EVROPSKÁ UNIE
Evropské strukturální a investiční fondy
Operační program Výzkum, vývoj a vzdělávání

MINISTERSTVO ŠKOLSTVÍ, MLÁDEŽE A TĚLOVÝCHOVY

Vytvořeno v rámci projektu Rozvoj kvality vzdělávání, hodnocení a strategického řízení na Univerzitě Pardubice, reg. č. CZ.02.2.69/0.0/0.0/16_015/0002320

Aproximace funkcí

poznámky k přednáškám

Aproximace fcí

- Nahrazení složitých fcí vhodnou fcí (jednodušší)
- Typy Aproximace

Interpolace (fce prochází všemi póly)

$$\varphi(x_i) = f_i; i = 1, 2, \dots, n$$

Stejnoměrná aproximace (není jednoznačná)

$$max|f(x) - \varphi(x)|;\ x \in \langle x_0;\ x_n \rangle$$

Metoda nejmenších čtverců

Interpolace

Obecná formulace úlohy

Dáno N+1 hodnot

x_0	f_0
x_1	f_1
$\vdots$	
x_{N-1}	f_{N-1}
x_N	f_N

$$[x_i;\ f_i]; i = 0 \dots N$$

Póly

Hledáme φ(x) → v závislosti na tvaru fce φ(x) hovoříme o interpolaci:

- Polynomiální
- Splajnové
- Trigonometrické
- Exponenciální

Třídy aproximovaných fcí $\varphi(x; a_0; a_1; \dots; a_n)$

x … proměnná

a_i; i = 0 … n koeficienty

Algebraické polynomy

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

- snadná I a D

Weierstrassova věta o aproximaci

Je-li f(x) spojitá fce def. na x $x \in < a; b >$ a $\varepsilon > 0$, pak ∃ polynom P(x) def. na <a; b> takový, že platí

$$|f(x) - P(x)| < \varepsilon;\ \forall x \in < a; b >$$

Jsou-li dány body [x_i; y_i]; i= 0 … n takové, že $x_i \neq x_j$ Pak ∃ jediný polynom $P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$ nejvýše n-tého stupně s vlastností $P_n(x_i) < y_i; i = 1 \dots n$

$$P_n(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n$$

$$[x_0; y_0] \in P_n(x): y_0 = a_0 + a_1 x_0 + a_2 x_0^2 + \cdots + a_n x_0^n$$

$$[x_1; y_1] \in P_n(x): y_1 = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1^2 + \cdots + a_n x_1^n$$

$$[x_2; y_2] \in P_n(x): y_2 = a_0 + a_1 x_2 + a_2 x_2^2 + \cdots + a_n x_2^n$$

$$[x_n; y_n] \in P_n(x): y_n = a_0 + a_1 x_n + a_2 x_n^2 + \cdots + a_n x_n^n$$

n+1 rovnic o n+1 neznámých (a_0 … a_n)

pro $x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n$

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & x_0^2 & \dots & x_0^{n-1} & x_0^n \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 1 & x_n & x_n^2 & \dots & x_n^{n-1} & x_n^n \end{vmatrix} = (x_2 - x_1) \cdot (x_3 - x_2) \cdot (x_4 - x_3) \cdot \cdots \cdot (x_n - x_{n-1}) \neq 0$$

Vandermondův D

→ ∃! řešení

Kramerovo pravidlo: $\left(a_0 = \frac{D_0}{D}; a_1 = \frac{D_1}{D}; \dots; a_n = \frac{D_n}{D}\right)$

Metoda neurčitých koeficientů

- špatně podmíněná soustava
- velká početní náročnost pro rost. n

Lagrangeův IP

Nepřímá konstrukce pomocí fundamentálních polynomů $l_i(x); i = 0, \dots n$

$l_i(x_i) = 0$ pro $i \neq j$

$l_i(x_i) = 1$ pro $i = j$

Polynomy l_i(x) mají kořeny

$$x_0, x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n \to l_i(x) = C_i \cdot (x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)$$

Pro $l_i(x_i) = 1$

$$C_i = \frac{1}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

Po dosazení dostaneme

$$l_i(x) = \frac{(x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{i-1})(x - x_{i+1}) \dots (x - x_n)}{(x_i - x_0)(x_i - x_1) \dots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \dots (x_i - x_n)}$$

$$L_n(x) = \sum_{i=0}^{n} y_i l_i(x)$$

Př.: Sestrojte LIP fce F(x) dané tabulkou

X_i	0	1	2	5
Y_i	2	3	12	147

Fundementální pln: $l_0(x) = \frac{(x-1)(x-2)(x-5)}{(0-1)(0-2)(0-5)} = \cdots = -\frac{1}{10}(x^3 - 8x^2 + 17x - 10)$

$$l_1(x) = \frac{(x-0)(x-2)(x-5)}{(1-0)(1-2)(1-5)} = \cdots = \frac{1}{4}(x^3 - 7x^2 + 10x)$$

$$l_2(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-5)}{(2-0)(2-1)(2-5)} = \cdots = -\frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 5x)$$

$$l_3(x) = \frac{(x-0)(x-1)(x-2)}{(5-0)(5-1)(5-2)} = \cdots = \frac{1}{60}(x^3 - 3x^2 + 2x)$$

$$L_3(x) = 2\left[-\frac{1}{10}(x^3 - 8x^2 + 17x - 10)\right] + 3\left[\frac{1}{4}(x^3 - 7x^2 + 10x)\right] + 12\left[-\frac{1}{6}(x^3 - 6x^2 + 5x)\right] + 147\left[\frac{1}{60}(x^3 - 3x^2 + 2x)\right] = x^3 + x^2 - x + 2$$

<u>Odhad chyby LIP a NIP</u>

Vyplývá z Taylorovy věty → vyjádření zbytku $f_{(x)}$ → L_n

$$f_{(x)} = L_{n(x)} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0) \dots (x - x_n)$$

$$f_{(x)} - L_{n(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0) \dots (x - x_n)$$

$$\left|f^{(n+1)}(x)\right| \leq M \quad pro\ x \in \langle x_0; x_n \rangle$$

Newtonův interpolační polynom (NIP)

LIP – teoretický význam (po změně vst dat (i jediný bod) ⇒ přepočítat)

Poměrná diference

X	F(x)	$\Delta^1 f(x)$	$\Delta^2 f(x)$	…	$\Delta^{n-1} f(x)$	$\Delta^n f(x)$
X_0	F_0	$f[x_0; x_1]$	$f[x_0; x_1; x_2]$			
X_1	F_1	$f[x_1; x_2]$			$f[x_0; \dots; x_{n-1}]$	
X_2	F_2	$f[x_2; x_3]$	$f[x_1; x_2; x_3]$			
X_3	F_3	$f[x_3; x_4]$	$f[x_2; x_3; x_4]$	…		$f[x_0; \dots; x_n]$
X_4	F_4	⋮	⋮			
⋮	⋮	$f[x_{n-2}; x_{n-1}]$			$f[x_1; \dots; x_n]$	
X_{n-1}	F_{n-1}	$f[x_{n-1}; x_n]$	$f[x_{n-2}; x_{n-1}; x_n]$			
X_n	F_n					

$\Delta^0 f(x) = f_i$

$\Delta^1 f(x) =$

- $\frac{f_1 - f_0}{x_1 - x_0} = f[x_0; x_1]$
- $\frac{f_2 - f_1}{x_2 - x_1} = f[x_1; x_2]$
- ….
- $\frac{f_n - f_{n-1}}{x_n - x_{n-1}} = f[x_{n-1}; x_n]$

$\Delta^2 f(x) =$

- $f[x_0; x_1; x_2] = \frac{f[x_1;x_2] - f[x_0;x_1]}{x_2 - x_0}$
- $f[x_1; x_2; x_3] = \frac{f[x_2;x_3] - f[x_1;x_2]}{x_3 - x_1}$
- …
- $f[x_{n-2}; x_{n-1}; x_n] = \frac{f[x_{n-1};x_n] - f[x_{n-2};x_{n-1}]}{x_n - x_{n-2}}$

$\Delta^n f(x) = f[x_0; \dots; x_n] = \dfrac{f[x_1; \dots; x_n] - f[x_0; \dots; x_{n-1}]}{x_n - x_0}$

NIP: $N_n(x) = f_0 + f[x_0; x_1](x - x_0) + f[x_0; x_1; x_2](x - x_0)(x - x_1) + \cdots + f[x_0; x_1; \dots; x_n](x - x_0)(x - x_1) \dots (x - x_{n-1})$

Ukázka výpočtu koeficientů pro ekvidistantní body $x_i = x_0 + i * h, i = 0, \dots, n$ $[x_i; f_i]$

$N_N(x_i) = f_i \rightarrow [x_0; f_0]: \; N_0(x_0) = a_0 = f_0$

$[x_1; f_1]: \; N_1(x_1) = a_0 + a_1(x_1 - x_0) = f_1 \rightarrow a_1 = \frac{f_1 - a_0}{x_1 - x_0} = \frac{f_1 - f_0}{h}$

$[x_2; f_2]: \; N_2(x_2) = a_0 + a_1(x_2 - x_0) + a_2(x_2 - x_0)(x_2 - x_1) = f_2$

$a_2 = \frac{f_2 - a_0 - a_1(x_2 - x_0)}{(x_2 - x_0)(x_2 - x_1)} = \frac{f_2 - f_0 - \frac{f_1 - f_0}{h}(2h)}{2h\,h} = \frac{f_2 - f_0 - 2f_1 + 2f_0}{2h^2} = \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2h^2}$

$[x_3; f_3]: \; N_3(x_3) = a_0 + a_1(x_3 - x_0) + a_2(x_3 - x_0)(x_3 - x_1) +$

$+ a_3(x_3 - x_0)(x_2 - x_0)(x_1 - x_0) = f_3$

$a_3 = \frac{f_3 - a_0 - a_1(x_3 - x_0) - a_2(x_3 - x_0)(x_3 - x_1)}{(x_3 - x_0)(x_2 - x_0)(x_1 - x_0)} =$

$\frac{f_3 - f_0 - \frac{f_1 - f_0}{h}(3h) - \frac{f_2 - 2f_1 + f_0}{2h^2}(3h)(2h)}{3h\,2h\,h} = \frac{f_3 - f_0 - 3f_1 + 3f_0 - 3f_2 + 6f_1 - 3f_0}{6h^3} = \frac{f_3 - 3f_2 + 3f_1 - f_0}{6h^3}$

$[x_K; f_K]: \; a_K = \frac{\Delta_0^K}{K! h^K} \quad K = 0 \dots n$ poměrná diference

LIP = NIP jiná konstrukce, výsledek je stejný

ODHAD CHYBY LIP a NIP

Vyplývá z Taylorovy věty → vyjádření zbytku $f_{(x)}$ → $P_{n(x)}$

$$f_{(x)} = P_{n(x)} + \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0) \dots (x - x_n)$$

$$f_{(x)} - P_{n(x)} = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!}(x - x_0) \dots (x - x_n)$$

$$\left|f^{(n+1)}(\xi)\right| \le M \quad pro\ x \in \langle x_0; x_n \rangle$$

Hledáme Max hodnotu na intervalu $\langle x_0; x_n \rangle$

Př:

x	0	$\frac{\Pi}{6}$	$\frac{\Pi}{4}$	$\frac{\Pi}{3}$
sinx	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$

$\rightarrow L_3(x)$ sinx→cosx→-sinx→-cosx→sinx

M odhad max. hodnot 4. derivace

M=1 $x \in (0; \frac{\Pi}{3})$

Např: pro $x = \frac{\Pi}{5}$ $\quad L_3\left(\frac{\Pi}{5}\right) \approx \sin(\frac{\Pi}{5})$

$$\left|\sin\frac{\Pi}{5} - L_3\left(\frac{\Pi}{5}\right)\right| \leq \frac{\sin(\xi)}{(3+1)!}(\frac{\Pi}{5} - 0)(\frac{\Pi}{5} - \frac{\Pi}{6})(\frac{\Pi}{5} - \frac{\Pi}{4})(\frac{\Pi}{5} - \frac{\Pi}{3})$$

SPLAJNY

Hladkost navázání je důležitá

→ polynom 3. stupně

→ pro funkční hodnoty

$\varphi_0(x_0) = f_0 \ldots \varphi_{i-1}(x_{i-1}) = f_{i-1}$

$$\varphi_{i-1}(x_i) = f_i = \varphi_i(x_i) \ldots \varphi_i(x_{i+1}) = f_{i+1} = \varphi_{i+1}(x_{i+1}) \ldots = \varphi_{n-1}(x_n) = f_n$$

→ pro první derivace

$\varphi_0'(x_0) = f_0' \ldots \varphi'_{i-1}(x_{i-1}) = f'_{i-1}$

$$\varphi'_{i-1}(x_i) = f'_i = \varphi'_i(x_i) \ldots \varphi'_i(x_{i+1}) = f'_{i+1} = \varphi'_{i+1}(x_{i+1}) \ldots = \varphi'_{n-1}(x_n) = f'_n$$

→ pro druhé derivace

$\varphi_0''(x_0) = f_0'' \ldots \varphi''_{i-1}(x_{i-1}) = f''_{i-1}$

$$\varphi''_{i-1}(x_i) = f''_i = \varphi''_i(x_i) \ldots \varphi''_i(x_{i+1}) = f''_{i+1} = \varphi''_{i+1}(x_{i+1}) \ldots = \varphi''_{n-1}(x_n) = f''_n$$

$\varphi_i(x)$ je polynom 3. stupně $i = 0, 1 \ldots, \ n-1$

<u>Př:</u>

	x	$f_{(x)}$
x_0	0	1
x_1	1	0
x_2	2	2
x_3	3	1

$\varphi_i(x) = a_1 + b_1 x + c_1 x^2 + d_1 x^3$ (neznámé a_1 b_1 c_1 d_1)

$\varphi'_i(x) = b_1 + 2c_1 x + 3d_1 x^2$ (neznámé b_1 c_1 d_1)

$\varphi''_i(x) = 2c_1 + 6d_1 x$ (neznámé c_1 d_1)

$\varphi_i(x_{i-1}) = f_{i-1}$ $\quad \varphi'_i(x_i) = \varphi'_{i+1}(x_i)$ $\quad$ + počáteční a konečná podmínka

$\varphi_i(x_i) = f_i$ $\quad \varphi''_i(x_i) = \varphi''_{i+1}(x_i)$ $\quad \varphi'_1(x_0) = \varphi''_n(x_n)$

Metoda nejmenších čtverců

Nepožadujeme, aby aproximující funkce procházela póly → eliminujeme chyby měření (hodnoty úlohy → aproximace)

Obecná formulace úlohy:

φ(x) f dáno funkčními hodnotami (póly)

x	$f(x)$
x_0	f_0
x_1	f_1
$\vdots$	$\vdots$
x_n	f_n

$\varphi(x) = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x) + \cdots + a_n\varphi_n(x)$

$\varphi_j(x)\ \epsilon\ \tau$ ⋯ třída funkcí určitého typu

$j = 0 \cdots k$

Např. $\{1; x;\ x^2;\ \cdots;\ x^k\}$; $\{1; \sin x\,; \cos x\,; \sin 2x\,;\ \cdots\}$; $\left\{1; \frac{1}{x}; \frac{1}{x^2}; \cdots\right\}$ ⋯

Podmínka metody nejmenších čtverců

$$\sum_{i=0}^{n}[\varphi\ (x_i) - f_i]^2 = S\left(a_{0;}a_1; \cdots; a_k\right)$$

Hledáme koeficient $a_0 \cdots a_k$ tak, aby funkce $S(a_0; \cdots; a_k)$ nabyla své nejmenší hodnoty.

Minimalizace S

$$\frac{\partial S}{\partial a_j} = 0;\ \ j = 0 \cdots k$$

$$2 \cdot \sum_{i=0}^{n}[\varphi(x_i) - f_i] \cdot \varphi_j(x_i) = 0 \qquad /:2$$

$$\sum_{i=0}^{n}[a_0\varphi_0(x_i) + \cdots + a_k\varphi_k(x_i) - f_i] \cdot \varphi_j(x_i) = 0$$ Soustava k+1 rovnic o k+1 neznámých

$$a_0\underbrace{\sum_{i=0}^{n}\varphi_0(x_i)\varphi_j(x_i)}_{\text{koeficient}} + \cdots + a_k\underbrace{\sum_{i=0}^{n}\varphi_k(x_i)\varphi_j(x_i)}_{\text{koeficient}} = \underbrace{\sum_{i=0}^{n} f_i\varphi_j(x_i)}_{\text{koeficient}}$$

označíme $\left(\varphi_p; \varphi_g\right)\sum_{i=0}^{n}\varphi_p(x_i)\varphi_g(x_i)$ jako skalární součin

Dostaneme tzv. Normální soustavu rovnic

$$a_0(\varphi_0;\varphi_0)+a_1(\varphi_1;\varphi_0)+\cdots+a_k(\varphi_k;\varphi_0)=(f_i;\varphi_0)$$

……………………………

$$a_0(\varphi_0;\varphi_k)+a_1(\varphi_1;\varphi_k)+\cdots+a_k(\varphi_k;\varphi_k)=(f_i;\varphi_k)$$

→pokud jsou fce $\varphi_0(x)$ … $\varphi_k(x)$ Lineárně nezávislé na množině uzlů, má tato soustava jediné řešení → $\varphi(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)+\cdots+a_k\varphi_k(x)$

1) Nalezněte pln. 1.stupně, který aproximuje fci f(x) danou tabulkou

Hledáme polynom: $P_1(x)=a_0\varphi_0(x)+a_1\varphi_1(x)$

$$\varphi_0(x)=1;\ \varphi_1\ (x)=x; f(x_{i)}=y_i$$

1	0	1	2	3
X_i	2	4	6	8
Y_i	2	11	28	40

→normální soustava rovnic:

$$a_0(1;1)+a_1(x;1)=(f;1)$$

$$a_0(1;x)+a_1(x;x)=(f;x)$$

Sk.součiny:

$$(1;1)=\sum_{i=0}^{3}(1;1)=1*1+1*1+1*1+1*1=4$$

$$(x;1)=\sum_{i=0}^{3}(x_i;1)=2*1+4*1+6*1+8*1=20\,;(=(1;x)=\sum_{i=0}^{3}(1;x)$$

$$(x;x)=\sum_{i=0}^{3}(x_i;x_i)=2*2+4*4+6*6+8*8=120\,;(=(1;x^2)$$

$$(f;1)=\sum_{i=0}^{3}(f_i;1)=2*1+11*1+28*1+40*1=81$$

$$(f;x)=\sum_{i=0}^{3}(f_i;x_i)=2*2+11*4+28*6+40*8=536$$

$$\rightarrow 4a_0+20a_1=81 \quad \rightarrow a_0=-12{,}5$$

$$20a_0+120a_1=536\ \rightarrow\ a_1=6{,}55$$

$$P_1(x)=-12{,}5+6{,}55x$$

Pozn: pln. 3.stupně $P_3(x)=a_0+a_1x+a_2x^2+a_3x^3$

$$a_0(1;1)+a_1(x;1)+a_2(x^2;1)+a_3(x^3;1)=(f;1)$$
$$a_0(1;x)+a_1(x;x)+a_2(x^2;x)+a_3(x^3;x)=(f;x)$$
$$a_0(1;x^2)+a_1(x;x^2)+a_2(x^2;x^2)+a_3(x^3;x^2)=(f;x^2)$$

$$a_0(1; x^3) + a_1(x; x^3) + a_2(x^2; x^3) + a_3(x^3; x^3) = (f; x^3)$$

Použijeme-li ORTOGONÁLNÍ SYSTÉM FCÍ (OSF) na množině $\{x_0; x_1; \dots; x_n\}$;
$(\varphi_i)_{i=1}^{N}; (\varphi_i; \varphi_j) = 0\ pro\ i \neq j$
=> diagonální soustava

$$a_0(\varphi_0; \varphi_0) + 0 + \cdots + 0 = (f; \varphi_0)$$
$$0 + a_1(\varphi_1; \varphi_1) + \cdots 0 = (f; \varphi_1)$$
……………………..
$$0 + 0 + \cdots a_k(\varphi_k; \varphi_k) = (f; \varphi_k)$$

Konstrukce OSF dle Ralstona:

Klademe: $\varphi_{-1} = 0;\ \varphi_0 = 1;\ b_0 = 0$

$$\varphi_{k+1} = (x - C_R) * \varphi_k - b_k * \varphi_{k-1}$$

$$a_k = \frac{(x * \varphi_k; \varphi_k)}{(\varphi_k; \varphi_k)}\ ;\ b_k = \frac{(\varphi_k; \varphi_k)}{(\varphi_{k-1}; \varphi_{k-1})}$$

Př. přes OSF

i	0	1	2	3
X_i	2	4	6	8
Y_i	2	11	28	40

$$\varphi_{(x)} = a_0\varphi_0(x) + a_1\varphi_1(x)$$
$$\varphi_{-1} = 0;\ b_0 = 0;\ \varphi_0 = 1$$

$$\varphi_1 = (x - C_0) * \varphi_0 - b_0 * \varphi_{-1} = (x - C_0) * \varphi_0 = x - 5$$

$$C_0 = \frac{(x * \varphi_{0;}\varphi_0)}{(\varphi_0; \varphi_0)} = \frac{(x; 1)}{(1; 1)} = \frac{20}{4} = 5$$
$$a_0 = \frac{(f; \varphi_0)}{(\varphi_0; \varphi_0)} = \frac{(f; 1)}{(1; 1)} = \frac{81}{4}$$

$$a_1 = \frac{(f; \varphi_1)}{(\varphi_1; \varphi_1)} = \frac{(f; x - 5)}{(x - 5; x - 5)} = \frac{2 * (2 - 5) + 11(4 - 5) + 28 * (6 - 5) + 40 * (8 - 5)}{(2 - 5)^2 + (4 - 5)^2 + (6 - 5)^2 + (8 - 5)^2} = \frac{131}{20}$$

$$\varphi(x) = \frac{81}{4} * 1 + \frac{131}{20}(x - 5) = -12{,}5 + 6{,}55x$$

<u>Aproximace trigonometrickými polynomy</u>

- periodické fce
- použitím většího počtu členů TRIG. ŘADY → aproximace každé spojité fce na uzav. Intervalu → limitní případ → konstrukce Fourierovy řady
- oscilující systémy, vibrace → periodický charakter → fce sin x, cos x
- per. Fce $f(t) = f * (t + T)$ T perioda (nejmenší z možných)

$f(x) = A_0 + C \cdot \sin(\omega_0 t + \varphi)$ → substituce $x = \omega_0 t$

$f(x) = A_0 + C \cdot \sin(x + \varphi)$ → $\sin(x + \varphi) = \sin x \cos\varphi + \cos x \sin\varphi$

$f(x) = A_0 + C \cdot \sin x \cos\varphi + \mathrm{C} \cdot \cos x \sin\varphi$ → $A_1 = C \cdot \sin\varphi$ $\quad B_1 = C \cdot \cos\varphi$

$f(x) = A_0 + A_1 \cos x + B_1 \sin x + r$ → r=reziduum (odchylka fce f(x) a její aproximaxce)

$[x_i, y_i]$; i=1,2,…,N MNČ budeme minimalizovat střední kv. chybu

$$N[E_2(f)]^2 = \sum_{i=0}^{N} [y_i - (A_0 + A_1 \cos x_i + B_1 \sin x_i)]^2$$

$$\frac{\partial N}{A_0} = 2\sum_{i=0}^{N} \{[y_i - (A_0 + A_1 \cos x_i + B_1 \sin x_i)] \cdot (-1)\} = 0$$

$$\frac{\partial N}{A_1} = 2\sum_{i=\frac{1}{N}}^{N} \{[y_i - (A_0 + A_1 \cos x_i + B_1 \sin x_i)] \cdot (-\cos x_i)\} = 0$$

$$\frac{\partial N}{B_1} = 2\sum_{i=0}^{N} \{[y_i - (A_0 + A_1 \cos x_i + B_1 \sin x_i)] \cdot (-\sin x_i)\} = 0$$

Soustava po úpravě:

$$\begin{bmatrix} N & \sum_{i=0}^{N} \cos x_i & \sum_{i=0}^{N} \sin x_i \\ \sum_{i=0}^{N} \cos x_i & \sum_{i=0}^{N} \cos^2 x_i & \sum_{i=0}^{N} \sin x_i \cdot \cos x_i \\ \sum_{i=0}^{N} \sin x_i & \sum_{i=0}^{N} \cos x_i \cdot \sin x_i & \sum_{i=0}^{N} \sin^2 x_i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ B_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{N} y_i \\ \sum_{i=0}^{N} y_i \cdot \cos x_i \\ \sum_{i=0}^{N} y_i \cdot \sin x_i \end{bmatrix}$$

<u>Úvahy:</u> Ekvidistantní body Xi <-π; π> = součty L strana

$X_I = -\pi + \frac{2\pi_I}{N}$ i=0,1,…. N

1) $\sum_{i=j}^{N} sinx_i = 0 \rightarrow \sum_{i=j}^{N} cosx_i = \sum_{i=j}^{N} sinx, \cos x = \frac{1}{2} sin2x_i$
2) $\sum_{i=1}^{N} cos^2 x_i = \sum_{i=j}^{N} \frac{1+cos2x_i}{2} = \frac{N}{2} + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{N} cos2x_i = \frac{N}{2}$

$$\sum_{I=1}^{N} sin^2 x_i = \sum_{i=1}^{N} (1 - cos^2 x_i) = N - \frac{N}{2} = \frac{N}{2}$$

$$\Rightarrow \text{Soustava} \begin{bmatrix} N & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sum_0^N y_i \\ \sum_{I=0}^{N} y_i cosx_i \\ \sum_{i=0}^{N} sinx_0 \end{bmatrix}$$

Regulární matice ⇒ inverzní

Inverzní matice

$$\begin{matrix} N \\ \frac{N}{2} \\ \frac{N}{2} \end{matrix} \left(\begin{matrix} N & 0 & 0 \\ 0 & \frac{N}{2} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{N}{2} \end{matrix} \left| \begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \right. \right) \approx \left(\begin{matrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix} \left| \begin{matrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{N} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{N} \end{matrix} \right. \right) \rightarrow \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{N} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{N} \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} A_0 \\ A_1 \\ A_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & \frac{2}{N} & 0 \\ 0 & 0 & \frac{2}{N} \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} \sum_{i=0}^{N} x_i \\ \sum_{i=0}^{N} y_i cosx_i \\ \sum_{i=0}^{N} y_i sinx_i \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} A_0 = \frac{1}{2}\sum_{i=0}^{N} y_i \\ A_1 = \frac{2}{N}\sum_{i=0}^{N} y_i\, cosx_i \\ B_1 = \frac{2}{N}\sum_{I=0}^{N} y_i sin\, x_i \end{matrix}$$

Zobecnění: Periodická fci. s periodou 2π danou N+1 perzistujícími body $[x_i; y_i][x_i y_i]_{i=0}^{N}$

Po které platí xi=-π+$\frac{2\pi * i}{N}$ $můžeme\ aproximovat\ T\ polynomem$

$$T_M(x) = A_0 + A_1 cosx + B_1 sinx + \ldots .. + A_M \cos(M * x) + B_M \sin(M * x)$$

Koeficienty $A_0 = \frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i$

$$A_j = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \cos(j\, x_i)$$

Kde j=1,2,……, M.

$$B_j = \frac{2}{N}\sum_{i=1}^{N} y_i \sin(j\, x_i)$$

M je stupeň T polynomu a platí: N>2*M+1

⇒Numerická aproximace koeficientů Fourierovy řady

$$A_j = \int_{-\pi}^{\pi} f_{(x)} * \cos(jx)\, dx \ \rightarrow j = 0,1, \ldots .. M$$

$$B_j = \int_{-\pi}^{\pi} f_{(x)} * \sin(jx)\, dx \ \rightarrow j = 1,2, \ldots .. M$$