



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

*Vytvořeno v rámci projektu Rozvoj kvality vzdělávání, hodnocení
a strategického řízení na Univerzitě Pardubice, reg. č.
CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002320*

Numerické řešení diferenciálních rovnic

poznámky k přednáškám

$$y' = f(x; y); x \in \langle a; b \rangle$$

$$\Rightarrow y = f(x); y = y(x_0) \Rightarrow \text{počáteční podmínka}$$

→ Lipschmitova podmínka ($\exists$ a jedinečnost řešení)

Existuje-li taková hodnota L , kde $\forall x \in \langle a; b \rangle \forall u, v \in R$ platí:

$$|f(x; u) - f(x; v)| \leq L|u - v|, \text{ pak } \exists \text{ jediné řešení rovnice } y = y(x_0)$$

$$\rightarrow \text{zobecnění: } \vec{y}' = f(\vec{y}; x) \quad \vec{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_i \end{pmatrix}; y_i = y_i(x)$$

→ Princip numerických metod

Síťová metoda (uzly $x_0 (=a), \dots, x_n (=b)$)

<obrázek>

-v každém toku sítě najdeme aproximaci x

- y_0 – je první bod sítě (známe x_0)

<graf>

$$y_{i+1} = y_i + \Delta y_i = y_i + h; S(x_i; y_i; h)$$

-chyba Δy narůstá a) lokální - v daném kroku

b) globální - kumulace z předchozích kroků

$\Rightarrow$ síťová metoda dává nejpresnější řešení v okolí počátečního bodu $\langle a; b \rangle$

1. Eulerova metoda

<graf>

Př $\rightarrow$ aproximace integrální křivky (PL)

$$[x_0; y_0]; [x_1; y_1]; \dots; [x_n; y_n]$$

$\rightarrow$ směrnice úsečky = tečna k_1 invertní křivce v bodě $[x_i; y_i]$

$$k_i = S(x_i; y_i; h) = y'(x_i) = f(x_i; y_i)$$

$$\Rightarrow y_{i+1} = y_i + h \cdot y'(x_i) + \frac{h^2}{2} \cdot y''(\xi) \text{ odhad chyby z TP zanedbáváme}$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot S(x_i; y_i; h) \Rightarrow y_1 = y_0 + h \cdot f(x_0; y_0)$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f(x_1; y_1)$$

$$y_n = y_{n-1} + h \cdot f(x_{n-1}; y_{n-1})$$

$$y' = f(x; y) \quad y(x_0) = y_0$$

2. Modifikovaná Eulerova metoda <graf>

→ odhad provedený obdélníkovou metodou na $\langle x_i; x_{i+1} \rangle$

$$y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x) dx = h \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} \cdot f\left(x_i + \frac{h}{2}\right)\right)$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot f\left[x_i + \frac{h}{2}; y_i + \frac{h}{2} \cdot f(x_i; y_i)\right]$$

$$y_1 = y_0 + h \cdot f\left[x_0 + \frac{h}{2}; y_0 + \frac{h}{2} \cdot f(x_0; y_0)\right]$$

$$y_2 = y_1 + h \cdot f\left[x_1 + \frac{h}{2}; y_1 + \frac{h}{2} \cdot f(x_1; y_1)\right]$$

3. Euler-Cauchyova metoda <graf>

→ odhad provedený lichoběžníkovou metodou

$$y_{i+1} - y_i = \int_{x_i}^{x_{i+1}} y'(x) dx = \frac{h}{2} \cdot [f(x_i; y_i) + f(x_i + h; y(x_i + h))]$$

$$y(x_i + h) = y(x_i) + h \cdot y'(x_i) = y(x_i) + h \cdot f(x_i; y_i)$$

$$y_{i+1} - y_i = \frac{h}{2} \cdot [f(x_i; y_i) + f(x_i + h; y_i + h \cdot f(x_i; y_i))]$$

$$y_{i+1} = y_i + \frac{h}{2} \cdot [f(x_i; y_i) + f(x_i + h; y_i + h \cdot f(x_i; y_i))]$$

$$y_1 = y_0 + \frac{h}{2} \cdot [f(x_0; y_0) + f(x_0 + h; y_0 + h \cdot f(x_0; y_0))]$$

$$y_2 = y_1 + \frac{h}{2} \cdot [f(x_1; y_1) + f(x_1 + h; y_1 + h \cdot f(x_1; y_1))]$$

4. Metoda Runge-Kutta (Matlab)

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot S(x_i; y_i); S(x_i; y_i) = \gamma_1 \cdot k_1 + \gamma_2 \cdot k_2 + \dots + \gamma_r \cdot k_r$$

$$k_1 = f(x_i; y_i)$$

$$k_2 = f(x_i + \alpha_2 \cdot h; y_i + \beta_2 \cdot k_1)$$

S...směrová funkce pro jednokrokové metody vyšších řádů → získáme-li jako kombinaci různých směrnic $k_1, k_2 \dots k_r$

γ_i ...řákový součinitel (z MNO)

α, β ...činitelé, jsou dány s ohledem na velikost r

R-K 4.řádu: $k_1 = f(x_i; y_i)$

$$k_2 = f\left[x_i + \frac{h}{2}; y_i + h \cdot \frac{k_1}{2}\right]$$

$$k_3 = f\left[x_i + \frac{h}{2}; y_i + h \cdot \frac{k_2}{2}\right]$$

$$k_4 = f\left[x_i + h; y_i + h \cdot k_3\right]$$

$$S = \frac{1}{6} \cdot (k_1 + 2 \cdot k_2 + 2 \cdot k_3 + k_4)$$

$$y_{i+1} = y_i + h \cdot S$$

Numerické řešení soustav ODR1.Ř

$$\text{Maticový zápis: } \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$

Eulerova metoda:

$$\overrightarrow{y_{(i+1)}} = \overrightarrow{y_{(i)}} + h \cdot \vec{f}(x_i; y_i)$$

$$\text{Rozepíšeme: } y_{1(i+1)} = y_{1(i)} + h \cdot f_1(x_i; y_{1(i)}; y_{2(i)})$$

$$\text{Pouze 2 rovnice: } y_{2(i+1)} = y_{2(i)} + h \cdot f_2(x_i; y_{1(i)}; y_{2(i)})$$

Převod LODR2.Ř na soustavu ODR1.Ř

Př: a)

$$y'' + 2 \cdot y' - y = 0$$

$$(y = y_1)' \rightarrow y' = y_1' = y_2$$

$$(y = y_2)' \rightarrow y'' = y_2'$$

$$\text{DOZ: } y_2' + 2 \cdot y_2 - y_1 = 0$$

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = -y_1 - 2 \cdot y_2$$

$$\text{Maticově: } \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$\text{b) } y'' + 2 \cdot y' - y = f(x)$$

$$\text{DOZ: } y_2' + 2 \cdot y_2 - y_1 = f(x)$$

$$y_1' = y_2$$

$$y_2' = -y_1 - 2 \cdot y_2 + f(x)$$

$$\text{Maticově: } \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ f(x) \end{pmatrix}$$