



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ,
MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

*Vytvořeno v rámci projektu Rozvoj kvality vzdělávání, hodnocení
a strategického řízení na Univerzitě Pardubice, reg. č.
CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002320*

Numerické řešení soustav lineárních rovnic

poznámky k přednáškám

Výpočet vlastních čísel matic

hledáme λ , které je řešením maticové rce:

$$Ax = \lambda x$$

A... čtvercová, řádu N

λ ... vl. číslo matice A

x... vl. vektor matice A

spektrum matice A .. množina všech vl. čísel

E... jednotková matice

$$Ax - \lambda x = 0$$

$$(A - \lambda E)x = 0$$

homogenní soustava rovnic – determinant $|A - \lambda E| = 0$

určením tohoto determinantu dostaneme polynom p (λ) stupně n – charakteristický polynom

charakteristická rce $p(\lambda) = 0$ – kořeny λ ... vlastní čísla A

$$\text{Př. } A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -3 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\text{charakter. rce: } \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -3 & 1 \\ 1 & -2 - \lambda & 1 \\ 1 & -3 & 2 - \lambda \end{vmatrix}$$

$$\text{sarrusovo pravidlo: } (2 - \lambda)(-2 - \lambda)(2 - \lambda) - 3 - 3 - 2 - \lambda + 3(2 - \lambda) + 3(2 - \lambda) = 0$$

$$(-4 - 2\lambda + 2\lambda + \lambda^2)(2 - \lambda) - 6 + 2 + \lambda + 6(2 - \lambda) = 0$$

$$-8 + 4\lambda + 2\lambda^2 - \lambda^3 - 6 + 2 + \lambda + 12 - 6\lambda = 0$$

$$-\lambda^3 + 2\lambda^2 - \lambda = 0$$

$$\lambda^3 - 2\lambda^2 + \lambda = 0$$

$$\lambda(\lambda^2 - 2\lambda + 1) = 0$$

$$\lambda(\lambda - 1)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0 \quad \lambda_{23} = 1 \quad \text{spektrum } \{0; 1\}$$

vlastní vektor příslušný vl. číslu $\lambda_1=0$

$$\begin{pmatrix} 2-0 & -3 & 1 \\ 1 & -2-0 & 1 \\ 1 & -3 & 2-0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$> \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1|0 \\ 1 & -2 & 1|0 \\ 1 & -3 & 2|0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1|0 \\ 0 & 1 & -1|0 \\ 0 & 3 & -3|0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1|0 \\ 0 & 1 & -1|0 \\ 0 & 0 & 0|0 \end{pmatrix}$$

volíme: $x_3 = t$

$$x_2 - t = 0 \rightarrow x_2 = t$$

$$2x_1 - 3t + t = 0 \rightarrow x_1 = t$$

vektor: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ t \\ t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, vlastní vektor pro $\lambda_1 = 0$

vl. vektor příslušný vl. číslem $\lambda_{23} = 0$

$$\begin{pmatrix} 2-1 & -3 & 1 \\ 1 & -2-1 & 1 \\ 1 & -3 & 2-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1|0 \\ 1 & -3 & 1|0 \\ 1 & -3 & 1|0 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 & 1|0 \\ 0 & 0 & 0|0 \\ 0 & 0 & 0|0 \end{pmatrix}$$

volím: $x_3 = s$

$$x_2 = t$$

$$x_1 = 3t - s$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3t - s \\ t \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} t + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} s$$

volím: $t = s = 1$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \text{ vlastní vektor pro } \lambda_{23} = 1$$

NUMERICKÉ ŘEŠENÍ SOUSTAV LIN. ROVNIC

- nejdůležitější kapitola → diskretizace → linearizace

$$A_{\mathbf{x}} = \mathbf{b} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1N} \\ a_{M1} & \dots & a_{MN} \end{pmatrix} \quad \mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_M \end{pmatrix} \quad \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$$

Řešitelnost → Frobeniova věta $h(A) = n$ Regulární matice $\exists!$ řešení

$$h(A) < n \quad \infty \text{ řešení, parametrické}$$

$$h(A) \neq h(A|\mathbf{b}) \quad 0 \text{ řešení}$$

→ 2 hlavní skupiny řešení:

Přímé metody → transformace matice soustavy na Δ matici

(pro plné matice) → LK rozklad, GEM, GEM – JORDANOVA MODIFIKACE

Iterační metody → limita posloupnosti vektorů

(pro řídké matice) → metody: Jacobiho, Gauss- Seidelova, největšího spádu, gradientní, relaxační ...

→ Cramerovo pravidlo → $x = \frac{Dx_1}{D}; \dots; \frac{Dx_N}{D}$ → pro velké soustavy výpočtově náročné

→ špatně podmíněné

PŘÍMÉ METODY

METODA L-U ROZKLADU

Princip: rozklad matice A na součin dvou Δ matic $A = L \cdot U$

Matice L – všechny prvky čtvercové matice leží nad hl. diag = 0

U - pod hl. diag = 0

$$Ax = b \quad A = L \cdot U$$

$$Lux = b \quad \text{Nejdříve řešíme: } Ly = b \quad y \dots \text{ pomocný vektor mat.}$$

$$ux = y \quad \text{poté} \quad u \cdot x = y$$

- uplatnění zejména, řešíme-li více systémů se stejnou maticí A

→ Post. Podmínky pro LUR

→ pro každou čtvercovou matici A, které má všechny hlavní subdeterminanty různé od 0

$\exists$ matice L a U, tak že platí $A = L \cdot U$

→ LUR rozklad je dán jednoznačně → 1. diag. Prvky matice L jsou 1 (Doolittlův rozklad)

→ 2. diag. Prvky matice U jsou 1 (Croutův rozklad)

$$\begin{array}{l} \text{Př: } 2x_1 + x_2 = 3 \\ 6x_1 + 6x_2 - 2x_3 = 5 \\ 4x_1 + 14x_2 - 7x_3 = -5 \end{array} \quad \text{Maticově} \quad \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & -2 \\ 4 & 14 & -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & -2 \\ 4 & 14 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} u_{11} & u_{12} & u_{13} \\ 0 & u_{22} & u_{23} \\ 0 & 0 & u_{33} \end{pmatrix}$$

a) DOOLITTLE $l_{11} = l_{22} = l_{33} = 1$

b) CROUT $u_{11} + u_{22} + u_{33} = 1$

aplikujeme Doolittla

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 6 & 6 & -2 \\ 4 & 14 & -7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$2 = u_{11} \quad 6 = 2l_{21} \Rightarrow l_{21} = 3$$

$$4 = 2l_{31} \Rightarrow l_{31} = 2$$

$$1 = u_{12} \quad 6 = 3 + u_{12} \Rightarrow u_{12} = 3$$

$$14 = 2 + 3l_{32} \Rightarrow l_{32} = 4$$

$$0 = u_{13} \quad -2 = 0 + u_{23} \Rightarrow u_{23} = -2$$

$$-7 = 0 - 8 + u_{33} \Rightarrow u_{33} = 1$$

$$L \cdot y = b$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$y_1 = 3$$

$$3 \cdot 3 + y_2 = 5 \Rightarrow y_2 = -4$$

přímá substituce

$$2 \cdot 3 + 4 \cdot (-4) + y_3 = -5 \Rightarrow y_3 = 5$$

$$u \cdot x = y$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$x_3 = 5$$

$$3x_2 - 2 \cdot 5 = -4 \Rightarrow x_2 = 2$$

$$2x_1 + 2 + 0 = 3 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$$

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

ITERAČNÍ METODY (IM)

NORMA VEKTORU: $\|\vec{a}\|_1 = \sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ Euklidova norma

$$\vec{a} = (a_1; a_2; a_3) \quad \|\vec{a}\|_2 = \max(|a_1|; \dots; |a_n|)$$

$$\|\vec{a}\|_3 = |a_1| + \dots + |a_3|$$

NORMY MATIC

$$A \quad \|A\|_1 = \sqrt{\lambda_0} \quad x_0 = \max(\lambda_1; \dots; \lambda_n) \quad \text{Spektrální NORMA}$$

$$\|A\|_2 = \max_j (\sum (a_{ij})) \quad \text{Sloupcová norma}$$

$$\|A\|_3 = \max_i (\sum (a_{ij})) \quad \text{Řádková norma}$$

$$\text{Spektrální poloměr matice } S(A) = \max(|\lambda_1|; |\lambda_2|; \dots; |\lambda_n|)$$

$$IM \rightarrow Ax = b \rightarrow \text{zastáváme slib. aproximaci } x^{(0)} \rightarrow x$$

$$\rightarrow x = Hx + k; \quad x^{(k)} = H \cdot x^{(k-1)} + k$$

$$\text{JACOBIHO METODA} \quad A \text{ regulární, diagonálně dominantní } (a_{ij}) > \sum_{i \neq j} (a_{ij})$$

$$A = D + L + U$$

$$D \text{ diagonální}$$

$$L \text{ dolní matice}$$

$$u \text{ horní matice}$$

$$(D + L + U) \cdot x = b$$

$$Dx = -(L + U)x + b$$

$$x = -D^{-1}(L + U) \cdot x + D^{-1} \cdot b$$

Př

Metoda pos. aproximací

$$10x_1 + x_2 = 11 \Rightarrow x_1 = 1,1 - 0,1x_2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0,1 \\ -0,1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,1 \\ -0,3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + 10 = -9 \Rightarrow x_2 = -0,9 - 0,1x_1$$

GAUSS-SAIDLOVA METODA

(HODNOTA POSTUPNÝCH OPRAV)

A: Symetrická, pozitivně definitní

$$(D + L + u)x = b$$

$$(D + L)x + ux = b$$

$$(D + L) \cdot x = b - u \cdot x \quad / \cdot (D + L)^{-1}$$

$$x = (D + L)^{-1} \cdot b - (D + L)^{-1} \cdot u \cdot x$$

Př:

$$10x_1 + x_2 = 11 \Rightarrow x_1 = 1,1 - 0,1x_2$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -0,1 \\ -0,1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,1 \\ -0,3 \end{pmatrix}$$

$$x_1 + 10 = -9 \Rightarrow x_2 = -0,9 - 0,1x_1$$

pro výpočet tohoto už využívám x_1 z této aproximace (ne z minulé)

$$\Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^{kM} = \begin{pmatrix} 0 & -0,1 \\ -0,1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}^k + \begin{pmatrix} 0 & -0,1 \\ -0,1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1,1 \\ -0,3 \end{pmatrix}$$

Protože x_1 už znám z $2k + 1$ *iterace*

Nemůžeme obecně říct, která metoda konverguje rychleji