

Laplaceova Transformace

Laplaceova Transformace (LT)

Nechť funkce $f: R \rightarrow R$ splňuje následující podmínky:

1. Funkce $f(t)$ je alespoň po částech spojitá,
2. $f(t) = 0$ pro $t < 0$,
3. Funkce $f(t)$ je exponenciálního řádu, tzn. Existují konstanty $M, s, t_0 \in R, t_0 > 0$, takové, že pro všechna $t \geq t_0$ platí $|f(t)| \leq Me^{st}$.

Potom definujeme funkci komplexní proměnné $F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt$ a říkáme jí Laplaceova transformace funkce $f(t)$.

- Značíme $\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p)$
- Funkce $f(t)$, která splňuje podmínky 1-3 se nazývá předmět
- Funkce $F(p)$ se nazývá obraz funkce $f(t)$ v LT
- LT je lineární, platí: $\mathcal{L}\{af(t) + bg(t)\} = a\mathcal{L}\{f(t)\} + b\mathcal{L}\{g(t)\}, a, b \in C$

Základní slovník a gramatika LT

0	$f(t)$	$\mathcal{L}\{f(t)\} = F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \cdot e^{-pt} dt$
1.	c	$\frac{c}{p}$
2.	$t^n, n \in N$	$\frac{n!}{p^{n+1}}$
3.	e^{at}	$\frac{1}{p-a}$
4.	$t^n e^{at}, n \in N$	$\frac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
5.	$\cos \omega t$	$\frac{p}{p^2 + \omega^2}$
6.	$\sin \omega t$	$\frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$
7.	$e^{at} \cos \omega t$	$\frac{p-a}{(p-a)^2 + \omega^2}$
8.	$e^{at} \sin \omega t$	$\frac{\omega}{(p-a)^2 + \omega^2}$
9.	$f'(t)$	$pF(p) - f(0)$
10.	$f''(t)$	$p^2F(p) - pf(0) - f'(0)$
11.	$f'''(t)$	$p^3F(p) - p^2f(0) - pf'(0) - f''(0)$
12.	$f^{(n)}(t)$	$p^nF(p) - p^{n-1}f(0) - p^{n-2}f'(0) - \dots - f^{(n-1)}(0)$
13.	$\int_0^t f(u)du$	$\frac{F(p)}{p}$
14.	$f(t-a); a \geq 0$	$e^{-ap}F(p)$
15.	$t \cdot f(t)$	$-F'(p)$



Zpětná Laplaceova Transformace

- Přechod od operátorové funkce $F(p)$ ke vzoru $f(t)$
- Značíme: $\mathcal{L}^{-1}\{F(p)\}$

Věta o rozkladu

Nechť operátorové funkce $F(p)$ má tvar ryze racionální lomené funkce $F(p) = \frac{M(p)}{N(p)}$, kde $M(p)$ a $N(p)$ jsou polynomy, stupeň polynomu $M(p)$ je menší než stupeň $N(p)$. Označíme p_k póly funkce $F(p) = \frac{M(p)}{N(p)}$, pak platí:

$$f(t) = \mathcal{L}^{-1}\{F(p)\} = \sum_{p_k} \text{res}_{p=p_k} [F(p)e^{pt}], t > 0.$$

Jestliže funkce $F(p) = \frac{M(p)}{N(p)}$ s reálnými koeficienty má komplexní póly $p_{1,2} = \alpha \pm \beta i$, stačí vypočítat reziduum pouze pro jeden kořen:

$$\text{res}_{p=\alpha+\beta i} [F(p)e^{pt}] + \text{res}_{p=\alpha-\beta i} [F(p)e^{pt}] = 2\text{Re} \left(\text{res}_{p=\alpha+\beta i} [F(p)e^{pt}] \right)$$

Řešení Diferenciálních rovnic Laplaceovou Transformací

Převod DR na Algebraické

Prostor Předmětů	D Rce + Počáteční Podmínky	Řešení DR vyhovující PP
	↓	↑
	$\mathcal{L}$ Laplaceova Transformace rovnice	$\mathcal{L}^{-1}$ Laplaceova Transformace řešení
Prostor Obrazů	Algebraická rovnice	Řešení
	→	↑

