{+1{,}08i^2}}{2}$ ⊝

⊝ $\frac{-2{,}37+0{,}21i}{2} = \underline{-1{,}19+0{,}11i}$

⑦ Určete $Re(f)$ a $Im(f)$ pro $f(z)$

$z = x+iy$

a) $f(z) = (z+i)^2$

$f(x+iy) = (x+iy+i)^2 = [x+i(y+1)]^2 = x^2+2x(y+1)i\overset{-(y+1)^2}{+i^2(y+1)^2}$

$Re(f) = x^2-(y+1)^2$

$Im(f) = 2x(y+1)$

b) $f(z) = e^{-iz} = e^{-i(x+iy)} = e^{-ix\overset{+y}{-i^2y}} = e^y\cdot e^{(-x)i} = e^y[\cos(-x)+i\sin(-x)]$ ⊝

⊝ $e^y\cos x - i e^y\sin x$

$Re(f) = e^y\cos x$

$Im(f) = -e^y\sin x$

⑧ Vypočtěte hlavní hodnoty výrazů

a) $e^{1+i\pi} = e\cdot e^{i\pi} = e(\overset{-1}{\cos\pi}+i\overset{0}{\sin\pi}) = \underline{-e}$

b) $e^{i\frac{\pi}{2}} = \overset{0}{\cos\frac{\pi}{2}}+i\overset{1}{\sin\frac{\pi}{2}} = \underline{i}$

c) $\ln(e^{i\frac{\pi}{3}}) = \overset{0}{\ln 1}+i\frac{\pi}{3} = i\frac{\pi}{3}$

d) $\ln(1+i) = \ln\sqrt{2}+i\frac{\pi}{4}$ $\left[1+i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right]$

e) $\ln(-1) = \overset{0}{\ln 1}+i\pi = i\pi$

f) $(-1)^i = e^{i\ln(-1)} = e^{i\cdot i\pi} = e^{\overset{-1}{i^2}\pi} = e^{-\pi} = \frac{1}{e^{\pi}}$

g) $(i)^i = e^{i\ln i} = e^{i(\overset{0}{\ln 1}+i\frac{\pi}{2})} = e^{i^2\frac{\pi}{2}} = e^{-\frac{\pi}{2}}$

h) $i^{\pi} = e^{\pi \ln i} = e^{\pi(\ln 1 + i\frac{\pi}{2})} = e^{i\frac{\pi^2}{2}} = \cos\frac{\pi^2}{2} + i\sin\frac{\pi^2}{2}$

i) $\cos(1+i) = \frac{1}{2}\left[e^{i(1+i)} + e^{-i(1+i)}\right] = \frac{1}{2}\left[e^{i-1} + e^{-i+1}\right] =$

$= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{i}}{e} + e^{-i}\cdot e\right] = \frac{1}{2}\left[\cdot\frac{1}{e}(\cos 1 + i\sin 1) + e(\cos(-1) + i\sin(-1))\right] =$

$\doteq \underline{0{,}83 - 0{,}99i}$

j) $\sin(-i) = \frac{1}{2i}\frac{i}{i}\left[e^{i(-i)} - e^{-i(-i)}\right] = \frac{i}{-2}\left[e^{-i^2} - e^{i^2}\right] = -\frac{i}{2}\left(e - \frac{1}{e}\right) = \underline{-1{,}18i}$

k) $\cosh(1-i) = \frac{1}{2}\left[e^{1-i} + e^{-1+i}\right] = \frac{1}{2}\left[e\cdot e^{-i} + e^{-1}\cdot e^{i}\right] = \frac{1}{2}\Big[e(\cos(-1) + i\sin(-1)) +$

$+ \frac{1}{e}(\cos 1 + i\sin 1)\Big] = \frac{1}{2}e\cos 1 - \frac{1}{2}ie\sin 1 + \frac{1}{2}e^{-1}\cos 1 + \frac{1}{2}e^{-1}i\sin 1 = \underline{0{,}83 - 0{,}99i}$

l) $\sinh(e^{i\pi}) = \sinh[\cos\pi + i\sin\pi] = \sinh(-1) =$

$= \frac{1}{2}\left[e^{-1} - e^{1}\right] = \underline{-1{,}18}$

(9) Zjistěte (CRP), na které oblasti jsou fce holomorfní a určete jejich derivace

a) $f(z) = \frac{1}{z}$ $\quad z = x + iy$

$f(x+iy) = \frac{1}{x+iy}\cdot\frac{x-iy}{x-iy} = \frac{x-iy}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - i\frac{y}{x^2+y^2}$ $\quad u(x,y) = \frac{x}{x^2+y^2}$ $\quad v(x,y) = -\frac{y}{x^2+y^2}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{x^2+y^2 - x(2x)}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ $\qquad \frac{\partial u}{\partial y} = \frac{0(x^2+y^2) - x\,2y}{(x^2+y^2)^2} = -\frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

$\frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{x^2+y^2-2y^2}{(x^2+y^2)^2} = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}$ $\qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{-2xy}{(x^2+y^2)^2} = \frac{2xy}{(x^2+y^2)^2}$

CRP platí $\forall z \in \mathbb{C}\setminus\{0\}$ fce $f(z) = \frac{1}{z}$ je H kromě 0 $\quad f'(z) = \left(\frac{1}{z}\right)' = -\frac{1}{z^2}, z \neq 0$

b) $f(z) = \mathrm{Im}(z)$ $\quad f(x+iy) = \mathrm{Im}(x+iy) = y$ $\quad u(x,y) = y$ $\quad v(x,y) = 0$

$\frac{\partial u}{\partial x} = 0$ $\quad \frac{\partial u}{\partial y} = 1$ $\quad \frac{\partial v}{\partial x} = 0$ $\quad \frac{\partial v}{\partial y} = 0$ $\qquad 1 \neq 0$

fce $f(z) = \mathrm{Im}(z)$ není H v žádném bodě $\Rightarrow f'(z) \nexists$

c) $f(z) = |z|$ $\qquad \{$není H; $f'(z) \nexists\}$

d) $f(z) = z^2$ $\qquad \{$je H $\forall z \in \mathbb{C}$; $f'(z) = 2z\}$

(10) Zjistěte oblast, kde je fce $f(z)=\frac{i}{z-i}$ holomorfní a vypočtěte $f'(2-i)$

$z=x+iy$

$$f(x+iy)=\frac{i}{x+iy-i}=\frac{i}{x+i(y-1)}\cdot\frac{x-i(y-1)}{x-i(y-1)}=\frac{(y-1)+ix}{x^2+(y-1)^2}$$

$$u(x,y)=\frac{y-1}{x^2+(y-1)^2} \qquad v(x,y)=\frac{x}{x^2+(y-1)^2}$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{-(y-1)2x}{(x^2+(y-1)^2)^2} \qquad \frac{\partial v}{\partial y}=\frac{-2x(y-1)}{(x^2+(y-1)^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y} \qquad x\neq 0 \wedge y\neq 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{x^2-(y-1)^2}{(x^2+(y-1)^2)^2} \qquad \frac{\partial v}{\partial x}=\frac{(y-1)^2-x^2}{(x^2+(y-1)^2)^2} \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x}$$

fce je H $\forall z\in\mathbb{C}\setminus\{i\}$

$$f'(2-i) \qquad f'(z)=\frac{-i}{(z-i)^2} \qquad f'(2-i)=\frac{-i}{(2-i-i)^2}=\frac{1}{8}$$

(11) Zjistěte z CRP, kde je $f(z)$ H a vypočtěte derivaci

a) $f(z)=z^3$ $[z\in\mathbb{C};\ 3z^2]$

b) $f(z)=\frac{1}{z-1}$ $\left[z\in\mathbb{C}\setminus\{1\};\ -\frac{1}{(z-1)^2}\right]$

c) $f(z)=\operatorname{Re} z$ [H není v žádném bodě]

d) $f(z)=z+\bar{z}$ [H —— " ——]

e) $f(z)=\cos z$ $[z\in\mathbb{C};\ -\sin z]$

(12) Najděte Hol. fci $f(z)$, která má při $z = x+iy$ reálnou část $u(x,y) = x^2 - y^2 + x$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2x + 1 = \frac{\partial v}{\partial y} \Rightarrow v(x,y) = \int (2x+1)\,dy = 2xy + y + C(x)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 2y + C'(x)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -2y \Rightarrow \cancel{2y} + C'(x) = \cancel{2y}$$

$$C'(x) = 0 \Rightarrow C(x) = \int 0\,dx = k$$

$$v(x,y) = 2xy + y + k$$

$$f(x+iy) = x^2 - y^2 + x + i(2xy + y + k) \qquad (x = z \wedge y = 0)$$

$$f(z) = z^2 - 0 + z + i(0 + 0 + k) = \underline{\underline{z^2 + z + ik}}$$

(13) Nalezněte H fci $f(z)$, která má při $z = x+iy$ imaginární část $v(x,y) = x + y - 3$ a $f(0) = -3i$

$$\frac{\partial v}{\partial y} = 1 = \frac{\partial u}{\partial x} \qquad u = \int 1\,dx = x + C(y)$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = C'(y)$$

$$\frac{\partial v}{\partial x} = 1 \Rightarrow C'(y) = -1$$

$$C(y) = \int -1\,dy = -y + k$$

$$u(x,y) = x - y + k \qquad (x = z \wedge y = 0)$$

$$f(z) = z - 0 + k + i(z + 0 - 3) = z + k + iz - 3i$$

$$f(0) = 0 + k + 0 - \cancel{3i} = -\cancel{3i} \Rightarrow k = 0$$

$$\underline{\underline{f(z) = z + iz - 3i}}$$

(14) Naleznite H fci $f(z)$, která má při $z = x+iy$ reálnou část

a) $u(x,y) = 6xy + 3x^2y - y^3$ a $f(0) = 5i$

$[\, f(z) = -iz^3 - 3iz^2 + 5i \,]$

b) $u(x,y) = x^2 - 2xy$ a $f(0) = 0$

$[\, \nexists \,]$

(15) Naleznite H fci $f(z)$, která má při $z = x+iy$ imaginární část

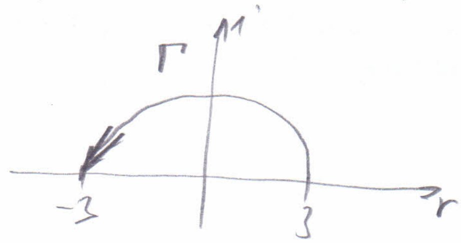
a) $v(x,y) = 9x^3y - 9xy^3 + 5x$ a $f(0) = 6$

$[\, f(z) = \frac{9}{4}x^4 - \frac{27}{2}x^2y^2 + \frac{9}{4}y^4 - 5y + 6 + i(9x^3y - 9xy^3 + 5x) =$
$= \frac{9}{4}z^4 + 5iz + 6 \,]$

b) $v(x,y) = 7xy^3 - 7x^3y - 8x$ a $f(0) = 3$

$[\, f(z) = -\frac{7}{4}x^4 + \frac{21}{2}x^2y^2 - \frac{7}{4}y^4 + 8y + 3 + i(7xy^3 - 7x^3y - 8x) =$
$= -\frac{7}{4}z^4 - 8iz + 3 \,]$

Př: $\int_\Gamma Re(z)\,dz$ Γ je horní půlkružnice z bodu 3 do -3



PRΓ: $z(t) = 3e^{it}$; $t \in \langle 0;\pi \rangle$

$z(t) = 3(\cos t + i\sin t)$; $t \in \langle 0;\pi \rangle$

$Re(z) = 3\cos t$

$dz = 3(-\sin t + i\cos t)\,dt$

$$\int_\Gamma Re(z)\,dz = \int_0^\pi 3\cos t \cdot (-3\sin t + 3i\cos t)\,dt = -9\underbrace{\int_0^\pi \cos t \cdot \sin t\,dt}_{I_1} + 9i\underbrace{\int_0^\pi \cos^2 t\,dt}_{I_2} \ominus$$

$$I_1 = \int \cos t \sin t\,dt = \frac{1}{2}\int 2\sin t\cos t\,dt = \frac{1}{2}\int \sin 2t\,dt = \frac{1}{2}\int \sin a \cdot \frac{1}{2}da = \frac{1}{4}\int \sin a\,da =$$

$2t = a$

$2dt = da$

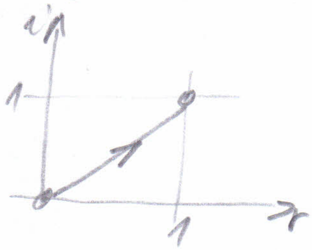
$dt = \frac{1}{2}da$

$$= -\frac{1}{4}\cos a + C = -\frac{1}{4}\cos 2t + C$$

$$I_2 = \int \cos^2 t\,dt = \int \frac{1+\cos 2t}{2}\,dt = \frac{1}{2}\left[t + \frac{1}{2}\sin 2t\right] + C = \frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t + C$$

$$\ominus -9\left[-\frac{1}{4}\cos 2t\right]_0^\pi + 9i\left[\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\sin 2t\right]_0^\pi = \frac{9}{4}\underbrace{[\overset{1}{\cos 2\pi} - \overset{1}{\cos 0}]}_{0} + 9i\left[\left(\frac{\pi}{2} + \frac{1}{4}\overset{0}{\sin 2\pi}\right) - \left(\frac{0}{2} + \frac{1}{4}\sin 0\right)\right] = 9i \cdot \frac{\pi}{2} = \underline{\underline{\frac{9}{2}\pi i}}$$

Př: $\int_\Gamma Im\, z\,dz$; Γ je úsečka z bodu 0 do bodu 1+i



PRΓ: $z(t) = 0 + (1+i-0)t = t + ti$; $t \in \langle 0;1 \rangle$

$Im\, z = t$

$dz = (1+i)\,dt$

$$\int_\Gamma Im(z)\,dz = \int_0^1 t \cdot (1+i)\,dt = \int_0^1 t\,dt + i\int_0^1 t\,dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + i\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i}}$$

Př: $\int_\Gamma \operatorname{Re} z \, dz$ Γ: oblouk paraboly z bodu 0 do bodu 1, který má par. rci $z(t)=t+it^2; t\in\langle 0;1\rangle$

PR Γ: $z(t)=t+it^2, t\in\langle 0;1\rangle$

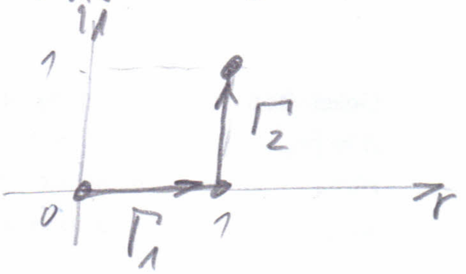
$\operatorname{Re} z = t$

$dz = (1+2it)\,dt$

$$\int_\Gamma \operatorname{Re} z\,dz = \int_0^1 t(1+2it)\,dt = \int_0^1 t\,dt + 2i\int_0^1 t^2 = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + 2i\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}+\frac{2}{3}i}}$$

Př: $\int_\Gamma \operatorname{Re} z\,dz$; Γ: lomená čára spojující body: 0; 1; 1+i

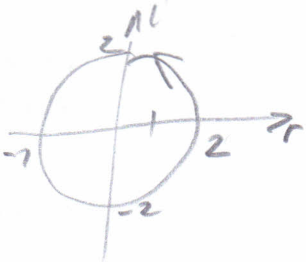
2 úsečky $\Gamma_1; \Gamma_2$



$\Gamma_1: z(t)=t \; ; t\in\langle 0;1\rangle \quad \operatorname{Re} z(t) = t \quad dz=dt$

$\Gamma_2: z(t)=1+it \; ; t\in\langle 0;1\rangle \quad \operatorname{Re} z(t) = 1 \quad dz = i\,dt$

$$\int_\Gamma \operatorname{Re}(z)\,dz = \int_0^1 t\,dt + i\int_0^1 dt = \left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 + i\left[t\right]_0^1 = \underline{\underline{\frac{1}{2}+i}}$$



Př: $\int_\Gamma |z|\cdot\bar{z}\,dz$ Γ: + OR kružnice $|z|=2$

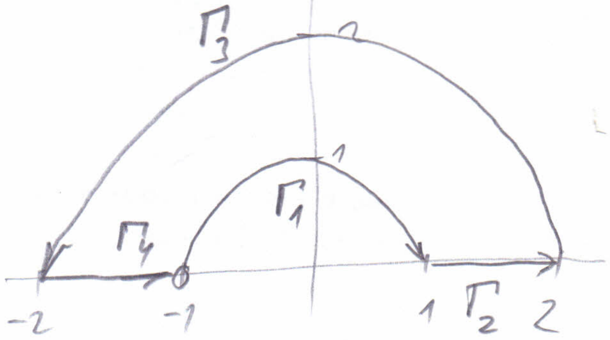
PR Γ: $z(t)=2e^{it}, t\in\langle 0;2\pi\rangle$

$|z|\bar{z} = 2\cdot 2e^{-it}$

$dz = 2ie^{it}\,dt$

$$\int_\Gamma |z|\bar{z}\,dz = \int_0^{2\pi} 4e^{-it}\cdot 2ie^{it}\,dt = 8i\int_0^{2\pi} dt = 8i\left[t\right]_0^{2\pi} = \underline{\underline{16\pi i}}$$

Př: $\int_\Gamma |z|\bar{z}\,dz$ Γ:



$\Gamma_1: \ z(t) = e^{it} \ ; t \in \langle 0; \pi \rangle \qquad |z|\cdot\bar{z} = 1e^{-it} \qquad dz = ie^{it}dt$

$$\int_{\Gamma_1} |z|\bar{z}\,dz = \int_{\pi}^{0} 1\cdot e^{-it}\cdot ie^{it}\,dt = i\int_{\pi}^{0} dt = i\,[t]_{\pi}^{0} = \underline{-\pi i}$$

$\Gamma_2: \ z(t) = t \ ; t \in \langle 1; 2 \rangle \qquad |z|\bar{z} = t\cdot t = t^2 \qquad dz = dt$

$$\int_{\Gamma_2} |z|\bar{z}\,dz = \int_{1}^{2} t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_1^2 = \frac{8}{3} - \frac{1}{3} = \underline{\frac{7}{3}}$$

$\Gamma_3: \ z(t) = 2e^{it} \ ; t \in \langle 0; \pi \rangle \qquad |z|\bar{z} = 2\cdot 2e^{-it} \qquad dz = 2ie^{it}dt$

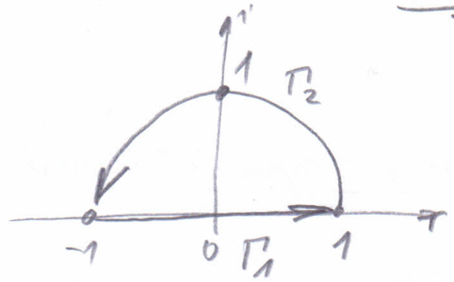
$$\int_{\Gamma_3} |z|\bar{z}\,dz = \int_{0}^{\pi} 4e^{-it}\cdot 2ie^{it}\,dt = 8i\int_{0}^{\pi} dt = \underline{8\pi i}$$

$\Gamma_4: \ z(t) = t \ ; t \in \langle -2; -1 \rangle \qquad |z|\bar{z} = t\cdot t = t^2 \qquad dz = dt$

$$\int_{\Gamma_4} |z|\bar{z}\,dz = \int_{-2}^{-1} t^2\,dt = \left[\frac{t^3}{3}\right]_{-2}^{-1} = \underline{\frac{7}{3}}$$

$$\int_{\Gamma} |z|\bar{z}\,dz = -\pi i + \frac{7}{3} + 8\pi i + \frac{7}{3} = \frac{14}{3} + 7\pi i = \underline{7\left(\frac{2}{3} + \pi i\right)}$$

Př: $\int_{\Gamma} \frac{z}{\bar{z}}\,dz \qquad \Gamma:$



$\Gamma_1: \ z(t) = t \ ; t \in (-1; 1) \qquad \frac{z}{\bar{z}} = \frac{t}{t} = 1 \qquad dz = dt$

$$\int_{\Gamma_1} \frac{z}{\bar{z}}\,dz = \int_{-1}^{1} dt = [t]_{-1}^{1} = (1-(-1)) = 2$$

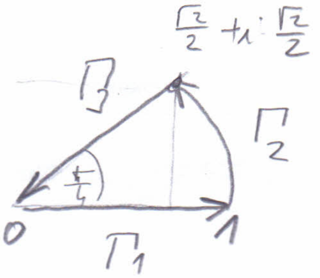
$\Gamma_2: \ z(t) = e^{it} \ ; t \in \langle 0; \pi \rangle \qquad \frac{z}{\bar{z}} = \frac{e^{it}}{e^{-it}} = e^{2it} \qquad dz = ie^{it}dt$

$$\int_{\Gamma_2} \frac{z}{\bar{z}}\,dz = \int_0^{\pi} e^{2it}\cdot i\cdot e^{it}\,dt = i\int_0^{\pi} e^{3it}\,dt = i\,\frac{1}{3i}\left[e^{3it}\right]_0^{\pi} = \frac{1}{3}\left[e^{3i\pi} - e^0\right] =$$

$$= \frac{1}{3}\left(\underbrace{\cos 3\pi}_{-1} + i\sin 3\pi - 1\right) = \frac{1}{3}(-1+0-1) = -\frac{2}{3}$$

$$\int_{\Gamma} \frac{z}{\bar{z}}\,dz = 2 - \frac{2}{3} = \underline{\underline{\frac{4}{3}}}$$

Pr: $\int_\Gamma \frac{\bar z}{z}\,dz$ $\quad\Gamma$:



Γ_1: $z = t;\ t\in\langle 0;1\rangle \quad \frac{\bar z}{z} = \frac{t}{t} = 1 \quad dz = 1\,dt$

$$\int_{\Gamma_1}\frac{\bar z}{z}\,dz = \int_0^1 dt = [t]_0^1 = 1$$

Γ_2: $z = e^{it};\ t\in\langle 0;\frac{\pi}{4}\rangle \quad \frac{\bar z}{z} = \frac{e^{-it}}{e^{it}} = e^{-2it} \quad dz = ie^{it}\,dt$

$$\int_{\Gamma_2}\frac{\bar z}{z}\,dz = \int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-2it}\cdot ie^{it}\,dt = i\int_0^{\frac{\pi}{4}} e^{-it}\,dt = \cancel{i}\left(-\frac{1}{\cancel{i}}\right)\left[e^{-it}\right]_0^{\frac{\pi}{4}} =$$

$$= -\left[e^{-i\frac{\pi}{4}} - 1\right] = -\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) + i\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) - 1\right] = 1 - \frac{\sqrt2}{2} + i\frac{\sqrt2}{2}$$

Γ_3: $z = 0 + \left(\frac{\sqrt2}{2} + i\frac{\sqrt2}{2} - 0\right)t = \frac{\sqrt2}{2}t + it\frac{\sqrt2}{2} = \frac{\sqrt2}{2}t(1+i) \quad ;t\in$

$$\frac{\bar z}{z} = \frac{\cancel{\frac{\sqrt2}{2}t}(1-i)}{\cancel{\frac{\sqrt2}{2}t}(1+i)} = \frac{1-i}{1+i}\cdot\frac{(1-i)}{(1-i)} = \frac{1-2i-1}{1+1} = \frac{-2i}{2} = -i \qquad dz = \frac{\sqrt2}{2}(1+i)\,dt$$

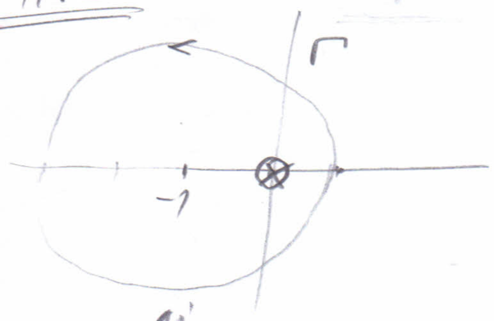
$$\int_{\Gamma_3}\frac{\bar z}{z}\,dz = \int_1^0 -i\,\frac{\sqrt2}{2}(1+i)\,dt = -i\frac{\sqrt2}{2}(1+i)\int_1^0 dt = \left(-i\frac{\sqrt2}{2} + \frac{\sqrt2}{2}\right)[t]_1^0 =$$

$$= \left(-i\frac{\sqrt2}{2} + \frac{\sqrt2}{2}\right)\cdot(0-1) = -\frac{\sqrt2}{2} + i\frac{\sqrt2}{2}$$

$$\int_\Gamma \frac{\bar z}{z}\,dz = 1 + 1 - \frac{\sqrt2}{2} + i\frac{\sqrt2}{2} - \frac{\sqrt2}{2} + i\frac{\sqrt2}{2} = \underline{\underline{2 - \sqrt2 + i\sqrt2}}$$

Pr: $\int \frac{e^{iz}}{z}\,dz \qquad \Gamma: |z+1| = 2 \quad +OR$

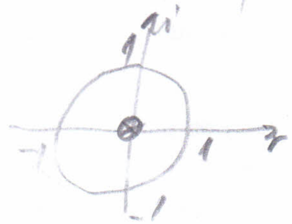
pól: $z_0 = 0 \in \Gamma$



$$\int \frac{e^{iz}}{z}\,dz = 2\pi i\left(e^{i\cdot 0}\right) = \underline{\underline{2\pi i}}$$

Pr: $\int_\Gamma \frac{\cos z}{z}\,dz \qquad \Gamma: |z| = 1 \quad +OR$

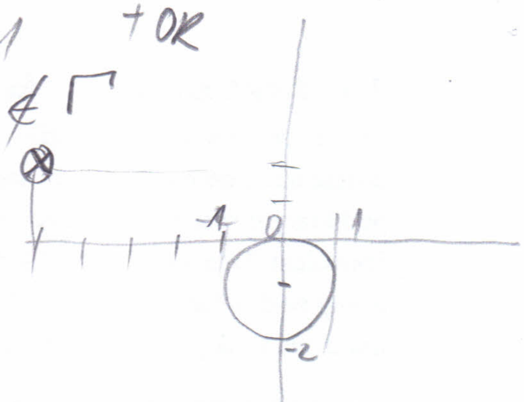
pól: $z_0 = 0 \in \Gamma$



$$\int_\Gamma \frac{\cos z}{z}\,dz = 2\pi i(\cos 0) = \underline{\underline{2\pi i}}$$

Př: $\int_\Gamma \frac{z^2}{z+5-2i}\,dz$ $\quad\Gamma: |z+i|=1$ $\;+OR$

pól $z_0=-5+2i \notin \Gamma$



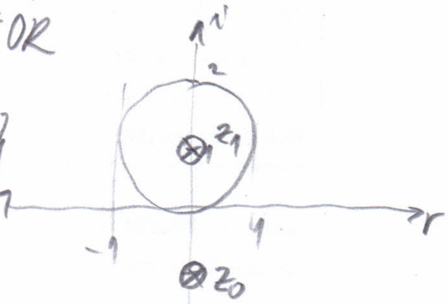
$$\int_\Gamma \frac{z^2}{z+5-2i}\,dz = \underline{\underline{0}}$$

Př: $\int_\Gamma \frac{dz}{z^2+1}$ $\quad\Gamma: |z-i|=1$ $\;+OR$

$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$ $\quad H$ v $\mathbb{C}\setminus\{-i;i\}$

póly: $z_0=-i \notin \Gamma$

$z_1 = i \in \Gamma$



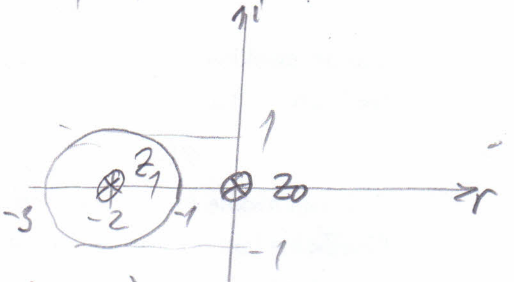
$$\int_\Gamma \frac{dz}{z^2+1} = \int \frac{dz}{(z+i)(z-i)} = \int \frac{\frac{1}{z+i}}{z-i}\,dz = 2\pi i\left(\frac{1}{i+i}\right) = 2\pi i\,\frac{1}{2i} = \underline{\underline{\pi}}$$

Př: $\int \frac{z^2+2z-1}{z(z+2)}\,dz$ $\quad\Gamma: |z+2|=1$ $\;+OR$

H na $\mathbb{C}\setminus\{0;-2\}$

póly: $z_0 = 0 \notin \Gamma$

$z_1 = -2 \in \Gamma$



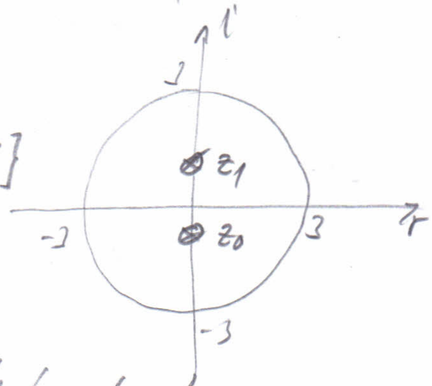
$$\int \frac{z^2+2z-1}{z(z+2)}\,dz = \int \frac{\frac{z^2+2z-1}{z}}{z+2}\,dz = 2\pi i\left(\frac{(-2)^2+2(-2)-1}{-2}\right) = 2\pi i\cdot\frac{1}{2} = \underline{\underline{\pi i}}$$

Př: $\int_\Gamma \frac{dz}{z^2+1}$ $\quad\Gamma: |z|=3$ $\;+OR$

$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)}$ $\quad H$ v $\mathbb{C}\setminus\{-i;i\}$

$z_0 = -i \in \Gamma$

$z_1 = i \in \Gamma$



$\Rightarrow$ nelze použít CV $\Rightarrow$ rozklad na parciální zlomky

$$\frac{1}{z^2+1} = \frac{1}{(z+i)(z-i)} = \frac{A}{z+i} + \frac{B}{z-i} = \frac{Az - Ai + Bz + Bi}{(z+i)(z-i)}$$

$$\Rightarrow \underline{1 = A(z-i) + B(z+i)} \qquad A = ai \quad B = bi \quad z = x+yi$$

$$1 = ai(x+yi-i) + bi(x+yi+i)$$

$$\underline{1 = axi - ay + a + bxi - by - b}$$

$$r:\ 1 = -ay + a - by - b$$

$$i:\ \underline{0 = ax + bx} \qquad 0 = x(a+b) \Leftrightarrow x = 0 \vee a+b = 0$$

když $a = -b \Rightarrow 1 = \cancel{by} - b - \cancel{by} - b$

$$1 = -2b \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \qquad A = \frac{1}{2}i$$

$$a = \frac{1}{2} \qquad B = -\frac{1}{2}i$$

$$\int_\Gamma \frac{dz}{z^2+1} = \int_\Gamma \frac{dz}{(z-i)(z+i)} = \frac{1}{2}i \int_\Gamma \frac{1}{z+i}\,dz - \frac{1}{2}i \int_\Gamma \frac{1}{z-i}\,dz = \frac{1}{2}i \cdot 2\pi i \cdot 1 - \frac{1}{2}i\,2\pi i \cdot 1$$

$$= -\pi + \pi = \underline{\underline{0}}$$