EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Vytvořeno v rámci projektu Rozvoj kvality vzdělávání, hodnocení a strategického řízení na Univerzitě Pardubice, reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002320

Numerická integrace

poznámky k přednáškám

Numerická integrace

Neznáme explicitní tvar funkce

Známe ho, ale je složitý

Přibližný výpočet integrálu

Metody jsou založeny na nahrazení funkce interpolačním polynomem

Obecná formulace úlohy

$$\int_a^b f(x)\,dx\,; a < b \in \mathbb{R}$$

Newton-Cotesovy kvadratické vzorce uzavřeného typu – uzly – krajní body

Newton-Cotesovy kvadratické vzorce otevřeného typu – uzly – středy

Newton-Cotesovy kvadratické vzorce (NCKV) uzavřeného typu

$\langle a; b\rangle$ rozdělen na ekvidistantní uzly

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

$$hr = \frac{b-a}{n}$$

Na každém intervalu $\langle x_{i-1}; x_i\rangle, i = 1; \dots; n$ nahradíme integrant Lagrangeovým interpolačním polynomem (LIP) stupně *k*

$$L_{i,k}\colon \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_{i,k}(x)\,dx$$

Jednoduchý NCKV stupně *k*

Pak na malém intervalu $\langle a; b\rangle$ platí složený NCKV

$$\int_a^b f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx \approx \sum_{i=1}^{n} \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_{i,k}(x)dx$$

Stanovení chyby $R_k(f)$ na $\langle x_{i-1}; x_i\rangle$

$$R_{1,k}(f) = \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)\,dx - \int_{x_{i-1}}^{x_i} L_{i,k}(x)dx = \int_{x_{i-1}}^{x_i} \frac{f^{(k+1)}(\eta_i)}{(k+1)!}(x-t_0)\dots(x-t_k)dx$$

t_k vnitřní uzly ke konstrukci LIP

$f^{(k+1)}(\eta_i)$ odhadujeme $M = \max_{x\in\langle a;b\rangle}\left|f^{(k)}(x)\right|$

Obdélníková metoda (*k* = 0) NCKV

$f(x)$ nahradíme na každém podintervalu polynomem nultého stupně (konstantou)

na $\langle x_{i-1}; x_i\rangle$ $f(x) \curvearrowright L_{i,0} = f(x_{i-1})$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \approx \int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})dx = f(x_{i-1})\cdot[x]_{x_{i-1}}^{x_i} = f(x_{i-1})$$

na $\langle a; b\rangle$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} L_{i,0}(x)dx = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x_{i-1})dx = h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) = h(f_0 + f_1 + \cdots + f_{n-1})$$

složené obdélníkové pravidlo

Chyba

$$R_0(f) = \int_a^b f(x)dx - h\sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1}) = \sum_{i=1}^{n}\int_{x_{i-1}}^{x_i}\frac{f'(\eta)}{1!}(x-x_{i-1})dx = \sum_{i=1}^{n}\frac{f'(\eta)}{1!}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_{i-1})dx$$

$$= \left|\begin{matrix}\text{substituce } h = \dfrac{b-a}{n} \\ x = x_{i-1} + th;\ t \in \langle 0; 1\rangle \\ dx = h\,dt\end{matrix}\right| = \sum_{i=1}^{n} M_i\frac{h^2}{2}$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x-x_{i-1})dx = \int_0^1 th\cdot h\,dt = h^2\int_0^1 t\,dt = h^2\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{1}{2}h^2$$

$$x - x_{i-1} = th$$

$$dx = h\,dt$$

$$\text{pro } x = x_{i-1}: 0 = th \to t = 0$$

$$\text{pro } x = x_i: \underbrace{x_i - x_{i-1}}_{h} = th$$

$$h = th$$

$$h - th = 0$$

$$h(1-t) = 0 \rightarrow t = 1$$

na $\langle a; b \rangle$ $|R_0(f)| \leq M_1 \cdot \frac{h^2}{2} \cdot n = M_1 \cdot \frac{(b-a)^2}{2n}$

$$M_1 = \max_{x \in \langle a; b \rangle} |f'(x)|$$

Příklad: {přesná hodnota: $[-\cos x]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\cos\frac{\pi}{2} + \cos 0 = 0 + 1 = \underline{\underline{1}}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx$$

x	$\sin x$
0	0
$\frac{\pi}{8}$	$0{,}3827$
$\frac{\pi}{4}$	$0{,}7071$
$\frac{3\pi}{8}$	$0{,}9239$
$\frac{\pi}{2}$	1

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \, dx \doteq \frac{\pi}{8}(0 + 0{,}3827 + 0{,}7071 + 0{,}9239) \doteq 0{,}7884$$

Odhad chyby:

$$M_1 \cdot \frac{\left(\frac{\pi}{2} - 0\right)^2}{2 \cdot 4} = 1 \frac{\left(\frac{\pi}{2}\right)^2}{8} = \frac{\pi^2}{4} \cdot \frac{1}{8} = \frac{\pi^2}{32} \doteq 0{,}3084$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = \cos x \rightarrow \max \text{ na } \langle 0; \frac{\pi}{2} \rangle \text{ je } 1$$

[=> přesná hodnota leží v (0,7884 ± 0,3084)]

Lichoběžníková metoda (NCKV 1. stupně)

Nahrazujeme v každém $\langle x_{i-1}; x_i \rangle, i = 1; \ldots; n \; f(x)$

$$L_{i,1}(x) = f(x_{i-1}) \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + f(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}; i = 1; \ldots; n$$

na $x \in \langle x_{i-1}; x_i \rangle$

$$L_{i,1}(x); h = x_i - x_{i-1}$$

$$\left.\begin{matrix}[x_{i-1}; f(x_{i-1})]\\ [x_i; f(x_i)]\end{matrix}\right\} L_{i,1}(x) = f(x_{i-1}) \cdot \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + f(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}}$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x)dx \doteq \int_{x_{i-1}}^{x_i} \left[f(x_{i-1}) \frac{x - x_i}{x_{i-1} - x_i} + f(x_i) \frac{x - x_{i-1}}{x_i - x_{i-1}} \right] dx$$

$$= \frac{f(x_{i-1})}{\underbrace{x_{i-1} - x_i}_{-h}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_i)dx + \frac{f(x_i)}{\underbrace{x_i - x_{i-1}}_{h}} \int_{x_{i-1}}^{x_i} (x - x_{i-1})dx$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{substituce: } x = x_{i-1} + th; t \in \langle 0; 1 \rangle \\ dx = h\,dt \\ \text{pro } x = x_{i-1}: x_{i-1} = x_{i-1} + th \Rightarrow t = 0 \\ \text{pro } x = x_i: x_i = x_{i-1} + th \\ x_i - x_{i-1} = th \\ h = th \\ h(1 - t) = 0 \Rightarrow t = 0 \end{matrix} \right|$$

$$= \left| \begin{matrix} \text{pro chybu: } \oplus \\ x - x_{i-1} = x_{i-1} + th - x_{i-1} \\ x - x_i = x_{i-1} + th - x_i = th - h = h(t - 1) \end{matrix} \right|$$

$$= -\frac{f(x_{i-1})}{h} \int_0^1 (x_{i-1} + th - x_i)h\,dt + \frac{f(x_i)}{h} \int_0^1 (x_{i-1} + th - x_{i-1})h\,dt$$

$$= -\frac{f(x_{i-1})}{h} \int_0^1 \big(h(t - 1)\big)h\,dt + \frac{f(x_i)}{h} \int_0^1 (th)h\,dt$$

$$= -\frac{f(x_{i-1})}{h} \cdot h^2 \int_0^1 (t - 1)dt + \frac{f(x_i)}{h} h^2 \int_0^1 t\,dt$$

$$= -hf(x_{i-1}) \left[\frac{t^2}{2} - t \right]_0^1 + hf(x_i) \left[\frac{t^2}{2} \right]_0^1$$

$$= -hf(x_{i-1}) \left[\left(\frac{1}{2} - 1 \right) - (0 - 0) \right] + hf(x_i) \left[\frac{1}{2} - \frac{0}{2} \right] = \frac{h}{2} f(x_{i-1}) + \frac{h}{2} f(x_i)$$

$$= \frac{h}{2} [f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

na $\langle a; b \rangle$

$$\int_a^b f(x)dx \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{h}{2}[f(x_{i-1}) + f(x_i)]$$

$$= \frac{h}{2}\{{}_{i=1}[f(x_0) + f(x_1)] + {}_{i=2}[f(x_1) + f(x_2)] + \cdots + {}_{i=n-1}[f(x_{n-2}) + f(x_{n-1})]$$

$$+ {}_{i=n}[f(x_{n-1}) + f(x_n)]\} = \frac{h}{2}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=2}^{n-1} f(x_i) + f(x_n)\right]$$

$$= \frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=2}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right]$$

Odhad chyby:

$$R_{i,1}(f) = \frac{f''(\eta)}{2!}\int_{x_{i-1}}^{x_i}(x - x_{i-1})(x - x_i)dx = |\text{stejná substituce}| = \frac{f''(\eta)}{2}\int_0^1 th \cdot h(t-1)h\,dt \quad \oplus$$

$$= \frac{f''(\eta)}{2} \cdot h^3 \int_0^1 (t^2 - t)dt = \frac{f''(\eta)}{2} h^3 \left[\frac{t^3}{3} - \frac{t^2}{2}\right]_0^1 = \frac{f''(\eta)}{2} h^3 \left[\frac{1}{3} - \frac{1}{2}\right]$$

$$= -\frac{1}{12} h^3 f''(\eta) = -\frac{1}{12} h^3 M_2$$

$$|R_1(f)| \le n \cdot \frac{1}{12} h^3 M_2 = \frac{n \cdot M_2}{12} \frac{(b-a)^3}{n^3} = \frac{M_2}{12n^2}(b-a)^3;\ M_2 = \max_{x \in \langle a;b \rangle} |f''(x)|$$

Příklad:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx$$

x	$\sin x$
0	0
$\frac{\pi}{8}$	0,3827
$\frac{\pi}{4}$	0,7071
$\frac{3\pi}{8}$	0,9239
$\frac{\pi}{2}$	1

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x\,dx \doteq \frac{\frac{\pi}{8}}{2}(0 + 2(0{,}3827 + 0{,}7071 + 0{,}9239) + 1) \doteq 0{,}9871$$

Odhad chyby:

$$\frac{M_2}{12n^2}(b-a)^3 = \frac{M_2}{12 \cdot 4^2} \cdot \left(\frac{\pi}{2} - 0\right)^3 = \frac{1}{12 \cdot 16} \cdot \frac{\pi^3}{8} = \frac{\pi^3}{1536} \doteq 0{,}0202$$

$$f(x) = \sin x$$

$$f'(x) = |\cos x|$$

$$f''(x) = |-\sin x| \Rightarrow M_2 = 1$$

[=> přesná hodnota leží v (0,9871 ± 0,0202)]

Souhrn NCKV *k*-tého stupně

k	Název	Jednoduché	Složené	Chyba
0	Obdélníková metoda	$h \cdot f(x_{i-1})$	$h \sum_{i=1}^{n} f(x_{i-1})$	$M_1 \cdot \frac{b-a}{2n}$ $M_1 = \max_{x \in \langle a;b \rangle} \lvert f'(x) \rvert$
1	Lichoběžníková metoda	$\frac{h}{2}\big(f(x_{i-1}) + f(x_i)\big)$	$\frac{h}{2}\left[f(a) + 2\sum_{i=2}^{n-1} f(x_i) + f(b)\right]$	$\frac{M_2}{12n^2}(b-a)^3$ $M_2 = \max_{x \in \langle a;b \rangle} \lvert f''(x) \rvert$
2	Simpsonova metoda	$\frac{h}{3}\big(f(x_{i-1}) + 4f(s) + f(x_i)\big)$ s střed $x_{i-1} - x_i$	$\frac{h}{3}\left[f(x_0) + 2\sum_{i=1}^{n-1} f(x_{2i}) + 4\sum_{i=1}^{n} f(x_{2i-1}) + f(x_{2n})\right]$	$\frac{M_4}{2880n^4}(b-a)^5$ $M_4 = \max_{x \in \langle a;b \rangle} \lvert f^{IV}(x) \rvert$