

Fourierovy Řady

- Joseph Fourier (1768-1830) řešil problematiku vedení tepla a potřeboval vyjádřit funkci $f(x)$ jako nekonečnou řadu sinů a kosinů

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) =$$

$$= a_0 + a_1 \cos x + b_1 \sin x + a_2 \cos 2x + b_2 \sin 2x + a_3 \cos 3x + b_3 \sin 3x + \dots \quad (1)$$

- Dříve už Daniel Bernoulli a Leonard Euler používali tuto řadu při zkoumání problému kmitání struny a v astronomii
- Řada v rovnici (1) se nazývá Trigonometrická Řada (TŘ) nebo Fourierova řada
- Vyjádření funkce ve tvaru TŘ je v některých aplikacích vhodnější než Taylorova mocninná řada (hlavně v případech periodických jevů – kmitání apod.)
- Začínáme předpokladem, že TŘ konverguje a spojitá funkce $f(x)$ je jejím součtem na intervalu $\langle -\pi; \pi \rangle$ tak, že

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx), \quad -\pi \leq x \leq \pi. \quad (2)$$

- Náš úkol je nalézt vztahy pro koeficienty a_0 , a_n a b_n v závislosti na $f(x)$.

- V příkladech 1, 2 a 3 jsme odvodili vztahy:
- $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$, $n = 1, 2, 3, \dots$, a
- $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$, $n = 1, 2, 3, \dots$.
- Předpokládali jsme, že $f(x)$ je spojitá.

Nyní definici rozšíříme a budeme požadovat, jen aby funkce $f(x)$ byla alespoň po částech spojitá na intervalu $\langle -\pi; \pi \rangle$, kromě konečného počtu bodů, kde spojitá není.

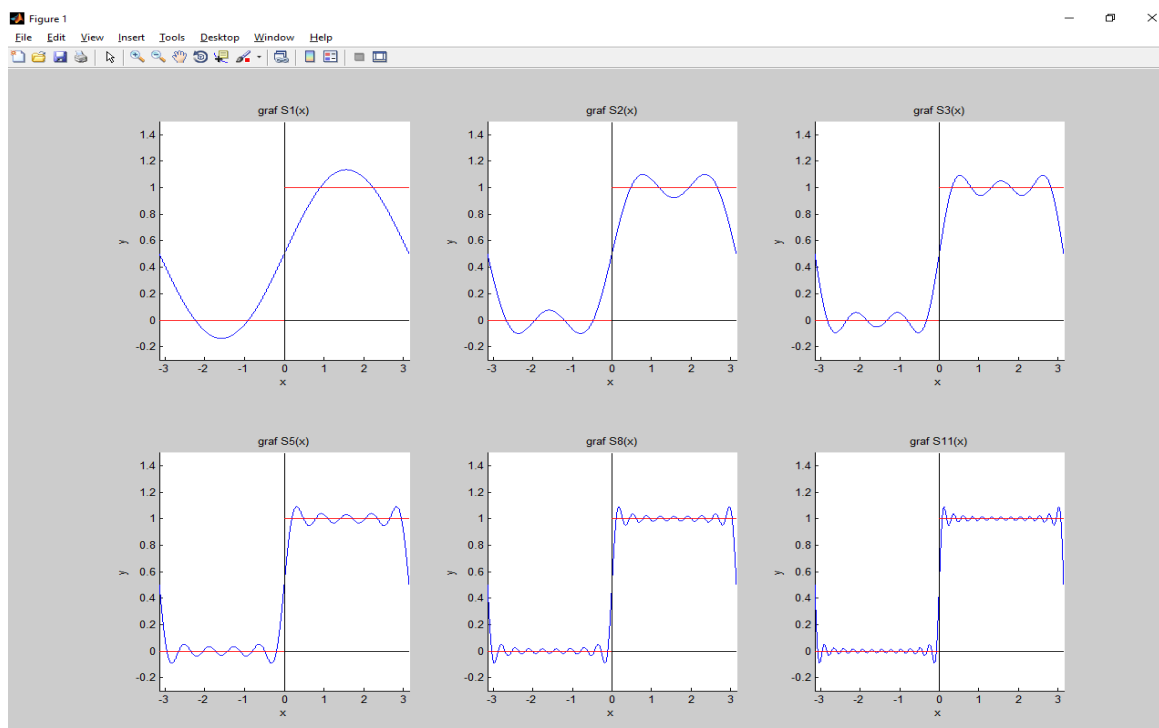
Definice:

Nechť funkce $f(x)$ je po částech spojitá na intervalu $\langle -\pi; \pi \rangle$. Potom *Fourierova řada funkce $f(x)$* je řada $a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx)$, kde koeficienty a_0 , a_n a b_n jsou definovány:

$a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) dx$, $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx dx$ a $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \sin nx dx$ a jsou nazývány Fourierovými koeficienty funkce $f(x)$.



Obrázek k příkladu 5:



- Na obrázku vidíme, že se zvětšujícím se n se $S_n(x)$ stává stále lepší aproximací grafu $f(x)$. Vypadá to, že graf $S_n(x)$ se blíží grafu $f(x)$, kromě bodu 0 nebo $\pm\pi$. Jinými slovy to vypadá, jako že funkce $f(x)$ se rovná součtu její Fourierovy řady kromě bodů, kde není funkce $f(x)$ spojitá.
- Toto je typické pro spojitou funkci, která má konečný počet bodů nespojitosti
- V bodě a , kde není funkce $f(x)$ spojitá existují jednostranné limity: $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(x+)$, resp. $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = f(x-)$.

Fourierův konvergenční teorém (FKT):

Je-li $f(x)$ periodická funkce s periodou 2π a $f(x)$ a $f'(x)$ jsou po částech spojitě na intervalu $(-\pi; \pi)$, potom je Fourierova řada konvergentní. Součet Fourierovy řady je roven funkci $f(x)$ ve všech bodech, kde je funkce $f(x)$ spojitá. Tam, kde funkce $f(x)$ není spojitá, je součet Fourierovy řady roven aritmetickému průměru limity zleva a zprava $\frac{1}{2}[f(x+) + f(x-)]$

- Pokud aplikujeme FKT na funkci z příkladu 5 (čtvercová vlna) dostaneme:
- $f(x+) = 1, f(x-) = 0$.
- Průměrná hodnota je tedy $\frac{1}{2}$. Stejně je to i pro body nespojitosti $n\pi$.

$$\forall n \in \mathbb{N}; f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{(2k-1)\pi} \sin(2k-1)x, & \text{pro } x \neq n\pi \\ \frac{1}{2}, & \text{pro } x = n\pi \end{cases}$$



Funkce s periodou $2L$

- Pokud je funkce $f(x)$ periodická, ale perioda není 2π , můžeme nalézt Fourierovu řadu pomocí substituce
- Předpokládejme, že $f(x)$ má periodu $2L$, tak, že $f(x + 2L) = f(x) \forall x$
- Zavedeme substituci $t = \frac{\pi x}{L}$ a dostaneme $g(t) = f(x) = f\left(\frac{Lt}{\pi}\right)$
- Potom funkce $g(t)$ má periodu 2π a $x = \pm L$ odpovídá $t = \pm\pi$.

Fourierova řada funkce $g(t)$ je: $g(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nt + b_n \sin nt)$ a $a_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) dt$,
 $a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \cos nt dt$, a $b_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t) \sin nt dt$.

- Pokud nyní použijeme substituci $x = \frac{Lt}{\pi}$, potom $t = \frac{\pi x}{L}$, $dt = \frac{\pi}{L} dx$ dostaneme:

Jestliže $f(x)$ je po částech spojitá funkce na intervalu $\langle -L; L \rangle$, pak je její Fourierova řada

$$f(x) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) \right],$$

kde

$$a_0 = \frac{1}{2L} \int_{-L}^L f(x) dx,$$

a pro $n \geq 1$,

$$a_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx, \quad b_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^L f(x) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right) dx.$$

- FKT platí i pro periodické funkce s periodou $2L$.



Fourierovy Řady (FŘ) - shrnutí

- Reálnou funkci na konečném intervalu vyjádříme ve tvaru nekonečné řady, která se skládá ze sinů a kosinů (tvar FŘ)

Definice a vlastnosti FŘ

Nekonečná řada tvaru $\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t)$, kde $\omega = \frac{2\pi}{T}$, se nazývá *Trigonometrickou řadou* s periodou T .

Nechť $T > 0$ a $f: \langle a; a + T \rangle \rightarrow \mathbb{R}$

- je reálná funkce reálné proměnné
- je na tomto intervalu po částech spojitá
- má po částech spojitou derivaci (=po částech hladká),

potom můžeme k funkci f sestrojit trigonometrickou řadu s periodou T , ve které pro čísla a_n a b_n platí: $a_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \cos n\omega t dt$; $b_n = \frac{2}{T} \int_a^{a+T} f(t) \sin n\omega t dt$.

Tuto řadu nazýváme *Fourierovou řadou* funkce f a píšeme:

$$f(t) \approx \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t), \omega = \frac{2\pi}{T}$$

čísla a_n a b_n se nazývají *Fourierovy koeficienty*

- Součet FŘ je roven zadané funkci tam, kde je funkce spojitá:

$$f(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t), t \in (a; a + T)$$

- V bodech nespojitosti se součet rovná aritmetickému průměru limity zprava a limity zleva:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos n\omega t + b_n \sin n\omega t) = \frac{1}{2} [f(t)^+ + f(t)^-].$$

Nechť funkce $f(t)$ je po částech hladká na symetrickém intervalu $\langle -\frac{T}{2}; \frac{T}{2} \rangle$. Potom:

- Je-li SUDÁ, pak $b_n = 0, a_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \cos n\omega t dt$; $\omega = \frac{2\pi}{T}$
 - Fourierův rozvoj funkce se zredukuje na kosinovou řadu
- Je-li LICHÁ, pak $a_n = 0, b_n = \frac{4}{T} \int_0^{\frac{T}{2}} f(t) \sin n\omega t dt$; $\omega = \frac{2\pi}{T}$
 - Fourierův rozvoj funkce se zredukuje na sinovou řadu.

