



EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání



*Vytvořeno v rámci projektu Rozvoj kvality vzdělávání, hodnocení
a strategického řízení na Univerzitě Pardubice, reg. č.
CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002320*

Numerické řešení rovnic

poznámky k přednáškám

→ Nalézt všechny nulové body fce $f(x)=0$

Nenulový bod: $f(\bar{x})=0 \rightarrow \bar{x}$:

→ Vzorce pro řešení pouze do 4 stupně.

→ i použití vzorců je někdy problematické

1. ETAPA Separace kořenů – Stanovení co nejkratších intervalů, (nelze algoritmovat) ve kterých leží právě jeden kořen (obecně i komplexní)
2. ETAPA: Aproximací kořenů – Nalezení numerického řešení rovnice
 - a) Číslo, které představuje přibližnou hodnotu kořenu s danou přesností $\bar{x}$.
 - b) Postup, který vede k nalezení $\bar{x}$.

$\langle a; b \rangle$ ze separace

→ Numerický výpočet $\bar{x}$ spočívá v konstrukci posloupnosti $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ takové, že $\lim_{n \rightarrow \infty} x_n = \bar{x}$.

→ Numerické řešení – takový člen $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$, pro které platí $|x_k - \bar{x}| < \varepsilon$

→ Efektivita metod je dána rychlostí konvergencí. (Zvolená přesnost procedur).

→ Teoretický základ poskytuje tzv. Banachova věta o pevném bodě (udává postačující podmínku po $\exists$ pevného bodu fce $\omega \Rightarrow \omega(\bar{x}) = \bar{x}$) pevný bod = kořen.

Nechť $\omega: \langle a; b \rangle \rightarrow \langle a; b \rangle$. Nechť fce $\omega(x)$ je konstantní v $\langle a; b \rangle$.

($\exists$ číslo $K \in \langle 0; 1 \rangle$) takové, že dvojice čísel $x_1 \neq x_2$; $x_1, x_2 \in \langle a; b \rangle$ platí

$(\omega(x_1) - \omega(x_2)) \leq K|x_1 - x_2|$). Pak $\exists!$ Pevný bod $\bar{x}$ fce $\omega(x)$ v $\langle a; b \rangle$.

$$\omega(\bar{x}) = \bar{x} \quad |\omega(a) - \omega(b)| < K|a - b| \quad K \in (0; 1)$$

- kontraktivnost fce $\varphi(x)$ znamená, že vzdálenost obrazů je menší, než vzdálenost vzorů – je podstatná pro $\exists$ pevného bodu
- kritérium pro pozastavení výpočtu

$$|\bar{x} - x_k| \leq \frac{K^k}{1-K}$$

v praxi stačí $|\bar{x} - x_k| < \varepsilon$

Metoda prosté iterace (MPI)

$f(x) = 0 \quad | + x \quad \text{volíme } x_0 \in \langle a; b \rangle$

$f(x) + x = x \quad \varphi(x) = x$ a pokládáme $x_{k+1} = \varphi(x_k)$

Stanovení $\varphi(x)$ není jednoznačné (vždy více možností) $\rightarrow$ vždy ale je nutno kontrolovat kontraktivnost

$$\langle a; b \rangle \ni \exists q < 1; |f'(x)| < q \forall x \in \langle a; b \rangle \rightarrow \text{fce je kontraktivní}$$

Př.

$$x^3 + x - 1000 = 0$$

$$\text{int. } \langle 9, 10 \rangle \rightarrow \langle 0; 271 \rangle$$

stanovení $\varphi(x)$:

$$1. x = 1000 - x^3$$

$$x = \varphi(x) \quad \varphi_1(x) = 1000 - x^3$$

$$\varphi'_1(x) = -3x^2 \quad \varphi'_1(10) = -300 \nless 1 \text{ nelze}$$

$$2. x = \sqrt[3]{1000 - x}$$

$$\varphi_2(x) = \sqrt[3]{1000 - x} \quad \varphi'_1(x) = -\frac{1}{3} \frac{1}{\sqrt[3]{(1000-x)^2}} \text{ určitě je } < 1 \text{ pro } \forall x \in \langle 9; 10 \rangle$$

$$\langle 9; 10 \rangle \rightarrow \langle 9,9\bar{6}; 9,9699 \rangle \subset \langle 9; 10 \rangle \cup$$

Výpočet

$$x_0 = 10$$

$$x_1 = \varphi_2(x_0) = 9,966554934$$

$$x_2 = \varphi_2(x_1) = 9,966667166$$

$$x_3 = \varphi_2(x_2) = 9,966666789$$

$$x_4 = \varphi_2(x_3) = 9,966666791$$

$$x_5 = \varphi_2(x_4) = 9,966666791 - \text{stejně jako předchozí } \varphi_2(x_4) = x_5 = x_4 \text{ pevný bod zobrazení}$$

Koeficient konstrukce (obecná metoda výpočtu) $x \in \langle a; b \rangle$

$$f(x) = 0 \rightarrow \varphi(x) = x$$

Předpokládáme, že $f(x)$ je diferencovatelný na $\langle a; b \rangle$ a platí:

$$0 < C \leq f'(x) \leq d \quad \text{v celém } \langle a; b \rangle$$

$$f(x) = 0$$

$$x + f(x) = x \rightarrow x = x - \lambda f(x) \quad \lambda \dots \text{určíme tak, aby fce } \varphi(x) = x - \lambda f(x) \text{ byla kontraktivní}$$

$$\varphi(x) = x - \lambda f(x)$$

$$\varphi'(x) = x - \lambda f'(x) \rightarrow |\varphi'(x)| \leq k < 1$$

$$1 - k \leq \lambda \cdot c \leq \lambda f'(x) \leq \lambda \cdot d \leq 1 + k \rightarrow \lambda = \frac{2}{c + d}$$

bez AH

$$1 - q \leq \lambda \cdot c$$

$$1 + q \leq \lambda \cdot d$$

$$2 = \lambda(c + d) \rightarrow \lambda = \frac{2}{c + d}$$

Iterační vztah:
$$x_{k+1} = x_k - \frac{2}{c+d} \cdot f(x_k)$$

Př.: Na $< 1; 2 >$ řešte rci $x^3 + 4x^2 - 10 = 0$ s přesností $k = 10^{-4}$. Kolik iterací je potřeba provést (zaokrouhleno na GDM) $10^{-4} = 1 \cdot 10^{-4} = 0,0001$

$$x^3 + 4x^2 - 10 = 0$$

upravené na tvar: $\varphi(x) = x - \lambda f(x)$ a λ ...určíme tak, aby fce $\varphi(x)$ byla kontraktivní

$$f(x) = x^3 + 4x^2 - 10$$

$$f'(x) = 3x^2 + 8x \rightarrow 3x \cdot \left(x + \frac{8}{3}\right) \quad \text{na intervalu } < 1; 2 > \text{ je fce rostoucí}$$

$$f'(1) = 11 \quad f'(2) = 28 \rightarrow \text{Nabývá hodnot mezi 8 a 28}$$

$$\rightarrow \lambda = \frac{2}{11+28} = \frac{2}{39} \rightarrow \varphi(x) = x - \frac{2}{39} (x^3 + 4x^2 - 10)$$

Volím $x_0 = 1,5$

$x_0 = 1,5$	$\rightarrow A$	$ x_{n+1} - x_n \quad B - A $	
$x_1 = \varphi(x_0) = 1,378205$	$\rightarrow B$ $\rightarrow B \rightarrow A$	0,121795	X
$x_2 = \varphi(x_1) = 1,367147$	$\rightarrow B$ $\rightarrow B \rightarrow A$	0,011058	X
$x_3 = \varphi(x_2) = 1,365521$	$\rightarrow B$ $\rightarrow B \rightarrow A$	0,001625	X
$x_4 = \varphi(x_3) = 1,365275$	$\rightarrow B$ $\rightarrow B \rightarrow A$	0,000247	X
$x_5 = \varphi(x_4) = 1,365237$	$\rightarrow B$	0,000038	Ano

Přibližná hodnota kořene je $x_5 = \tilde{x} = 1,36524$ s přesností 0,0001

Metoda tečen

- známější a nejpoužívanější: musí být konkávní nebo konvexní

Myšlenka:

$$(b) = f(b) \cdot (x - b)$$

Osou x: $[x_1; 0]$

$$f(b) = f(b) \cdot (x_1 - b) = x_1 - b \rightarrow x_1 = \frac{f(b)}{f'(b)}$$

$$y - f(x_1) = f'(x_1) \cdot (x - x_1)$$

Osou x: $[x_2; 0]$

$$-f(x_1) = f'(x_1) \cdot (x_2 - x_1) \rightarrow x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)}$$

$$\dots \rightarrow \{x_0; x_1; x_2; \dots\} \rightarrow \alpha$$

Postačující podmínka konvergence:

$$< a; b > \quad x_0 = a \quad ; \text{je-li } f'(x) \cdot f''(x) < 0$$

$$x_0 = b \quad ; \text{je-li } f'(x) \cdot f''(x) > 0$$

Př.: Výpočet $\sqrt{2}$ $f(x) = 0$ $< a; b > = < 1; 2 >$

$$\varepsilon = 0,0001 \quad x^2 - 2 = 0$$

$$f(x) = x^2 - 2$$

$$f'(x) = 2x$$

$$f''(x) = 2 \quad \text{Na intervalu } < 1; 2 > \text{ platí } f'(x) \cdot f''(x) > 0 \rightarrow x_0 = 2$$

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k^2 - 2}{2x_k} = A - \frac{A^2 - 2}{2A}$$

$x_0 = 2$	$\rightarrow A$	$ B - A $	
$x_1 = 1,5$	$\rightarrow B$ $\rightarrow B \rightarrow A$	0,5	X
$x_2 = 1,41667$	$\rightarrow B$ $\rightarrow B \rightarrow A$	0,08333	X
$x_3 = 1,414216$	$\rightarrow B$ $\rightarrow B \rightarrow A$	0,002451	X
$x_4 = 1,414214$	$\rightarrow B$	0,000002	ANO

$$\sqrt{2} = 1,41421 \text{ s přesností } 0,0001$$

Metoda sečen (tětiv)

- NMT - nejrychlejší
- nevýhoda – musíme počítat derivaci (může být někdy dost náročné)

- v iteračním vzorci NMT lze nahradit $f'(x_k)$ diferenčním podílem (numerická derivace)

$$f'(x_k) \approx \frac{f(x_k) - f(x_{k-1})}{x_k - x_{k-1}}$$

$$\text{iterační vzorec } x_{k+1} = x_k - f(x_k) \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})}$$

nevýhoda: k výpočtu x_{k+1} musíme použít x_k a x_{k-1} (dvoukroková metoda) (NMT je jednokroková)

Př. $x - \cos x = 0 \quad \forall x \in \left(0; \frac{\pi}{2}\right) \quad \varepsilon = 0,001$

$$x_{k+1} = A - C \frac{A - B}{C - D}$$

nejdříve přetvarovat $A \rightarrow B$! pak $E - A$

0,7391 je kořen s přesností 0,001

další metody: půlení intervalu, regula falsi